Comportement en temps grand de l'equation de Landau des plasmas

Laurent Desvillettes
IMJ-PRG, Université Paris Diderot

February 27, 2016

Résultats obtenus en collaboration avec

Kleber Carrapatoso, ENS Cachan

Lingbing He, Tsinghua Univ., Beijing

Version quantitative du principe de La Salle.

On suppose qu'une équation abstraite (pour $f := f(t, ...)$)

$$\partial_t f = A(f)$$

possède une fonctionnelle de Lyapounov (entropie) $H(f) \in \mathbb{R}$, i.-e. (pour $t \mapsto f(t)$ solution de l'équation)

$$\frac{d}{dt} H(f(t)) = -D(f(t)) \leq 0,$$

supposée stricte au sens suivant: pour un certain f_∞,

$$A(f) = 0 \iff D(f) = 0 \iff H(f) = H(f_\infty) \iff f = f_\infty.$$

Méthode d'entropie-dissipation d'entropie

Relation d'entropie:

$$\frac{d}{dt} H(f(t)) = -D(f(t)) \leq 0.$$

On recherche une **inégalité fonctionnelle** d'entropie-dissipation d'entropie

$$D(f) \geq Cst\,(H(f) - H(f_\infty)).$$

Si elle existe, toutes les solutions $t \mapsto f(t)$ de l'equation vérifient

$$\frac{d}{dt}\Big(H(f(t)) - H(f_\infty)\Big) \leq -Cst\,\Big(H(f(t)) - H(f_\infty)\Big),$$

si bien qu'on a convergence exponentielle **avec des paramètres explicitement calculables** de l'entropie au temps t vers l'entropie d'équilibre:

$$0 \leq H(f(t)) - H(f_\infty) \leq Cst\, e^{-Cst\, t}.$$

Méthode d'entropie-dissipation d'entropie

La méthode permet souvent de montrer que $f(t) \to f_\infty$ dans une certaine norme, avec une vitesse de convergence connue.

Exemple: Inégalité de Cziszár-Kullback-Pinsker lorsque

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \ln f(x)\, dx, \qquad f_\infty(x) = (2\pi)^{-N/2} \exp(-|x|^2/2),$$

(et avec la normalisation $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty(x)\, dx = 1$):

$$H(f) - H(f_\infty) \geq Cst\, ||f - f_\infty||^2_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Si on a démontré que

$$0 \leq H(f(t)) - H(f_\infty) \leq Cst\, e^{-Cst\, t},$$

on obtient la **convergence exponentielle vers l'équilibre**:

$$||f(t) - f_\infty||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq Cst\, e^{-Cst\, t}.$$

La méthode fait l'objet de beaucoup de variantes, par exemple,

$$D(f) \geq C(f)\,\Phi(H(f) - H(f_\infty)),$$

où

- Soit $t \mapsto C(f(t)) \geq C_0 > 0$ lorsque $t \mapsto f(t)$ est solution de l'équation
- Soit $t \mapsto C(f(t))$ décroît vers 0 "lentement" lorsque $t \mapsto f(t)$ est solution de l'équation: **Slowly growing a priori bounds**.

La convergence vers l'équilibre est alors parfois moins rapide qu'exponentielle (de même si Φ est surlinéaire).

Méthode d'entropie-dissipation d'entropie

Références sur les équations cinétiques à noyau:

1. Fokker-Planck : D. Bakry, M. Emery; G. Toscani
2. Landau avec Molécules Maxwelliennes : LD, C. Villani
3. Boltzmann (Cercignani's conjecture) : E. Carlen, M. Carvalho; G. Toscani, C. Villani; C. Villani
4. Coagulation-fragmentation continue : M. Aizenmann, T. Bak
5. Coagulation-fragmentation discrète : P.-E. Jabin, B. Niethammer

Opérateur de collision de Landau

Landau, 36: Pour $f := f(v) \geq 0$ densité de particules chargées de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$,

$$Q_\psi(f)(v) = \nabla \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \psi(|v-w|)\, \Pi(v-w) \Big(f(w)\, \nabla f(v) - f(v)\, \nabla f(w) \Big)\, dw \right\},$$

où l'aspect Coulombien du potentiel est lié à la forme de ψ:

$$\psi(|z|) = |z|^{-1},$$

et

$$\Pi_{ij}(z) := \delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}$$

est la i, j-ième composante de la projection orthogonale Π sur $z^\perp := \{y \; / \; y \cdot z = 0\}$.

