Équations intégrales pour la diffraction des ondes par une réunion d'objets Lipschitziens

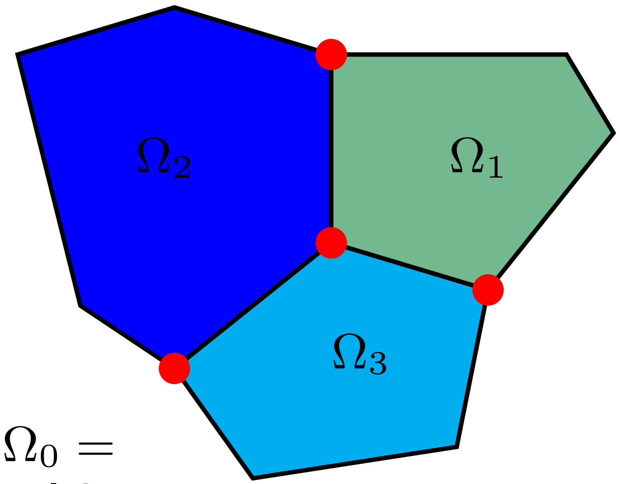
Séminaire du Laboratoire Jacques-Louis Lions

X.Claeys, LJLL, Paris 6,

avec R.Hiptmair & E.Spindler, SAM, ETH Zürich.

Seminar for Applied Mathematics SAM

Diffraction multi sous-domaines



$\Omega_0 =$
extérieur

Géométrie

$\Omega_j =$ ouvert Lipschitz

avec $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ si $j \neq k$

et Ω_j borné si $j \neq 0$,

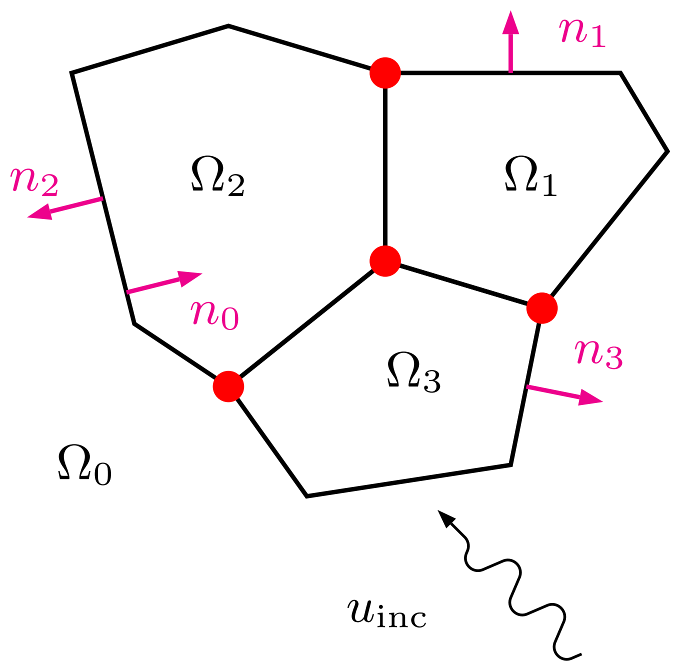
$\mathbb{R}^d = \cup_{j=0}^{n} \overline{\Omega}_j$,

$\Gamma = \cup_{j=0}^{n} \partial\Omega_j$ (squelette).

Important: différent du cas d'objets homogènes isolés

- 3 sous-domaines (ou plus) peuvent être adjacents,
- le squelette Γ n'est pas à priori une surface orientable.

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j,

$n_j =$ normale à $\partial\Omega_j$,

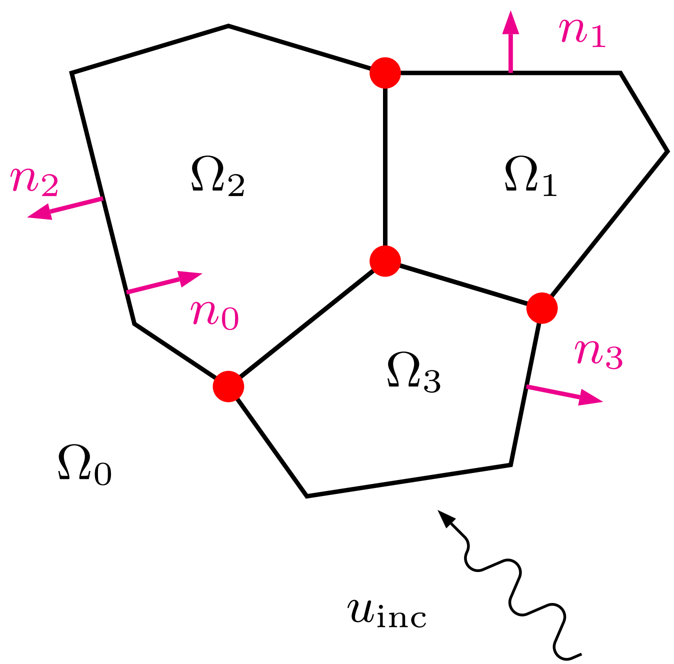
dirigée vers l'extérieur de Ω_j.

Problème de transmission (bien posé):

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j,\ j = 0, \dots n \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \mu_j^{-1}\partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \mu_k^{-1}\partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k. \end{array}\right.$$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j,

$n_j =$ normale à $\partial\Omega_j$,

dirigée vers l'extérieur de Ω_j.

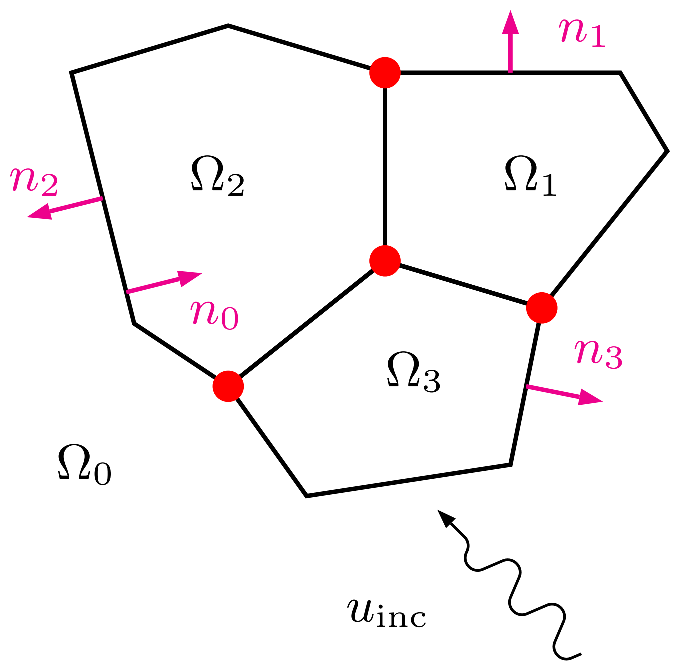
Problème de transmission (bien posé):

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\rm loc}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j,\ j = 0, \dots n \\ u - u_{\rm inc} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \boxed{\mu_j^{-1}} \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \boxed{\mu_k^{-1}} \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k. \end{cases}$$

Dans cet exposé
on suppose
$\mu_0 = \cdots = \mu_n = 1$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j,

$n_j =$ normale à $\partial\Omega_j$,

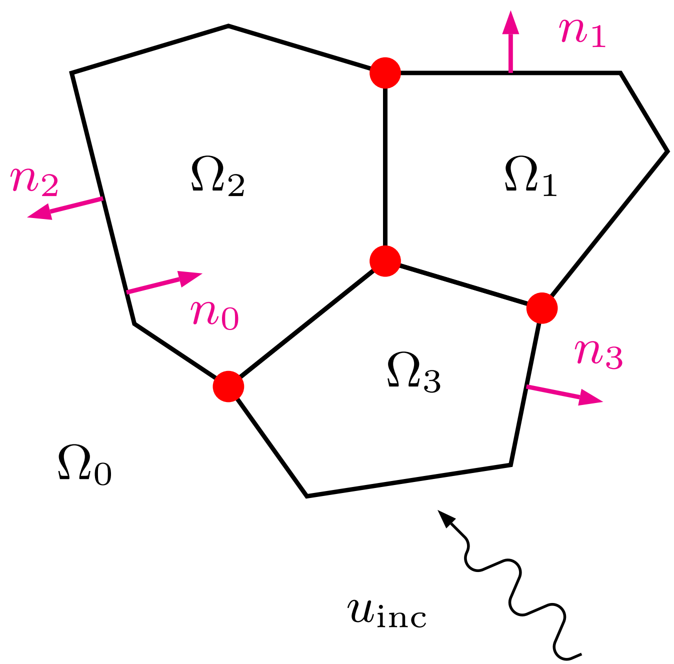
dirigée vers l'extérieur de Ω_j.

