UPMC 2016-2017- 4M061

Examen du 2 mai 2017. Durée 2h
Sans documents ni calculatrice ni portable.

**Exercice** On considère le système de FitzHugh-Nagumo avec deux paramètres $a \in \mathbb{R}$, $z^* \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(9 - x(t)^2) - y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) + ay(t) - z^*. \end{aligned}$$

1. Écrire les équations qui définissent les états stationaires $(x^*, y^*)$ sous la forme $g(x^*) = z^*$ et identifier la fonction $g$.

2. Montrer qu'il existe toujours au moins une solution à cette équation.

3. Quelle matrice $A$ permet d'étudier la stabilité du point $x^*$ ?

On suppose dorénavant que pour tout point stationnaire on a :

$$3a(x^*)^2 < 1 + 9a.$$

4. Montrer que l'état stationnaire est unique.

5. Suivant les valeurs de $a$ et $x^*$, dire si l'état $(x^*, y^*)$ est stable ou non.

6. Ce système est-il excitable, et en quel point ? On pourra faire une description graphique.

**Correction**

1. On remplace $y^* = x^*(9 - (x^*)^2))$ dans l'égalité $x^* + ay^* = z^*$ et on trouve

$$g(x^*) = x^* + ax^*(9 - (x^*)^2)).$$

2. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires et les limites $x \to \pm\infty$.

3. C'est la matrice dérivée

$$A = \begin{pmatrix} 9 - 3x^2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

4. En deux racines successives de $g(x) = z^*$ , $g'$ doit changer de signe or $g'(x^*) = 1 + 9a - 3a(x^*)^2 < 0$.

5. Pour cela on calcule $det(A) = 1 + a(9 - 3(x^*)^2) > 0$ donc les parties réelles des valeurs propres ont même signe donné par celui de la trace

$$tr(A) = a + 9 - 3x^2.$$

On peut aller plus loin et discuter suivant le signe de $a$. Pour $a > 0$ par exemple, c'est le signe de $a^2 - 1 + 1 + 9a - 3ax^2$, si $a^2 > 1$ alors ce signe est positive et le point est instable.

6. Le point où l'on passe de stabilité à instabilité est celui où $3x^2 = a + 9$ et le graphique est celui de FHN sans la symmétrie.