Opérateurs de collision de Landau, autres potentiels

$$Q_\psi(f)(v) = \nabla \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \psi(|v-w|)\, \Pi(v-w) \left(f(w)\, \nabla f(v) - f(v)\, \nabla f(w) \right) dw \right\},$$

Potentiels durs: $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, $\gamma \in]0,1[$

Molécules Maxwelliennes: $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, $\gamma = 0$

Potentiels modérément mous: $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, $\gamma \in [-2,0[$

Potentiels très mous: $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, $\gamma \in]-4,-2[$ (inclut le **potentiel Coulombien** des particules chargées $\gamma = -3$)

Equation de Landau des plasmas

Spatialement homogène: $f := f(t,v) \geq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q_\psi(f(t,\cdot))(v).$$

Spatialement inhomogène: $f := f(t,x,v) \geq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = Q_\psi(f(t,x,\cdot))(v).$$

Spatialement inhomogène avec champs: $f := f(t,x,v) \geq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) + \nabla_v \cdot ([E(t,x) + v \times B(t,x)]\, f(t,x,v))$$

$$= Q_{z \mapsto |z|^{-1}}(f(t,x,\cdot))(v).$$

Formulation faible de l'opérateur de Landau

Pour $\varphi := \varphi(v)$ fonction test:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_\psi(f)(v)\,\varphi(v)\,dv$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\psi(|v-w|)\left(\frac{\nabla f(v)}{f(v)} - \frac{\nabla f(w)}{f(w)}\right)^T \Pi(v-w)$$

$$\Big(\nabla\varphi(v) - \nabla\varphi(w)\Big)\,dvdw,$$

Conséquence: conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_\psi(f,f)(v)\begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

Inégalité d'entropie (1ère partie du théorème H de Boltzmann)

Dissipation d'entropie: $(f := f(v))$

$$D_\psi(f) := -\int_{\mathbb{R}^3} Q_\psi(f,f)(v) \ln f(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, \psi(|v-w|)$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w) \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right) dvdw \geq 0.$$

Inégalité d'entropie (1ère partie du théorème H de Boltzmann)

Inégalité d'entropie (fonctionnelle de Lyapounov): $(f := f(t,v))$

$$\frac{d}{dt} H(f(t,\cdot)) = -D_\psi(f(t,\cdot)) \leq 0,$$

avec l'entropie:

$$H(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \ln f(v)\, dv.$$

Cas d'égalité dans l'inégalité d'entropie (2ème partie du théorème H de Boltzmann)

$$f(v) = \exp(a\,|v|^2 + b\cdot v + c) \quad \Rightarrow \quad Q_\psi(f,f) = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_\psi(f) = -\int_{\mathbb{R}^3} Q_\psi(f,f)(v)\ln f(v)\,dv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\,\psi(|v-w|)$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w)\,\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)\,dvdw = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w) \quad // \quad v-w$$

$$\Rightarrow f(v) = \exp(a\,|v|^2 + b\cdot v + c).$$

La fonctionnelle de Lyapounov est donc stricte (si $f, \psi > 0$).

2ème partie du théorème H de Boltzmann: preuve par intégration (2D)

On suppose que f est normalisée: $\int f(y)\, dy = 1$, $\int y\, f(y)\, dy = 0$. On multiplie

$$(x_1 - y_1)\, \left(\frac{\partial_2 f}{f}(x_1, x_2) - \frac{\partial_2 f}{f}(y_1, y_2) \right)$$

$$= (x_2 - y_2)\, \left(\frac{\partial_1 f}{f}(x_1, x_2) - \frac{\partial_1 f}{f}(y_1, y_2) \right)$$

par $y_1\, f(y_1, y_2)$ et on intègre (par rapport à y_1, y_2) :

$$-\left(\int y_1^2\, f(y)\, dy \right)\, \frac{\partial_2 f}{f}(x) = x_2 - \left(\int y_1\, y_2\, f(y)\, dy \right)\, \frac{\partial_1 f}{f}(x)$$

