Année Universitaire 2017-18 | M1 : Mathématiques et Applications
Feuille d'exercice No 1 | UE : Modèles mathématiques en neurosciences

Exercice 1

Soit $T > 0$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0, T]$.

1. On suppose que l'on a une fonction u de classe $\mathcal{C}^1([0, T])$ avec $u(0) = u_0$ telle que
$$u'(t) \leq b(t) + a(t)u(t).$$
Montrer que
$$u(t) \leq e^{\int_0^t a(s)ds} u_0 + \int_0^t b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)ds} d\tau.$$

2. Supposons maintenant que pour $u \geq 0$, $b \geq 0$, $a \geq 0$,
$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau.$$
Montrer que
$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(\tau)a(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds} d\tau.$$
Cette inégalité très connue s'appelle l'inégalité de Gronwall.

Exercice 2 (Wilson-Cowan)

Un modèle pour les grands réseaux de neurones a été proposé par Wilson et Cowan et représente l'activité $N_i(t)$ du nœud i, $i = 1, 2, ..., J$. Ils proposent d'utiliser

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = I_i(t) - aN_i(t) + \sum_{j=1}^{J} K_{ji} S(N_j(t)), \qquad i = 1, 2, ..., J.$$

On suppose donnés : $I_i(t) \in C(\mathbb{R}^+)$ (signal d'entrée), $a > 0$ et K_{ji} des réels appelés *poids synaptiques*.

1. Donner une condition sur la fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour avoir existence d'une unique solution, globale, avec les $N_i(t = 0)$ donnés.

3. On suppose $I_i(\cdot)$ et $S(\cdot)$ bornés, montrer que les $N_i(t)$ restent bornés.

2. On suppose que : $J = 1$, $S' > 0$, $S(0) = 0$ et $I_i \equiv 0$. Donner un exemple où il y a plusieurs solutions stationnaires non-nulles.

Exercice 3 (Modèle SIR)

Le système SIR (R pour recovered) pour une épidémie rapide et d'incidence faible s'écrit (tous les paramètres sont positifs ainsi que les données initiales))

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S &= \frac{R(t)}{\tau_R} - \beta S(I+\eta), \\ \frac{d}{dt}I &= \beta S(I+\eta) - \frac{I}{\tau_I}, \\ \frac{d}{dt}R &= \frac{I}{\tau_I} - \frac{R(t)}{\tau_R}. \end{cases}$$

On veut montrer que les solutions sont globales. Pour cela
1. Monter que $I(t) > 0$, puis que $R(t) > 0$, enfin que $S(t) > 0$.
2. Trouver une quantité conservée et conclure.

Exercice 4 (à la Hodgkin-Huxley)

Une variante du système historique proposé par Hodgkin-Huxley est le système de Morris-Lecar vu en cours. Une autre variante consiste à écrire

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{I} g_i(t)(\bar{V}_i - v(t)), \\ \dfrac{dg_i(t)}{dt} = g_i(t)Q_i\big(v(t), g(t)\big), \qquad g_i(0) \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., I, \end{cases}$$

avec $g = (g_1, ..., g_I)$. On suppose que $\min_i \bar{V}_i \leq V(0) \leq \max_i \bar{V}_i$, que les fonctions $Q_i(\cdot)$ sont de classe C^1 et que, pour tout $W > 0$ il existe $K(W) > 0$ telle que

$$\sup_{i=1,2,...I} \ \sup_{|v| \ \leq W} Q_i\big(v, g\big) \leq K(W).$$

Montrer qu'il existe une solution globale. Pour cela, monter que les solutions définies sur un intervalle maximal $[0, T_+^*[$ vérifient
1. on a $g_i(t) \geq 0$,
2. $\min_i \bar{V}_i \leq v(t) \leq \max_i \bar{V}_i$,
3. donner une estimation sur les $g_i(t)$.
4. Conclure.

Exercice 5 (Lotka-Volterra)

On considère le système de Lotka-Volterra avec $a > 0$, $d > 0$,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= u(t)(1 - av(t)), \qquad u(0) > 0, \\ \frac{d}{dt}v(t) &= av(t)u(t) - dv(t), \qquad v(0) > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que les solutions sont globales et positives.
2. On pose $X(t) = \log(u(t))$ et $Y(t) = \log(v(t))$. Montrer que le système en (X, Y) est hamiltonien.

3. En déduire une quantité conservéee en X, Y, et en u, v.
4. En déduire que les solutions sont périodiques.