Problème de transmission (bien posé):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j,\ j = 0, \ldots n \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j,

$n_j =$ normale à $\partial\Omega_j$,

dirigée vers l'extérieur de Ω_j.

Problème de transmission (bien posé):

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j, \; j = 0, \dots n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k. \end{cases}$$

THALES

On veut reformuler ce problème comme une équation intégrale posée sur Γ, puis résoudre par éléments finis de bord (BEM).

Difficultés liées au conditionnement

Problème: Élements finis de bord = mal conditionné

Les éléments finis de bord mènent à un système linéaire plein. Or dans un contexte industriel le recours à une méthode de résolution itérative devient souvent obligatoire.

Malheureusement, le conditionnement des matrices obtenues par éléments finis de bord se dégrade en $1/(\text{pas du maillage})$ en général, ce qui rend alors les solveurs itératifs inopérant.

Première approche: équation de 2nd espèce

Cependant dans le cas particulier où l'opérateur intégral A associé à la formulation est de 2nd espèce i.e. de la forme

$$\mathrm{A} = \mathrm{Id} + \text{opérateur compact}$$

le conditionnement de la matrice est indépendant du pas du maillage à condition d'utiliser un procédé de discrétisation pour lequel les matrices de masse satisfont une condition inf-sup uniforme.

Difficultés liées au conditionnement

Approche alternative: équation de 1ère espèce préconditionnée

Dans le cas général, un remède au mauvais conditionnement consiste à préconditionner. Mais le choix d'un préconditionneur n'est pas facile...

Dans le cas d'objets diffractants isolés et homogènes, le préconditionneur de Calderón est une technique de préconditionnement devenue très populaire parce que facile à implémenter, et adaptée à une large gamme de fréquences. Elle stabilise le conditionnement vis-à-vis du pas du maillage.

[Steinbach & Wendland, 1998], [Christiansen & Nédélec, 2000], [Antoine & Boubendir, 2008], [Cools, Andriulli & Olyslager, 2009],...

Idée générale: l'opérateur intégral de 1ère espèce A associé au problème de diffraction satisfait

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \;\simeq\; \mathrm{Id} + \text{compact} \qquad \big(\text{cf formule de Calderón}\big)$$

Comme $\mathrm{Id} + \text{compact} =$"plus facile à résoudre avec un solveur itératif" (en général...), cela suggère A comme préconditionneur pour lui-même.

Objectif et littérature

On souhaite dériver des formulations intégrales menant à un système bien conditionné ou facile à préconditionner.

On pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés), mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces. Or le squelette Γ n'est pas orientable.

Déjà existant:

- **Rumsey principle/PMCHWT = "single trace formulation"**

- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], . . .

Objectif et littérature

On souhaite dériver des formulations intégrales menant à un système bien conditionné ou facile à préconditionner.

On pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés), mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces. Or le squelette Γ n'est pas orientable.

Déjà existant:

☹ Pas de préconditionneur robuste

- **Rumsey principle/PMCHWT = "single trace formulation"**

- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], . . .

Objectif et littérature

On souhaite dériver des formulations intégrales menant à un système bien conditionné ou facile à préconditionner.

On pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés), mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces. Or le squelette Γ n'est pas orientable.

Déjà existant:

☹ Pas de préconditionneur robuste

- **Rumsey principle/PMCHWT = "single trace formulation"**
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], . . .

- **Récemment: local multi-trace formulation [Jerez & Hiptmair, 2011]**
Possibilité de préconditionner par Calderón.

- **Dans cet exposé:**
Une autre formulation de 1ère espèce préconditionnable par Calderón, et une nouvelle formulation de 2ème espèce (bien conditionnée).

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

1. Présentation
2. Résultats numériques

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. **Présentation sur un problème simple**
2. **Principe de Rumsey**
3. **Cas général**
4. **Résultats numériques**

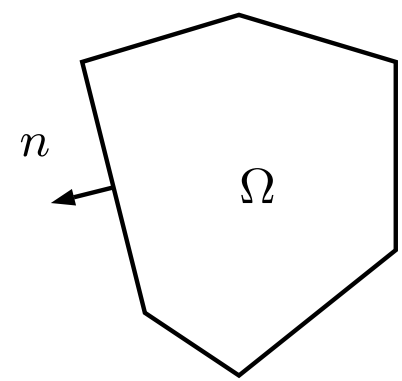
III. Formulation de 2ème espèce

1. **Présentation**
2. **Résultats numériques**

Notations pour les traces

$\Omega =$ ouvert Lipschitz

$\mathbb{H}(\partial\Omega) := \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.



Opérateurs de trace

$$\gamma(v) := \begin{bmatrix} v|_{\partial\Omega}^{\mathrm{int}} \\ \partial_n v|_{\partial\Omega}^{\mathrm{int}} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{\boldsymbol{c}}(v) := \begin{bmatrix} v|_{\partial\Omega}^{\mathrm{ext}} \\ \partial_n v|_{\partial\Omega}^{\mathrm{ext}} \end{bmatrix},$$

$$\{\gamma\} := \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_c) \qquad \text{et} \qquad [\gamma] := \gamma - \gamma_c\ .$$

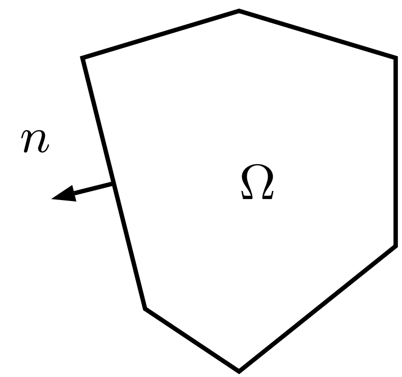
Théorème de représentation

Opérateur au potentiel

$\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}) := \exp(i\kappa|\mathbf{x}|)/(4\pi|\mathbf{x}|)$ = noyau de Green sortant pour l'éq. de Helmholtz

$$\mathrm{G}_\kappa\Big(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\Big)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$$

Remarque
$\mathrm{G}_\kappa(V)(\mathbf{x})$ est solution de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, quel que soit $V = (v, q)$.



Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\,\gamma(u)\,\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$\gamma(v) \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longrightarrow \quad v = \mathrm{G}_\kappa(\gamma(v)) \quad \text{dans } \Omega.$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans $\Omega\ \ (+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$\gamma(v) \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \gamma(v) = \gamma\cdot\mathrm{G}_\kappa(\gamma(v))$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longrightarrow \quad V = \gamma{\cdot}\mathrm{G}_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $(2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ avec $\mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $\ (+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \boxed{\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)}$$

$\gamma = \{\gamma\} + \frac{1}{2}[\gamma]$

Formule des sauts: $\quad [\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $\quad (2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id} \quad$ avec $\quad \mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

$$\{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa(V) + \tfrac{1}{2}[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \boxed{\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)} \qquad \gamma = \{\gamma\} + \tfrac{1}{2}[\gamma]$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $(2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ avec $\mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

$$\{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa(V) + \tfrac{1}{2}[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \boxed{\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa(V)}$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $(2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ avec $\mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

$(\mathrm{A}_\kappa + \mathrm{Id}/2)V$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $\ (+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad V = (\mathrm{A}_\kappa + \mathrm{Id}/2)V$$

Formule des sauts: $\quad [\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $\ (2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ $\quad$ avec $\quad \mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \iff \quad 0 = (\mathrm{A}_\kappa - \mathrm{Id}/2)V$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $(2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ avec $\mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω:

$\mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{\ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω $(+u$ sortant si Ω non-borné$)\ \}$.

Caractérisation des données de Cauchy (forme classique)
L'opérateur $\gamma \cdot \mathrm{G}_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \to \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω. On a

$$V \in \mathscr{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = (\mathrm{A}_\kappa - \mathrm{Id}/2)V$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot \mathrm{G}_\kappa = \mathrm{Id}$,

Identité de Calderón: $(2\,\mathrm{A}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$ avec $\mathrm{A}_\kappa = \{\gamma\} \cdot \mathrm{G}_\kappa$.

