Limites de diffusion anormale pour des équations cinétiques

Marjolaine Puel
Université Nice Côte d'Azur

20 mai 2016

Part I : Modèles cinétiques pour des gaz avec collisions

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad f(t,x,v) \geq 0$$

- Equation de Boltzmann.
- Equation de Fokker Planck.

Partie II : Limites asymptotiques

- Introduction des paramètres physiques.
- Limites hydrodynamiques.

Part III : Diffusion anormale

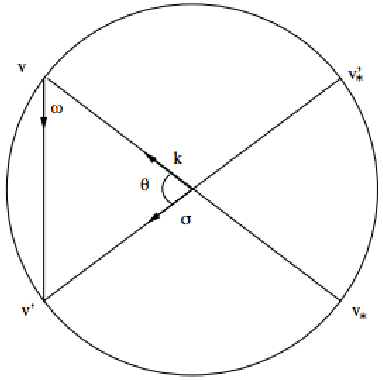
- Méthode EDP.
- Méthode aléatoire.
- Méthode spectrale.

Collisions de sphères dures : Equation de Boltzmann

Particules soumises aux lois de Newton

$v + v_* = v' + v'_*$

$|v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2$



L'opérateur de collision est donné par

$$Q(f) = \int_V \int_{S^{d-1}} \sigma(v-v_*,\omega)[f(t,x,v'_*)f(t,x,v')-f(t,x,v_*)f(t,x,v)]dv_* d\omega.$$

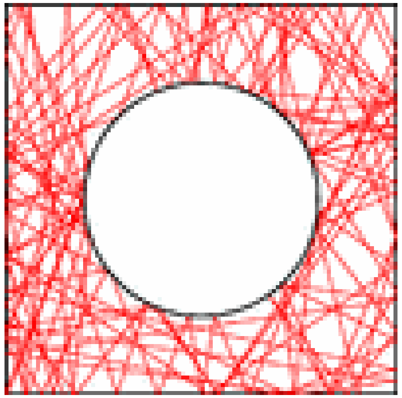
où

$$v' = v + \omega\cdot(v_* - v)\omega, \qquad v'_* = v_* - \omega\cdot(v_* - v)\omega$$

et où la section efficace $\sigma(v - v_1, \omega)$ mesure la probabilité d'interaction.

Gaz de faible densité. Collisions entre au plus deux particules.

Gaz de Lorentz : opérateur de Boltzmann linéaire



Dans le cas linéaire, l'opérateur de collision est donné par

$$Q(f) = \int_V \sigma(x, v, v')[M(x, v)f(t, x, v') - M(x, v')f(t, x, v)]dv'.$$

où M est un équilibre caractérisé par

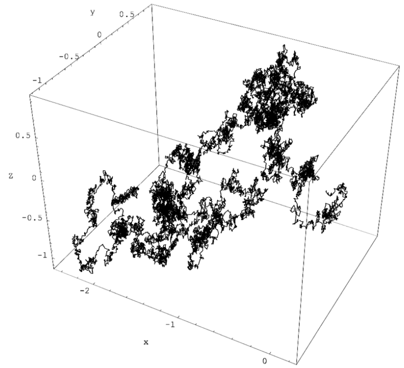
$$Q(M) = 0 \quad \text{et} \quad \int_V M(x, v)dv = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}^d$$

Les particules entrent en collision avec des sphères immobiles.

Processus de Wiener : opérateur de Fokker Planck

La position et la vitesse des particles sont solutions du système différentiel stochastique suivant

