◀ précédente

La résolution de la conjecture de courbure L^2 en relativité générale

2 mars 2015

La théorie de la relativité générale, dont le centenaire est célébré cette année, est l'un des piliers de la physique. La conjecture de courbure L^2 a été démontrée récemment dans une série de travaux menés par S. Klainerman, I. Rodnianski et J. Szeftel.

Mathématiquement, il s'agit de l'étude des variétés lorentziennes satisfaisant aux célèbres équations d'Einstein. Une thématique importante de ce domaine concerne les solutions des équations d'Einstein en basse régularité en lien avec les conjectures de censure cosmique de Penrose.

Certaines solutions connues des équations d'Einstein présentent un caractère pathologique qui pose a priori la question d'une possible limite à la validité physique de la relativité générale. R. Penrose répond à cette objection par ses célèbres conjectures de censure cosmique [4] qui stipulent que ces comportements pathologiques sont en fait exceptionnels, et donc absents pour une solution générique des équations d'Einstein. Il s'agit de problèmes ouverts majeurs du domaine. Dans un travail fondateur, D. Christodoulou [1] prouve ces conjectures dans le cas particulier des équations d'Einstein couplées à un champ scalaire en symétrie sphérique. Un ingrédient crucial de sa preuve consiste à donner un sens à des solutions très peu régulières des équations d'Einstein, et ce travail a joué un rôle moteur dans la grande activité récente autour des solutions des équations d'Einstein à basse régularité en l'absence de symétrie.

Dans une jauge appropriée, les équations d'Einstein peuvent se réécrire sous la forme d'un système d'équations d'ondes quasilinéaires (c'est à dire non linéaires y compris en les termes d'ordre les plus élevés). Pour de telles équations, en général, une condition nécessaire pour le contrôle des solutions est a priori que le tenseur de courbure de la métrique initiale soit strictement mieux que L^2, l'espace des fonctions de carré integrable. Cependant, les équations d'Einstein possèdent une structure non linéaire très riche, dite structure nulle, ce qui amène S. Klainerman à conjecturer dans [2] qu'une condition suffisante est que le tenseur de courbure de la métrique initiale soit dans L^2.

Cette conjecture est prouvée par S. Klainerman, I. Rodnianski et J. Szeftel dans la série de papiers [3] [5] [6]. Ce résultat montre que la norme L^2 du tenseur de courbure est un objet fondamental contrôlant la formation de singularité. De plus, il ne fait intervenir que des quantités invariantes (comme le tenseur de courbure de la métrique), c'est à dire indépendantes d'un choix de coordonnées, et permet donc de détecter les vraies singularités (par opposition aux singularités de coordonnées). Enfin, ce résultat se situe à un niveau critique pour les équations d'Einstein. En effet, le contrôle des cônes de lumière, et plus précisément le contrôle de leur rayon d'injectivité, nécessite d'avoir tenseur de courbure dans L^2. Ces objets étant fondamentaux en relativité générale, cela suggère que ce résultat d'existence locale serait optimal.

Références :

[1] D. Christodoulou, The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field, Ann. of Math., 149,1999, 183–217.

[2] S. Klainerman, PDE as a unified subject, Proceeding of Visions in Mathematics, GAFA 2000 (Tel Aviv 1999). Geom Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part 1, 279– 315.

[3] S. Klainerman, I. Rodnianski, J. Szeftel, The bounded L2 curvature conjecture. Acceptée pour publication dans Inventiones, 100 pp, arXiv:1204.1767.

[4] R. Penrose. Gravitational Collapse : the Role of General Relativity. Nuovo Cimento Rivista Serie 1, 1969, 252–276.

[5] J. Szeftel, Parametrix for wave equations on a rough background I-IV, 789 pp, arXiv :1204.1768, arXiv :1204.1769, arXiv :1204.1770, arXiv :1204.1771.

[6] J. Szeftel, Sharp Strichartz estimates for the wave equation on a rough background, 30 pp, arXiv :1301.0112.

Contacts : Jérémie Szeftel | UMR 7598 | Jeremie.Szeftel.upmc.fr