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

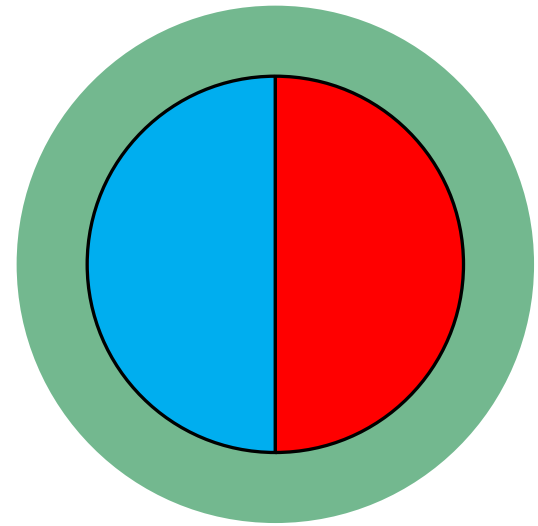
II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

1. Présentation
2. Résultats numériques

L’idée du gap

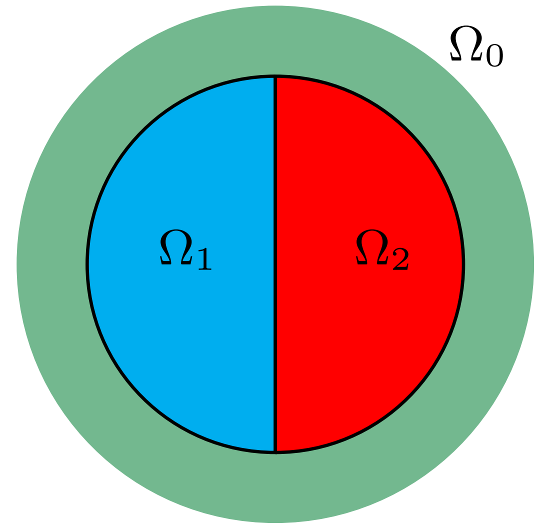


L'idée du gap

$\mathbb{H}(\partial\Omega_j) = \mathrm{H}^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j)$

$\gamma^j =$ trace intérieure à $\partial\Omega_j$

$\mathrm{G}^j_{\kappa_j}, \mathrm{A}^j_{\kappa_j} =$ operateurs associatés à Ω_j



Pour se forger une intuition, J-C. Nédélec a proposé de perturber le problème en introduisant un petit gap de matériau Ω_0 séparant les deux sous-domaines.

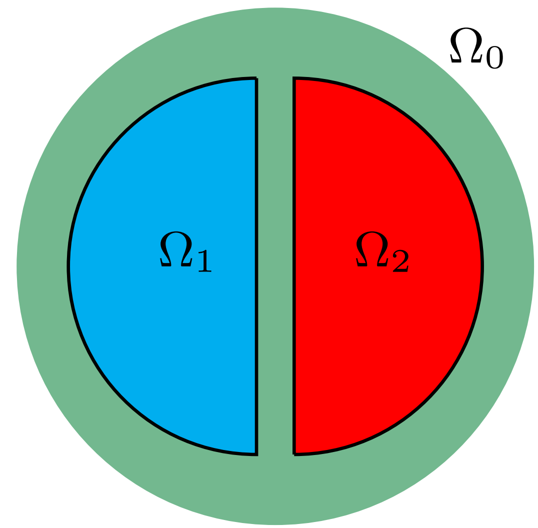
Dans la géométrie perturbée, toutes les interfaces redeviennent orientables, et les techniques usuelles redeviennent applicables.

L'idée du gap

$\mathbb{H}(\partial\Omega_j) = \mathrm{H}^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j)$

γ^j = trace intérieure à $\partial\Omega_j$

$\mathrm{G}^j_{\kappa_j}, \mathrm{A}^j_{\kappa_j}$ = operateurs associatés à Ω_j



Pour se forger une intuition, J-C. Nédélec a proposé de perturber le problème en introduisant un petit gap de matériau Ω_0 séparant les deux sous-domaines.

Dans la géométrie perturbée, toutes les interfaces redeviennent orientables, et les techniques usuelles redeviennent applicables.

L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 0, 1, 2$ tel que

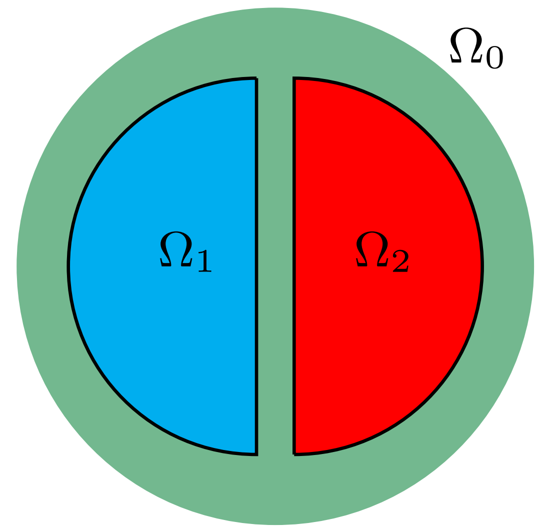
$U_1 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_1}$

$U_2 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_2}$ où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$

$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$

$(\mathrm{A}^0_{\kappa_0} - \mathrm{Id}/2)U_0 = \gamma^0(u_{\mathrm{inc}})$



L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 0, 1, 2$ tel que

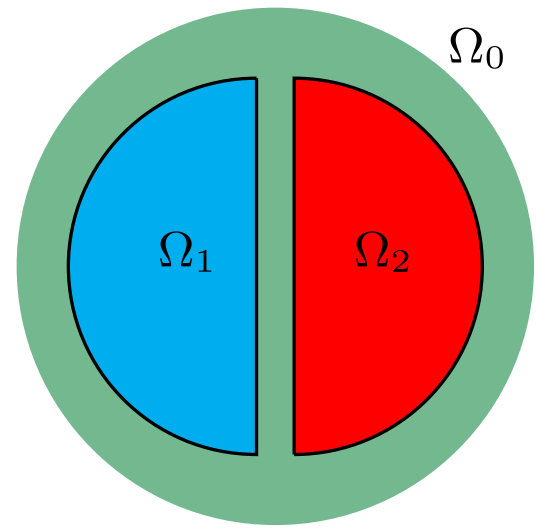
$U_1 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_1}$

$U_2 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_2}$ où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$

$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$

$(\mathrm{A}^0_{\kappa_0} - \mathrm{Id}/2)U_0 = \gamma^0(u_{\mathrm{inc}})$



conditions de transmission

$u|^1_{\partial\Omega_1} = u|^0_{\partial\Omega_1}$

$\partial_{n_1} u|^1_{\partial\Omega_1} = -\partial_{n_0} u|^0_{\partial\Omega_1}$

$u|^2_{\partial\Omega_2} = u|^0_{\partial\Omega_2}$

$\partial_{n_2} u|^2_{\partial\Omega_2} = -\partial_{n_0} u|_{\partial\Omega^0_2}$

caractérization des données de Cauchy

$\Delta u + \kappa_j^2 u = 0$ dans $\Omega_j, \forall j$

$u - u_{\mathrm{inc}}$ sortant

L'idée du gap

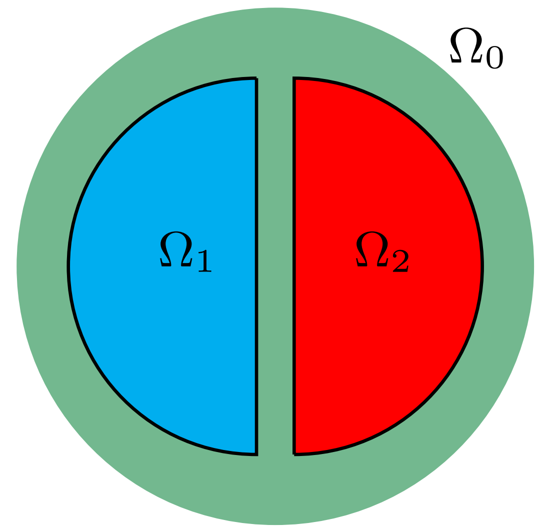
Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 0, 1, 2$ tel que

$$U_1 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_1}$$
$$U_2 = Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_2} \quad \text{où } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$$