2ème partie du théorème H de Boltzmann: preuve par intégration

Par symétrie,

$$\left(\int y_1\, y_2\, f(y)\, dy \right) \frac{\partial_1 f}{f}(x) - \left(\int y_1^2\, f(y)\, dy \right) \frac{\partial_2 f}{f}(x) = x_2$$

$$-\left(\int y_2^2\, f(y)\, dy \right) \frac{\partial_1 f}{f}(x) + \left(\int y_1\, y_2\, f(y)\, dy \right) \frac{\partial_2 f}{f}(x) = x_1$$

2ème partie du théorème H de Boltzmann: preuve par intégration

Après utilisation des formules de Cramer

$$\frac{\partial_1 f}{f}(x_1, x_2) = \frac{Det\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \begin{bmatrix} x_2 & -y_1^2 \\ x_1 & y_1\, y_2 \end{bmatrix} dy\right)}{Det\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \begin{bmatrix} y_1\, y_2 & -y_1^2 \\ -y_2^2 & y_1\, y_2 \end{bmatrix} dy\right)}$$

On en déduit que

$$f(x) = \exp(Ax \cdot x + b \cdot x + c).$$

L'inégalité fonctionnelle recherchée

On souhaite connaître la vitesse de convergence de la solution $f(t)$ de l'équation de Landau (spatialement homogène) vers $f_\infty(v) = \exp(a\,|v|^2 + b \cdot v + c)$: c'est la **vitesse de convergence vers l'équilibre thermodynamique** du plasma.

Pour cela, la méthode d'entropie-dissipation d'entropie propose de chercher une inégalité fonctionnelle (pour toute $f \geq 0$ dans $L^1_2 \cap L \ln L$) du type

$$D_\psi(f) \geq Cst\,(H(f) - H(f_\infty)).$$

Un tel résultat est appelé **Conjecture de Cercignani**. La constante Cst peut en fait dépendre de $\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,dv$, $\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,v\,dv$, $\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,|v|^2\,dv$ et $H(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,\ln f(v)\,dv$.

Utilisation de l'inégalité de Sobolev logarithmique

Dorénavant, on normalise f de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,(1, v_i, |v|^2)\,dv = (1, 0, 3)$. On a alors

$$f_\infty(v) = (2\pi)^{-3/2}\,\exp(-|v|^2/2).$$

L'inégalité de Sobolev logarithmique (Gross, 1975, Toscani, 1994) peut s'écrire (pour $f \geq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} f(v)\,dv = 1$):

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(v) \left| \frac{\nabla f}{f}(v) + v \right|^2 dv \geq Cst \Big(H(f) - H(f_\infty) \Big),$$

où

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)\,\ln f(v)\,dv.$$

L'inégalité recherchée

On cherche donc à montrer que (pour f normalisée),

$$D_\psi(f) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, \psi(|v-w|)$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w) \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right) dvdw$$

$$\geq Cst \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left|\frac{\nabla f}{f}(v) + v\right|^2 dv,$$

où la constante Cst ne dépend que de l'entropie

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \ln f(v)\, dv$$

Inégalité d'entropie-dissipation d'entropie: équation de Landau avec molécules Maxwelliennes

Théorème (cf. LD-Villani 00): Lorsque $f \geq 0$ est normalisée, la conjecture de Cercignani est vraie pour l'équation de Landau avec molécules Maxwelliennes:

$$D_{z \mapsto |z|^2}(f) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, \psi(|v-w|)$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w) \right)^T \Pi(v-w) \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w) \right) dvdw$$

$$\geq Cst \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left| \frac{\nabla f}{f}(v) + v \right|^2 dv,$$

où la constante Cst ne dépend que de l'entropie

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \ln f(v)\, dv$$

Idée de la preuve

Première méthode: Calcul explicite (cf. Villani 98)

Lorsque f est normalisée,

$$Q_{z\mapsto|z|^2}(f,f)(v) = 3\,\nabla\cdot(\nabla f + v\,f) - (P:\nabla^2 f + \nabla\cdot(v\,f)) + \Delta_{\theta\,\phi} f$$

où P est la matrice de composantes

$$P_{ij} := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,v_i\,v_j\,dv.,$$