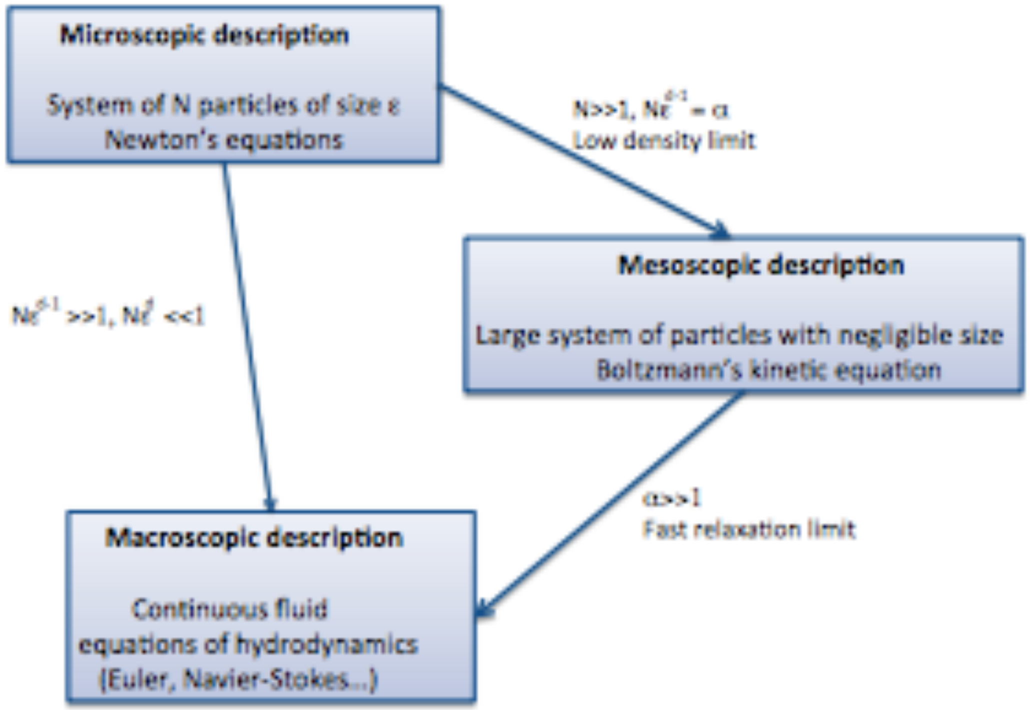
$$
\begin{aligned}
dv_t &= \sqrt{2}\, dB_t - \frac{\nabla_v \omega}{\omega}(v_t)\, dt \\
dx_t &= v_t\, dt
\end{aligned}
$$



La densité de probabilité de la loi du processus stochastique est solution de l'équation de Fokker Planck : Q a une forme diffusive

$$Q(f) := \nabla_v \cdot \left(M(v)\ \nabla_v\ (\frac{f}{M(v)}) \right) \tag{1}$$

Partie II : Limites asymptotiques



<u>Applications</u> : Calculs numériques,

Calcul des coefficients des équations macroscopiques.

Paramètres physiques

- L Longueur caractéristique du flot
- t^* temps d'observation
- $c = \frac{\lambda}{\tau}$ vitesse du son
- λ libre parcours moyen
- τ temps moyen entre deux collisions
- $v^* = \frac{L}{t^*}$ vitesse caractéristique

$$\mathrm{Ma} = \frac{L}{ct^*} = \frac{v^*}{c}$$

nombre de Mach

$$\mathrm{Kn} = \frac{c\tau}{L} = \frac{\lambda}{L}$$

nombre de Knudsen

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Kn}}$$

nombre de Reynolds

Equation adimensionnée

$$\mathrm{Ma}\ \partial_t f + v \cdot \nabla f = \frac{1}{\mathrm{Kn}} Q(f)$$

Mise à l'échelle et limites hydrodynamiques

L'équilibre thermodynamique est atteint instantanément,

grand nombre de collisions $\mathrm{Kn} = \varepsilon << 1$.

• limites diffusives $\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn}$.

Boltzmann vers Navier Stokes

[Golse, Saint-Raymond], Invent. (2004), JMPA(2009)

• limites non visqueuses $\mathrm{Re} \to \infty$

limites incompressibles $\mathrm{Ma} << 1$ Equations d'Euler

limites compressibles $\mathrm{Ma} \sim 1$ Equations d'Euler compressibles,

équations acoustiques

[Bardos Golse Levermore], ARMA(2000),

[Klar], SIAM J.Num.Analysis (1999)

Partie III : Approximation diffusion

On écrit le développement de Hilbert suivant

$$f^\varepsilon = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + r^\varepsilon$$

qui procure un système d'équation écrit selon les puissances de ε

$$\begin{aligned} Q(f^0) &= 0 \quad \Rightarrow f^0 = n(t,x)M(v) \\ Q(f^1) &= v \cdot \nabla_x f^0 \\ Q(f^2) &= v \cdot \nabla_x f^1 + \partial_t f^0 \end{aligned}$$

Si M est paire $\displaystyle\int vM(v)dv = 0$ et on resout $f^1 = Q^{-1}(vM) \cdot \nabla_x n$

L'équation de compatibilité pour f^2 permet d'identifier l'équation satisfaite par la densité n

$$\partial_t n - \nabla_x (D \nabla_x n) = 0 \quad \text{avec} \quad D = \int v \otimes \chi dv.$$