$$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$$

$$(\mathrm{A}^0_{\kappa_0} - \mathrm{Id}/2)U_0 = \gamma^0(u_{\mathrm{inc}})$$

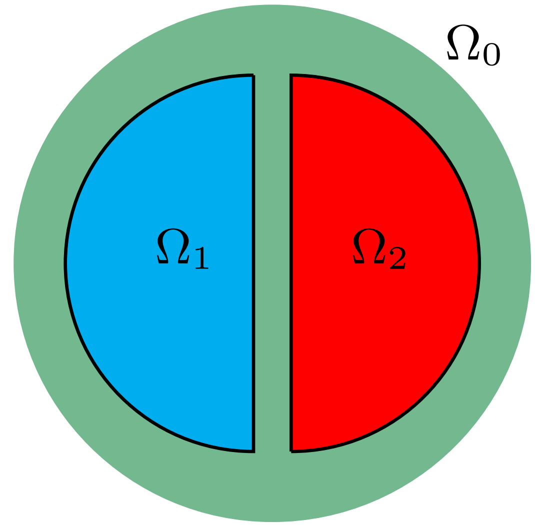


L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 0, 1, 2$ tel que

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_1} \\ U_2 &= Q \cdot U_0|_{\partial\Omega_2} \end{aligned}}$$

où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



$$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$$

$$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$$

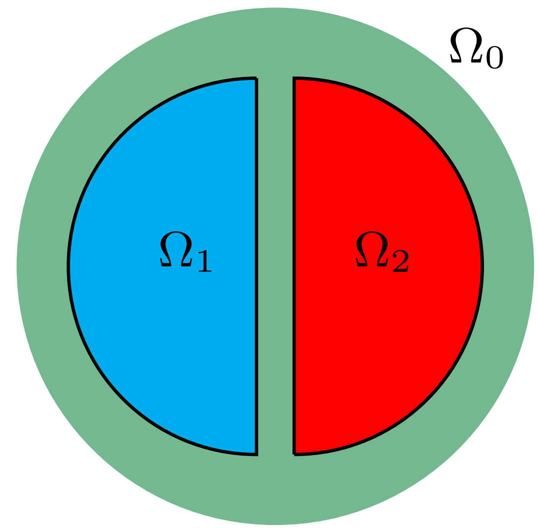
$$(\mathrm{A}^0_{\kappa_0} - \mathrm{Id}/2)U_0 = \gamma^0(u_{\mathrm{inc}})$$

En injectant les 2 conditions de transmission dans la 3eme identité de Calderón, on obtient les équations suivantes:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix}$$

L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que



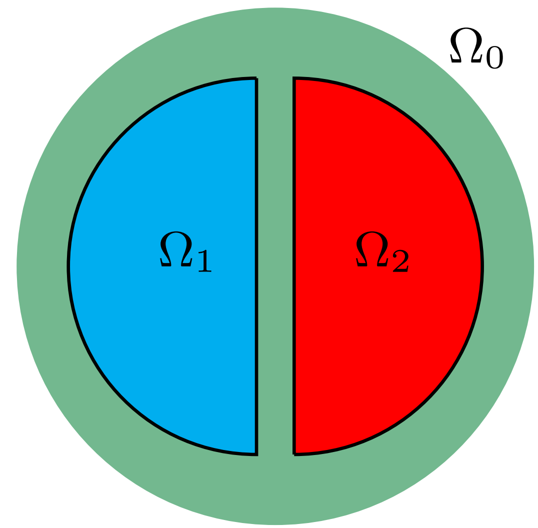
$$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$$

$$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix}$$

L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que



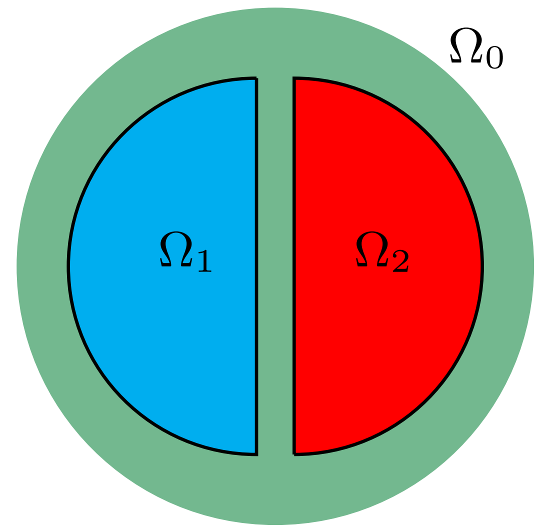
$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$ (1)

$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$ (2)

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que



$(\mathrm{A}^2_{\kappa_2} - \mathrm{Id}/2)U_2 = 0$ (1)

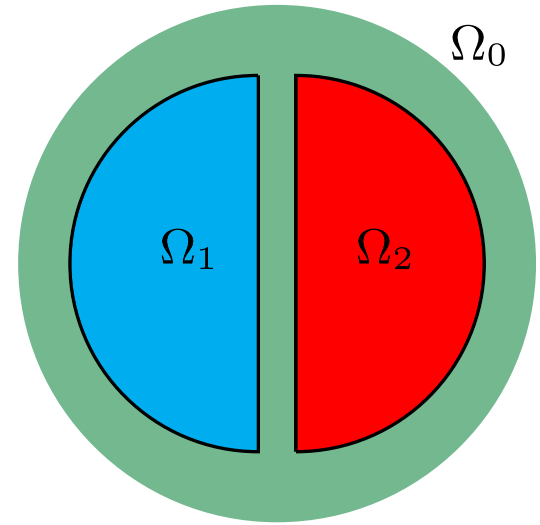
$(\mathrm{A}^1_{\kappa_1} - \mathrm{Id}/2)U_1 = 0$ (2)

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_0} + \mathrm{Id}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix} \begin{array}{c} (3) \\ (4) \end{array}$$

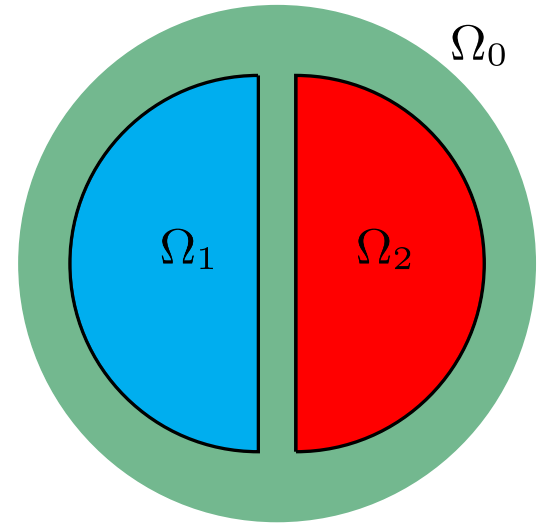
L'idée du gap

Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_1} + \mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_2} + \mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix}$$



L'idée du gap



Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_1} + \mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_2} + \mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix}$$

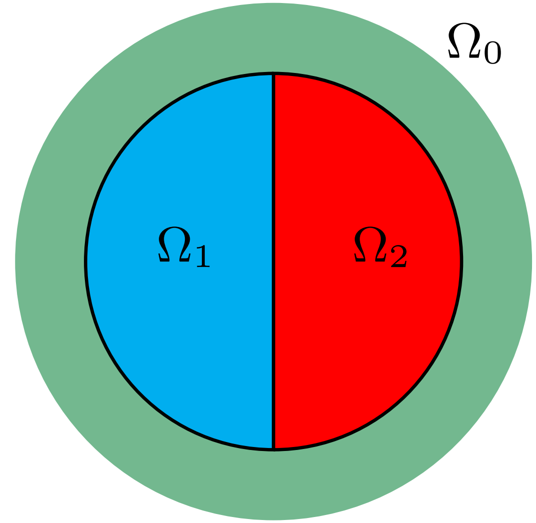
Observation 1
Le jeu de traces U_0 n'intervient plus, et U_1, U_2 sont indépendants l'un de l'autre (les conditions de transmission n'apparaissent pas explicitement).

Observation 2
Cette formulation satisfait une inégalité de Garding, et une identité de Calderón généralisée quand $\kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2$

$$\begin{bmatrix} 2\,\mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & 2\,\mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & 2\,\mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

Observation 3
Si on enlève le gap, cette formulation garde un sens (tous les opérateurs sont bien définis). Cependant la dérivation présentée n'est plus valable.

L'idée du gap



Trouver $U_j = \gamma^j(u) \in \mathbb{H}(\partial\Omega_j), j = 1, 2$ tel que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_1} + \mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_2} + \mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^1(u_{\mathrm{inc}}) \\ \gamma^2(u_{\mathrm{inc}}) \end{bmatrix}$$

Observation 1
Le jeu de traces U_0 n'intervient plus, et U_1, U_2 sont indépendants l'un de l'autre (les conditions de transmission n'apparaissent pas explicitement).