Idée de la preuve

Seconde méthode: On écrit

$$D_{|\cdot|^2}(f) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1,..,3} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, \left|q_{ij}^f(v,w)\right|^2 \, dvdw,$$

où

$$q_{ij}^f(v,w) = (v_i - w_i) \left(\frac{\partial_j f}{f}(v) - \frac{\partial_j f}{f}(w) \right) - (v_j - w_j) \left(\frac{\partial_i f}{f}(v) - \frac{\partial_i f}{f}(w) \right),$$

et on cherche un lien entre cette quantité et

$$\sum_{i=1,..,3} \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left| \frac{\partial_i f}{f}(v) + v_i \right|^2 dv.$$

Idée de la preuve

$$D_{|\cdot|^2}(f) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1,..,3} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, \left|q_{ij}^f(v,w)\right|^2 \, dvdw,$$

$$q_{ij}^f(v,w) = (v_i - w_i)\left(\frac{\partial_j f}{f}(v) - \frac{\partial_j f}{f}(w)\right) - (v_j - w_j)\left(\frac{\partial_i f}{f}(v) - \frac{\partial_i f}{f}(w)\right).$$

Alors pour $i \neq j$

$$\frac{\partial_i f(v)}{f(v)} = \frac{Det\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(w) \begin{bmatrix} 1 & q_{ij}^f(v,w) & w_i \\ w_i & q_{ij}^f(v,w)\, w_i + (v_j - w_j) & w_i^2 \\ w_j & q_{ij}^f(v,w)\, w_j - (v_i - w_i) & w_i\, w_j \end{bmatrix} dw\right)}{Det\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(w) \begin{bmatrix} 1 & w_j & w_i \\ w_i & w_j\, w_i & w_i^2 \\ w_j & w_j^2 & w_i\, w_j \end{bmatrix} dw\right)}$$

Remarque

La quantité

$$Det^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(w)\begin{bmatrix} 1 & w_j & w_i \\ w_i & w_j\,w_i & w_i^2 \\ w_j & w_j^2 & w_i\,w_j \end{bmatrix} dw\right)$$

est contrôlée par la non-concentration de f, elle-même contrôlée par

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,\ln f(v)\,dv.$$

Comportement en temps grand pour l'équation de Landau avec potentiel Coulombien

Théorème: K. Carrapatosso, LD, L. He 15 Soit
$f_{in} \in L^1(e^{\kappa\,|v|^{1/2}}) \cap L \ln L(\mathbb{R}^3)$, avec $\kappa \in]0, 1/(2e)[$.
Alors il existe une solution (faible globale) $t \mapsto f(t)$ à l'équation de Landau spatialement homogène avec potentiel Coulombien (et donnée initiale $f_{in} \geq 0$) telle que, pour tout $q < -\frac{10}{7}$,

$$\forall\, t \geq 0, \qquad ||f(t,\cdot) - f_\infty||_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq Cst\, e^{-(1+t)^{\frac{1}{7}}\ \log(1+t)^q},$$

où Cst est une constante dépendant de q, de la masse initiale, de l'énergie initiale, de l'entropie initiale, et de $||f_{in}||_{L^1(e^{\kappa\,|v|^{1/2}})}$.

Avancées récentes sur le sujet

- Convergence exponentielle vers l'équilibre de l'équation de Boltzmann avec cutoff angulaire et potentiels durs C. Mouhot 06
- Convergence exponentielle vers l'équilibre de l'équation de Landau avec potentiels (très) modérément mous K. Carrapatosso 13/15
- Convergence exponentielle vers l'équilibre de l'équation de Boltzmann sans cutoff angulaire et potentiels durs I. Tristani 14

Basé sur des estimations de trous spectraux dans des espaces élargis M.-P. Gualdani, S. Mischler, C. Mouhot 13

Inégalité dans le cas Coulombien entre la dissipation d'entropie et une information de Fisher relative à poids

Proposition: K. Carrapatosso, LD, L. He 15 On peut trouver une constante Cst dépendant seulement de $H(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \ln f(v)\, dv$ telle que l'inégalité suivante est vérifiée:

$$D_{z\mapsto|z|^{-1}}(f) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, |v-w|^{-1}$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w) \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right) dvdw$$

$$\geq \frac{Cst}{\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,|v|^7\, dv} \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left|\frac{\nabla f(v)}{f(v)} + v\right|^2 (1+|v|^2)^{-3/2}\, dv.$$