Approximation diffusion classique

La solution de

$$\varepsilon^2 \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon)$$

peut être approchée par

$$f^\varepsilon \sim n(t,x) M(x,v)$$

où l'équilibre M donne le profile en vitesse

et la densité n satisfait une équation de diffusion.

$$\partial_t n - \nabla_x \cdot (D \nabla_x n) = 0 \quad \text{avec} \quad D = \int Q^{*-1}(v) \otimes v M dv$$

qui, dans les cas simples, s'écrit

$$D \sim \int \frac{v \otimes v}{\nu(v)} M dv \quad \text{avec} \quad \nu(v) = \int_V \sigma(v,v') M(x,v') dv'.$$

Approximation diffusion, quelques références

Analyse mathématique

[Larsen Keller] J. Mathematical Phys. (1974)

[Bardos, Santos, Sentis], Trans AMS (1984)

[Poupaud] Asymp. Anal. 4 (1991)

[Degond, Goudon, Poupaud], Ind Univ Math (2000)

Schémas numériques

[Klar], SIAM J. Numerical analysis (1998)

[Jin], Riv. Mat. Univ. Parma (2012)

[Pareschi, Dimarco], SIAM J. Numerical analysis (2013)

[Lemou Mieussens] SIAM J. Sci comp (2008)

Cas anormaux

Deux cas où le coefficient de diffusion calculé plus haut est infini.

1- Cas de collisions inélastiques où les équilibres sont des distributions à queue lourde, i.e.

$$M \sim \frac{1}{|v|^{\beta}}$$

[Bobylev, Carrillo, Gamba] J. Statist. Phys. (2000)

[Bobylev, Gamba] J. Stat. Phys. (2006),

[Pulvirenti, Toscani] J. Statist. Phys (2003)

2- Lorsque la section efficace est dégénérée, $\nu \sim_0 |v|^{\gamma}$.

[Basile, Olla, Spohn] ARMA (2010)

On doit alors changer d'échelle de temps

$$\varepsilon^{\alpha}\partial_t f^{\varepsilon} + \varepsilon v \cdot \nabla f^{\varepsilon} = Q(f^{\varepsilon}) \tag{2}$$

Références : diffusion anormale

Equation de Boltzmann avec des équilibres à queue lourde,

[Mellet, Mischler, Mouhot] ARMA (2011)

[Mellet], Ind Univ Math (2011)

[Ben Abdallah, Mellet, M. P.], KRM (2011)

[Crouseilles, Hivert, Lemou], SIAM J. Sc. Comput.(2016)

Equation de Boltzmann avec une section efficace dégénérée,

[Crouseilles, Hivert, Lemou], submitted

[Ben Abdallah, Mellet, M. P.] M3AS (2011)

Equation de Vlasov-Levy-Fokker-Planck ,

[Cesbron, Mellet, Trivisa.] Applied Math Letter

Equation de Fokker-Planck : cas classique et cas critique,

[Nasreddine, M. P.] M2AN

[Cattiaux, Nasreddine, M. P.] Submitted

Equilibre à lourde queue : méthode EDP pour Boltzmann

L'opérateur de collision peut être décomposé en deux parties, un terme de gain et un terme de perte

$$Q(f) = Q^+(f) - Q^-(f) \quad \text{où} \quad Q^+(f) = \int_V \sigma(x,v,v')M(v)f(v')$$
$$\text{et} \quad Q^-(f) = \nu(x,v)f(v).$$

Ainsi, on modifie le développement de Hilbert de la façon suivante

$$f^\varepsilon = f^0 + f^{1\varepsilon} + f^{2\varepsilon} + r^\varepsilon$$

$$\text{où} \qquad \begin{aligned} Q(f^0) &= 0 \\ (\nu + \varepsilon v \cdot \nabla_x)(f^{1\varepsilon}) &= -\varepsilon v \cdot \nabla_x f^0 \\ Q(f^{2\varepsilon}) &= -Q^+(f^{1\varepsilon}) + \varepsilon^\alpha \partial_t f^0 \end{aligned}$$