Observation 2
Cette formulation satisfait une inégalité de Garding, et une identité de Calderón généralisée quand $\kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2$

$$\begin{bmatrix} 2\,\mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & 2\,\mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & 2\,\mathrm{A}^2_{\kappa_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

Observation 3
Si on enlève le gap, cette formulation garde un sens (tous les opérateurs sont bien définis). Cependant la dérivation présentée n'est plus valable.

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

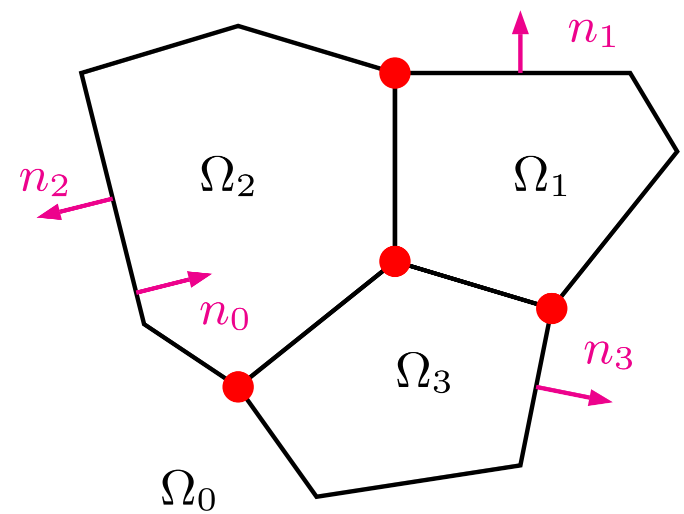
1. Présentation
2. Résultats numériques

Retour au problème général…

Problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j,\ j = 0, \ldots n \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0, \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k. \end{cases}$$



Notations

$$\gamma^j = \begin{bmatrix} \gamma^j_{\mathsf{D}} \\ \gamma^j_{\mathsf{N}} \end{bmatrix}$$ = traces Dirichlet ou Neumann sur $\partial\Omega_j$

n_j = normale à $\partial\Omega_j$.

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\partial\Omega_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\partial\Omega_n)$ avec $\mathbb{H}(\partial\Omega_j) = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j)$.

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\boldsymbol{\Gamma})$:

$$\mathrm{B}(U,V) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{B}_j\Big(\begin{bmatrix} u_j \\ p_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_j \\ q_j \end{bmatrix} \Big) = \sum_{j=0}^{n} \int_{\partial\Omega_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\partial\Omega_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\partial\Omega_n)$ avec $\mathbb{H}(\partial\Omega_j) = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j)$.

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\Gamma)$:

$$\mathrm{B}(U,V) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{B}_j\left(\begin{bmatrix} u_j \\ p_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_j \\ q_j \end{bmatrix} \right) = \sum_{j=0}^{n} \int_{\partial\Omega_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace simple-trace :

$\mathbb{X}(\Gamma) = \mathrm{adh}\Big(\big\{ (\gamma^j(v))_{j=0\dots n} \;\big|\; v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d),\ \Delta v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \big\} \Big)$ pour $\|\ \|_{\mathbb{H}(\Gamma)}$

$\mathbb{X}(\Gamma) =$ éléments de $\mathbb{H}(\Gamma)$ satisfaisant les conditions de transmission.

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\partial\Omega_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\partial\Omega_n)$ avec $\mathbb{H}(\partial\Omega_j) = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j)$.

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\Gamma)$:

$$\mathrm{B}(U,V) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{B}_j\Big(\begin{bmatrix} u_j \\ p_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_j \\ q_j \end{bmatrix} \Big) = \sum_{j=0}^{n} \int_{\partial\Omega_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace simple-trace :

$\mathbb{X}(\Gamma) = \mathrm{adh}\Big(\big\{ \, (\gamma^j(v))_{j=0\dots n} \;\big|\; v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d), \; \Delta v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \, \big\} \Big)$ pour $\| \;\; \|_{\mathbb{H}(\Gamma)}$

$\mathbb{X}(\Gamma) =$ éléments de $\mathbb{H}(\Gamma)$ satisfaisant les conditions de transmission.

Lemme:
Pour $U \in \mathbb{H}(\Gamma)$, on a : $\quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff \mathrm{B}(U,V) = 0 \; \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma)$.

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j, \ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array}\right.} \iff U = (U_j) := \big(\gamma^j(u)\big)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{X}(\Gamma)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j, \ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j,k \end{array}\right. \iff U = (U_j) := \big(\gamma^j(u)\big)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{X}(\Gamma)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j,\ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right. \iff \big(-\mathrm{Id}/2 + \mathrm{A}^j_{\kappa_j}\big)\big(U_j - U_j^{\mathrm{inc}}\big) = 0,\ \forall j$$

avec $U_j^{\mathrm{inc}} = \gamma^j(u_{\mathrm{inc}})$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) & & \\ \quad (-\mathrm{Id}/2 + \mathbf{A}_\kappa)U & = & F \end{array}\right.$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ \mathrm{B}\big((-\mathrm{Id}/2 + \mathbf{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V) \quad \forall V \in \mathbb{H}(\Gamma) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ \mathrm{B}\big((-\mathrm{Id}/2 + \mathbf{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V) \quad \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

[VonPetersdorff, 1989]

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ -\frac{1}{2}\mathrm{B}(U,V) + \mathrm{B}(\mathbf{A}_\kappa U, V) = \mathrm{B}(F,V) \quad \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ -\frac{1}{2}\mathrm{B}(U,V) + \mathrm{B}(\mathbf{A}_\kappa U, V) = \mathrm{B}(F,V) \quad \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ -\frac{1}{2}\cancel{\mathrm{B}(U,V)} + \mathrm{B}(\mathbf{A}_\kappa U, V) = \mathrm{B}(F,V) \quad \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma)\end{array}\right.$$

Car $\mathbb{X}(\Gamma)$ est son propre polaire.

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ \mathrm{B}(\mathbf{A}_\kappa U, V) = \mathrm{B}(F, V) \quad \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Principe de Rumsey/PMCHWT

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; U \in \mathbb{X}(\Gamma) \\ \mathrm{B}(\mathbf{A}_\kappa U, V) = \mathrm{B}(F, V) \quad \forall V \in \; \mathbb{X}(\Gamma) \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^0_{\kappa_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^1_{\kappa_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons notre nouvelle formulation de 1ère espèce comme une version modifiée du principe de Rumsey en éliminant les contributions associées à Ω_0.

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

1. Présentation
2. Résultats numériques

Formulation multi-trace globale

Théorème
$U = (U_0, \widehat{U}) \in \mathbb{X}(\Gamma)$ est solution du principe de Rumsey si et seulement si $\widehat{U} \in \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma)$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{U} \in \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\[1em] \widehat{\mathrm{B}}(\widehat{\mathrm{A}}_\kappa \widehat{U}, \widehat{V}) = \widehat{B}(\widehat{F}, \widehat{V}) \qquad \forall \widehat{V} \in \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma). \end{array}\right.$$

avec

$$\widehat{\mathbb{H}}(\Gamma) = \left[\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathbf{1}}) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathbf{1}})\right] \times \cdots \times \left[\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_n) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_n)\right]$$

$$\widehat{\mathrm{B}}(\widehat{U}, \widehat{V}) = \textstyle\sum_{j=\mathbf{1}}^{n} \mathrm{B}_j(U_j, V_j)$$

et

$$\widehat{\mathrm{A}}_\kappa \widehat{U} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^1_{\kappa_1} + \mathrm{A}^1_{\kappa_0} & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^1 \cdot \mathrm{G}^n_{\kappa_0} \\ \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \mathrm{A}^2_{\kappa_2} + \mathrm{A}^2_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^2 \cdot \mathrm{G}^n_{\kappa_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^n \cdot \mathrm{G}^1_{\kappa_0} & \gamma^n \cdot \mathrm{G}^2_{\kappa_0} & \cdots & \mathrm{A}^n_{\kappa_n} + \mathrm{A}^n_{\kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Trois résultats clés

Rappelons que:

$$\mathrm{G}^j_{\kappa_0}\left(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\right)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega_j} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\big(\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)\,d\sigma(\mathbf{y})$$

Proposition

$\sum_{j=0}^{n} \mathrm{G}^j_{\kappa_0}(U_j)(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \ \forall U = (U_0,\dots,U_n)\in\mathbb{X}(\Gamma).$