Utilisation de l'inégalité de Sobolev logarithmique

Conséquence de l'inégalité de Sobolev logarithmique de Bakry, Emery 84:
Pour $f \geq 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_\infty(v)\,dv,$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left| \frac{\nabla f(v)}{f(v)} + v \right|^2 (1+|v|^2)^{-3/2}\,dv$$

$$\geq Cst \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ f(v)\,\ln\left(\frac{Z_1}{Z_2(f)}\,\frac{f}{f_\infty}(v) \right) + \frac{Z_2(f)}{Z_1}\,f_\infty(v) - f(v) \right\} (1+|v|^2)^{-3/2}\,dv,$$

avec

$$Z_1 := \int_{\mathbb{R}^3} f_\infty(v)\,(1+|v|^2)^{-3/2}\,dv, \qquad Z_2(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,(1+|v|^2)^{-3/2}\,dv,$$

et

$$f_\infty(v) = (2\pi)^{-3/2}\,\exp(-|v|^2/2).$$

Conjecture de Cercignani (faible) dans le cas de l'opérateur de Landau avec potentiel Coulombien

$$D_{z\mapsto|z|^{-1}}(f) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, |v-w|^{-1}$$

$$\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w)\, \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)\, dvdw$$

$$\geq \frac{Cst}{\int_{\mathbb{R}^3} f(v)\, |v|^7\, dv} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ f \ln\left(\frac{Z_1}{Z_2(f)}\, \frac{f}{f_\infty}\right) + \frac{Z_2(f)}{Z_1}\, f_\infty - f \right\} (1+|v|^2)^{-3/2}\, dv$$

avec

$$Z_1 := \int_{\mathbb{R}^3} f_\infty(v)\, (1+|v|^2)^{-3/2}\, dv, \qquad Z_2(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\, (1+|v|^2)^{-3/2}\, dv,$$

et

$$f_\infty(v) = (2\pi)^{-3/2}\, \exp(-|v|^2/2).$$

Les moments de type puissance sont propagés

Moments de type puissance:

$$M_\ell(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,(1+|v|^2)^{\ell/2}\,dv.$$

Proposition: K. Carrapatosso, L. He 15 On suppose que $f_{in} := f_{in}(v) \geq 0$ appartient à $L^1_\ell \cap L \ln L(\mathbb{R}^3)$, $\ell \geq 2$, et que f est une solution faible de l'équation de Landau (avec donnée initiale f_{in}) spatialement homogène dans le cas Coulombien.

Alors

$$\forall t \geq 0, \qquad M_\ell(f(t)) \leq Cst\,(1+t).$$

On doit donc utiliser la méthode d'entropie-dissipation d'entropie avec "slowly growing a priori bounds".

Les moments de type exponentiel sont propagagés

Moments de type exponentiel:

$$M_{s,\kappa}(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\, \exp(\kappa\, |v|^s)\, dv.$$

Proposition: K. Carrapatosso, L. He 15 On suppose que $f_{in} := f_{in}(v) \geq 0$ appartient à $L^1(e^{\kappa\,|v|^s})$ avec $\kappa > 0$ et $s \in]0, 1/2[$ ou $\kappa \in]0, 1/(2e)[$ et $s = 1/2$, et à $L\ \ln L(\mathbb{R}^3)$. On suppose que f est une solution faible de l'équation de Landau (avec donnée initiale f_{in}) spatialement homogène dans le cas Coulombien.

Alors

$$\forall t \geq 0, \qquad M_{s,\kappa}(f(t)) \leq Cst\,(1+t).$$

Autres ingrédients

Interpolations: Pour tout $\kappa_1 > \kappa$ et $\kappa_2 > 3/2\,\kappa$, on a

$$\int e^{\kappa |v|^s} f(v) \ln f(v)\, dv \leq Cst \left(M_{s,\kappa_1}(f) + M_{s,\kappa_2}(f)^{\frac{2}{3}} \, \|f\|_{L^3_{-3}} + 1 \right)$$

$$\leq Cst \left(M_{s,\kappa_1}(f) + M_{s,\kappa_2}(f)^{\frac{2}{3}} \, D_{z \mapsto |z|^{-1}}(f) + 1 \right).$$

Variante adaptée du lemme de Gronwall: On utilise une inégalité du type

$$-x'(t) \geq C\,(1+t)^{-a}\, x(t) - C\, \exp(-C t^b).$$