Système limite : une équation elliptique non locale

Si Q ne dépend pas de x, on utilise la variable de Fourier en espace et on obtient

$$
\begin{aligned}
\partial_t \hat{n} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_V Q^+[\frac{i\varepsilon v\cdot\xi M(v)}{\nu + i\varepsilon v\cdot\xi}] dv \hat{n}(t,\xi) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_V \nu[\frac{i\varepsilon v\cdot\xi}{\nu + i\varepsilon v\cdot\xi}] M(v) dv \hat{n}(t,\xi) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_V \nu[\frac{i\varepsilon \frac{v}{\nu}\cdot\xi}{1 + i\varepsilon \frac{v}{\nu}\cdot\xi}] \frac{1}{(1+|v|)^\beta} dv \hat{n}(t,\xi) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} (\varepsilon|\xi|)^{\frac{\beta+\gamma-d}{1+\gamma}} \int_V \nu[\frac{iw\cdot\frac{\xi}{|\xi|}}{1 + iw\cdot\frac{\xi}{|\xi|}}] \frac{1}{((\varepsilon|\xi|)^\beta + |w|)^\beta} dv \hat{n}(t,\xi)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Choix $\alpha = \frac{\beta+\gamma-d}{1+\gamma} \Longrightarrow$ équation de diffusion fractionnaire pour n :

$$\partial_t \hat{n} + \kappa|\xi|^\alpha \hat{n} = 0.$$

Cas critique pour Fokker Planck : méthode aléatoire

On définit la variable aléatoire correspondant à la position

$$S_t = \int_0^t v_s \, ds \quad \text{et} \quad s_t = \mathrm{Var}_\mu(S_t^j)\,.$$

Soit H solution de l'équation de Poisson $Q^*H = v$. La solution de l'équation de Fokker Planck remise à l'échelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire remise à l'échelle comme suit :

$$\left(x_0 + \varepsilon \int_0^{t/\theta(\varepsilon)} v_s \, ds \, , \; v_{t/\theta(\varepsilon)} \right)$$

Décomposition de la limite en une densité multipliée par le profil en vitesse : propagation du chaos, étude des deux variables aléatoires indépendamment.

Cas critique pour Fokker Planck : méthode aléatoire

1. On utilise une vitesse tronquée $K(t)$ directement sur la solution de l'équation de Poisson $H \Longrightarrow H_K \Longrightarrow v_K$.
2. On définit à partir de la vitesse tronquée la nouvelle variable aléatoire
$$S_t^K = \int_0^t v_K(v_s)\, ds.$$
3. On choisit $K_1(t)$, $K_2(t)$ tendant vers l'infini avec t tels que
$$(S_t - S_t^{K_2(t)})/\sqrt{s_t^{K_2(t)}} \longrightarrow_{t\to+\infty} 0 \quad \text{dans } \mathrm{Ł}^2(\mu)$$
$$(S_t - S_t^{K_1(t)})/\sqrt{s_t^{K_1(t)}} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathrm{Ł}^1(\mu)$$
4. On montre un théorème central limite pour $S_t^{K_1(t)}/\sqrt{s_t^{K_1(t)}}$,

La différence entre $K_1(t)$ et $K_2(t)$ explique la convergence anormale

la normalisation n'est pas la racine de la variance.

Cas critique pour Fokker Planck : méthode aléatoire

Théorème : [Cattiaux, Nasreddine, M.P.](2015)

Supposons que $\alpha = 4$. Alors, il existe $\kappa > 0$ tel que ,

1. $\mathrm{Var}_\mu(S_t)/t\,\ln t \to \kappa > 0$ si $t \to +\infty$,
2. la variable renormalisée $S_t/\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(S_t)}$ converge au sens des distributions vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $(1/3)\,Id$.

Retour à l'EDP avec la lise à l'échelle ad hoc

$$\varepsilon^2 \log \varepsilon \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \nabla_v \,.\, \Big(M(v)\ \nabla_v\ (\frac{f}{M(v)}) \Big)$$

on obtient

$$f^\varepsilon \longrightarrow C(h_0 * n_t)(x) M(v) \quad \text{avec } h_0 = \int f^0(x,v)\,dv$$

où n_t est la densité du vecteur Gaussien de covariance $(2\kappa/3)\,t\,Id$.

Travaux en cours : cas sous-critique, méthode spectrale, discussion avec G. Lebeau

Difficultés

- Pas de gap spectral pour l'opérateur Q.
- Pas d'inégalité de Poincaré.
- Les inégalités de Poincaré faible ou Hardy ne suffisent pas.
- Méthode aléatoire : problème de théorème central limite.

Etude spectrale de l'opérateur complet $Q^\varepsilon = i\varepsilon v \cdot \xi + Q$.

Au lieu de projeter sur $KerQ$, on projette sur le premier espace propre

$$||f^\varepsilon - n^{\varepsilon\xi} M^{\varepsilon\xi}|| << C\varepsilon^\alpha.$$