Théorème

$\mathbb{H}(\Gamma) = \mathbb{X}(\Gamma)\oplus\mathscr{C}_\kappa(\Gamma)$ où $\mathscr{C}_\kappa(\Gamma) = \mathscr{C}_{\kappa_0}(\partial\Omega_0)\times\cdots\times\mathscr{C}_{\kappa_n}(\partial\Omega_n).$

Proposition

Pour $U\in\mathbb{H}(\Gamma)$ on a: $U\in\mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \iff \mathrm{B}(U,V) = 0 \quad \forall V\in\mathscr{C}_\kappa(\Gamma).$

Propriétés remarquables

Notation:
$$\Theta\Big(\begin{pmatrix} u_j \\ p_j \end{pmatrix}_{1\le j\le n}\Big) = \begin{pmatrix} -\overline{u}_j \\ \overline{p}_j \end{pmatrix}_{1\le j\le n}$$

Inégalité de Gårding généralisée

Pour tout $\kappa_0, \dots, \kappa_n \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur $\widehat{\mathrm{A}}_\kappa : \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma) \to \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma)$ est un isomorphisme et $\exists\, C > 0$ et $\exists\, \mathrm{K} : \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma) \to \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma)$ compact tel que

$$\Re e\Big\{\, \widehat{\mathrm{B}}\big(\,(\widehat{\mathrm{A}}_\kappa + \mathrm{K})\widehat{U}, \Theta(\widehat{U})\,\big)\,\Big\} \;\geq\; C\,\|\widehat{U}\|^2_{\widehat{\mathbb{H}}} \qquad \forall \widehat{U} \in \widehat{\mathbb{H}}(\Gamma).$$

Conséquence:
Convergence quasi-optimale des méthodes de Galerkin conformes.

Identité de Calderón généralisée

Si $\kappa_0 = \cdots = \kappa_n$ on a: $\quad (\widehat{\mathrm{A}}_\kappa)^2 = \mathrm{Id}$.

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

1. Présentation
2. Résultats numériques

Problème modèle

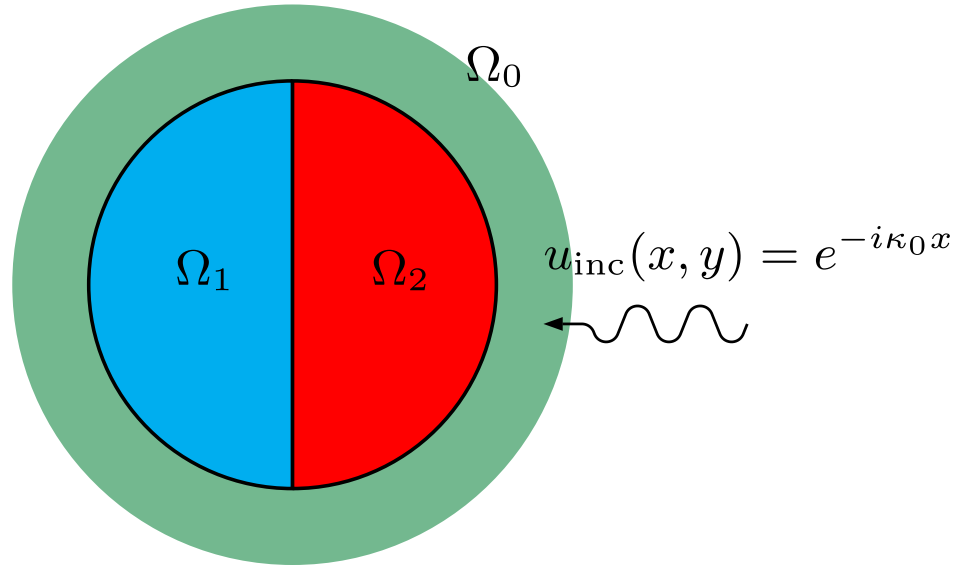
Milieu de propagation

$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\mathrm{D}}(0,1)$

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \mu_j^{-1} \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \mu_k^{-1} \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j,k \end{array}\right.$$



Comment calculer une solution de référence?

Nous résolvons numériquement la formulation simple-trace (PMCHWT) de 1ere espèce, et comparons avec la solution de la formulation multi-trace.

Problème modèle

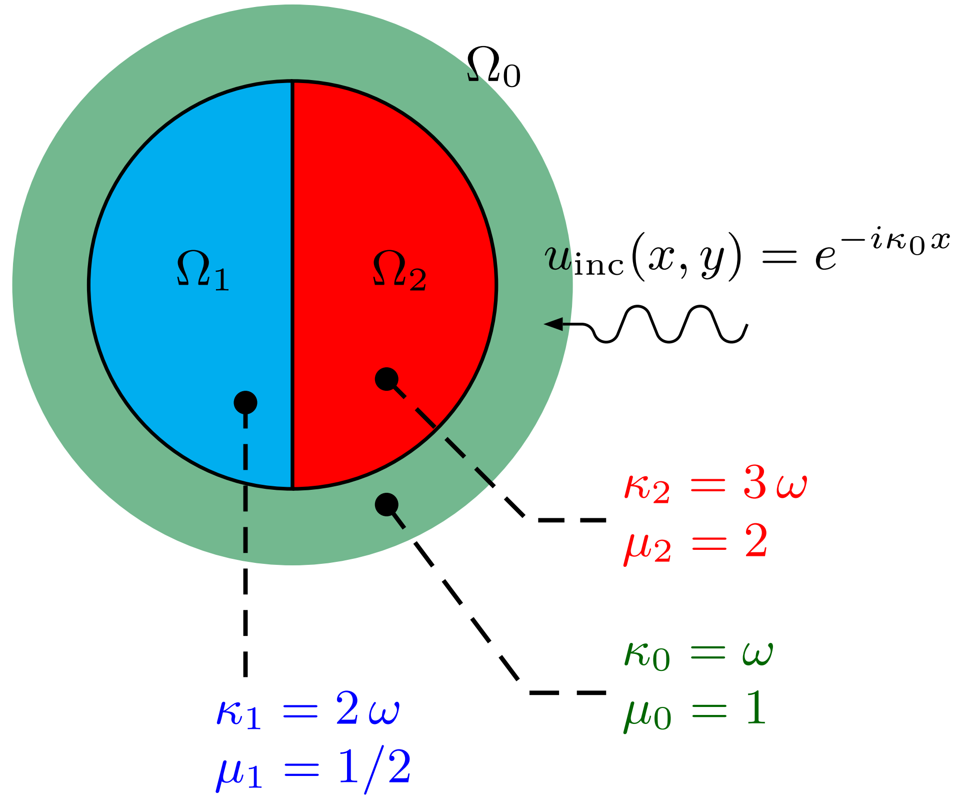
Milieu de propagation

$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\mathrm{D}}(0,1)$

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

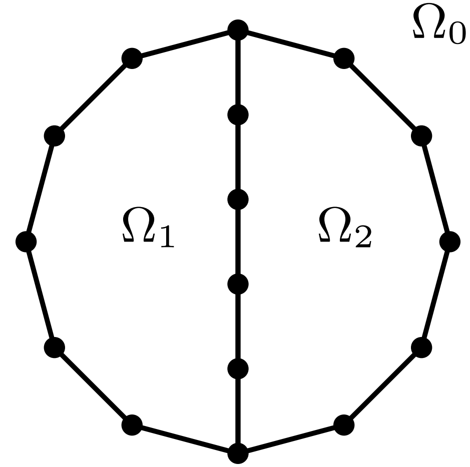
$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \mu_j^{-1}\partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \mu_k^{-1}\partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array}\right.$$



Comment calculer une solution de référence?

Nous résolvons numériquement la formulation simple-trace (PMCHWT) de 1ere espèce, et comparons avec la solution de la formulation multi-trace.

Problème modèle



Milieu de propagation

$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\mathrm{D}}(0,1)$

Problème de transmission

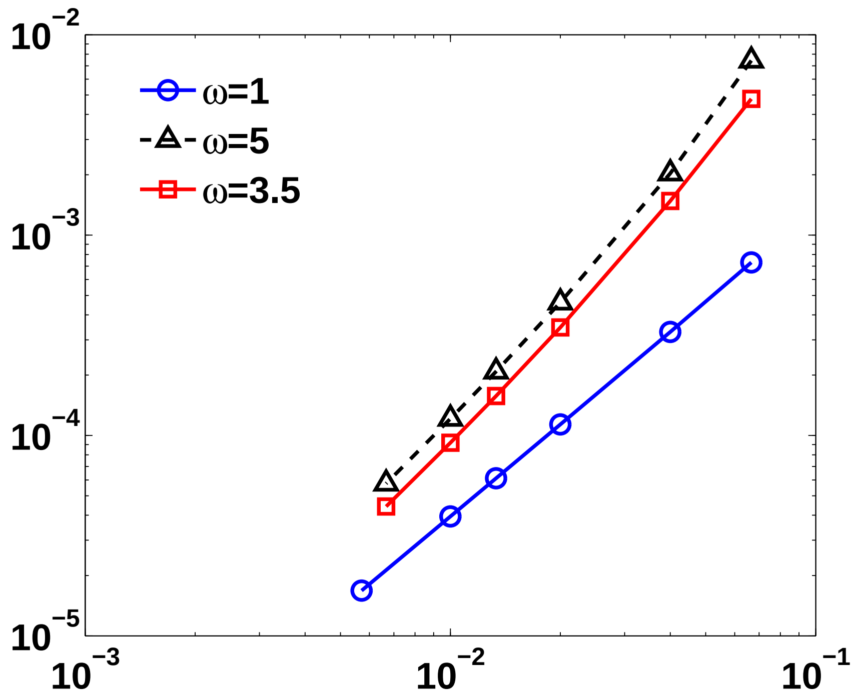
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \mu_j^{-1}\partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \mu_k^{-1}\partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j,k \end{array}\right.$$

Discrétisation (Toolbox ie2m A. Bendali)

Toutes les traces (Dirichlet <u>et</u> Neumann) sont approchées par des fonctions continues linéaires par morceaux.

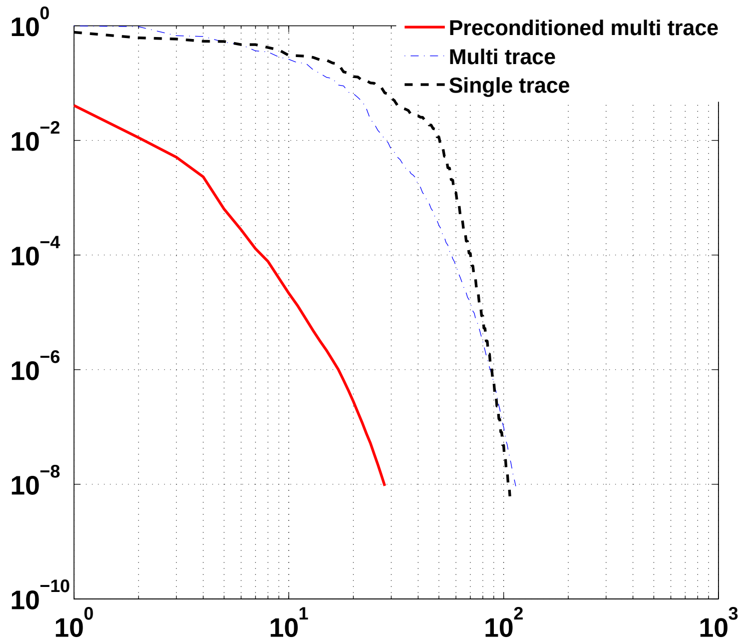
Résultat de consistance



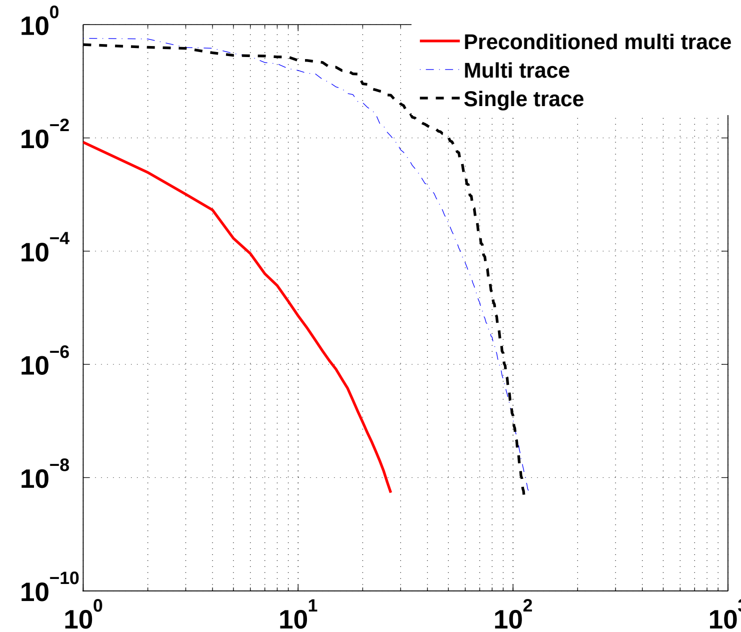
Erreur relative $\|U_h^{\text{1ere esp}} - U_h^{\text{Rumsey}}\| / \|U_h^{\text{Rumsey}}\|$

versus pas du maillage h

Historique de convergence de GMRES



$h = 0.02$



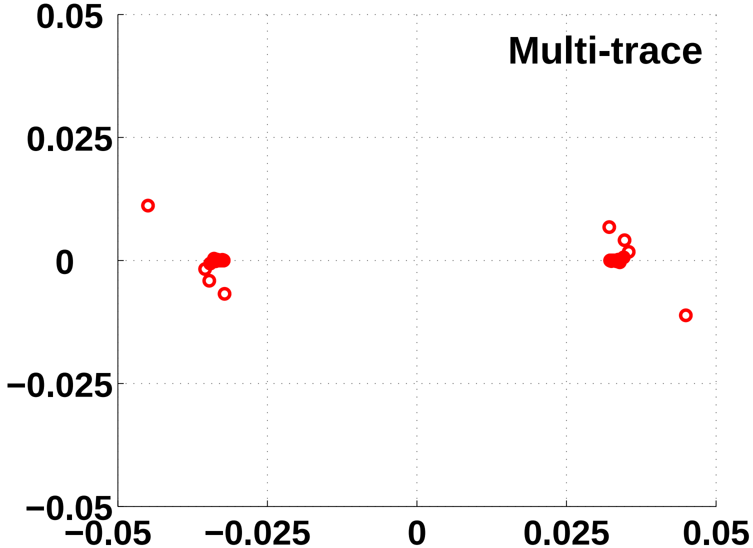
$h = 0.0066$

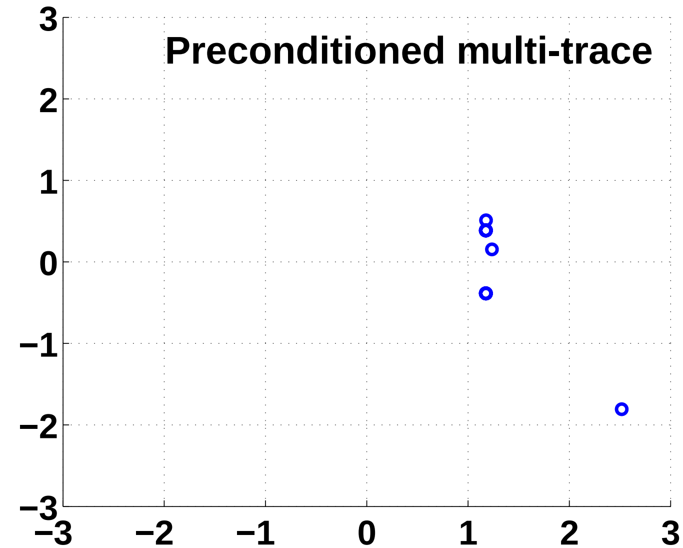
Norme quadratique du résidu de GMRES (sans restart) versus nombre d'itérations pour $\omega = 2$.

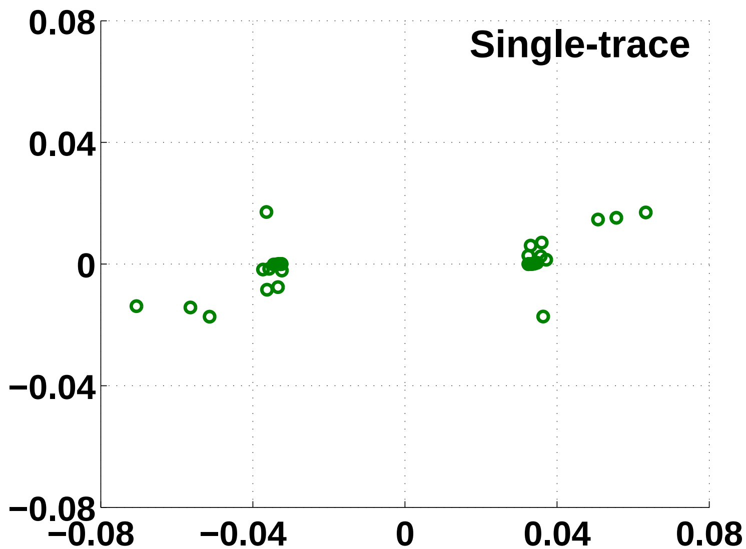
On a pris $\mathrm{M}_h^{-1}\mathrm{A}_h\mathrm{M}_h^{-1}$ comme préconditionneur pour A_h où

$\mathrm{A}_h =$ matrice de Galerkin de (MTF),
$\mathrm{M}_h =$ matrice de masse pour le crochet de dualité $\widehat{\mathrm{B}}(\ ,\ )$.

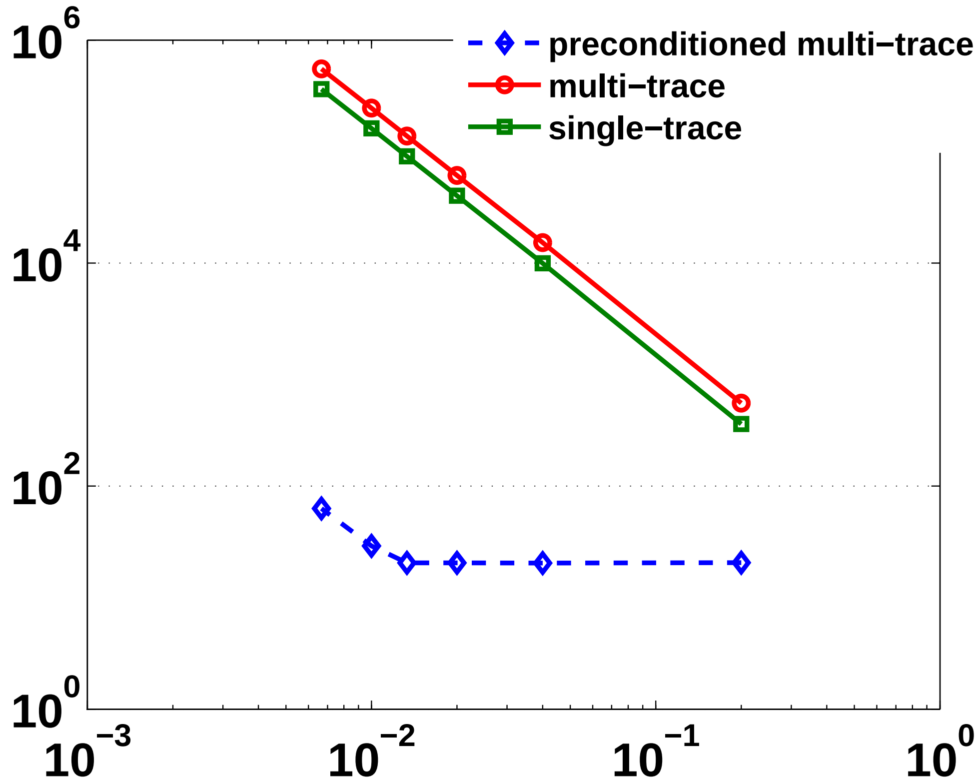
Position des valeurs propres ($h = 0.02, \omega = 1$)







Conditionnement



Conditionnement versus pas du maillage

avec $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$ et $\kappa_0 = 1$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$.

Plan de l’exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Formulation de 1ère espèce

1. Présentation sur un problème simple
2. Principe de Rumsey
3. Cas général
4. Résultats numériques

III. Formulation de 2ème espèce

1. Présentation
2. Résultats numériques

Rappelons le théorème de représentation…

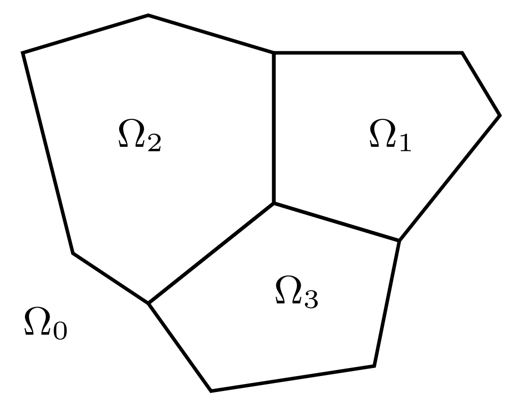
Avec $\mathrm{G}_\kappa\left(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\right)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\,\gamma(u)\,\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x}\in\Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $\Delta u + \kappa_j^2 u = 0$ dans Ω_j pour tout j, on a

$$\gamma^p\cdot\mathrm{G}^j_{\kappa_j}\big(\,\gamma^j(u)\,\big) \;=\; \delta_p^j\cdot\gamma^p(u) \quad \forall p$$



Rappelons le théorème de représentation...

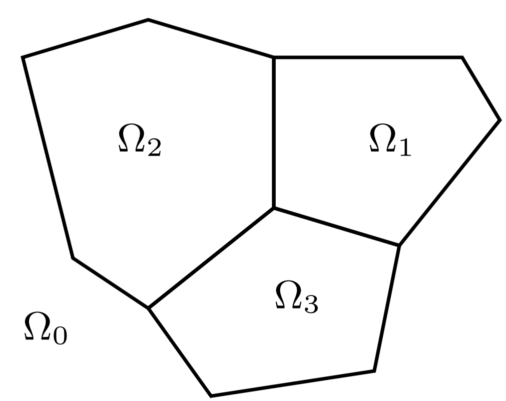
Avec $\mathrm{G}_\kappa\Big(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\Big)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\gamma(u)\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $\Delta u + \kappa_j^2 u = 0$ dans Ω_j pour tout j, on a

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma^p \cdot \mathrm{G}^j_{\kappa_j}\big(\gamma^j(u)\big) = \sum_{j=0}^{n} \delta^j_p \cdot \gamma^p(u) \quad \forall p$$



Rappelons le théorème de représentation…

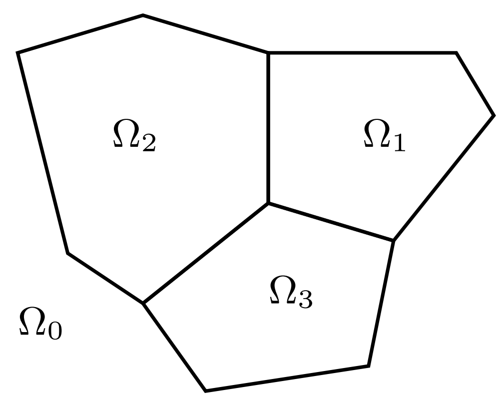
Avec $\mathrm{G}_\kappa\left(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\right)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\gamma(u)\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x}\in\Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $\Delta u + \kappa_j^2 u = 0$ dans Ω_j pour tout j, on a

$$\sum_{j=0}^{n}\gamma^p\cdot\mathrm{G}^j_{\kappa_j}\big(\gamma^j(u)\big) = \sum_{j=0}^{n}\delta_p^j\cdot\gamma^p(u) \quad \forall p$$



Rappelons le théorème de représentation…

Avec $\mathrm{G}_\kappa\left(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\right)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

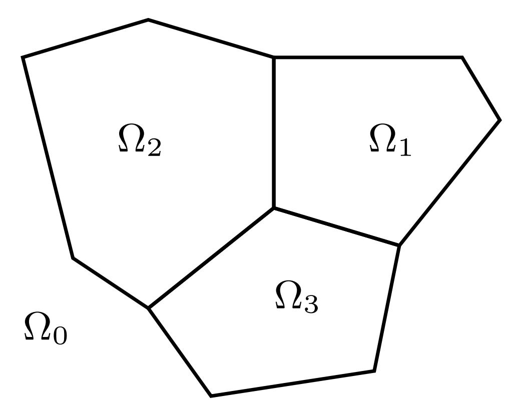
Théorème

Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\gamma(u)\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $\Delta u + \kappa_j^2 u = 0$ dans Ω_j pour tout j, on a

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma^p \cdot \mathrm{G}^j_{\kappa_j}\big(\gamma^j(u)\big) \;=\; \gamma^p(u) \quad \forall p$$



Rappelons le théorème de représentation…

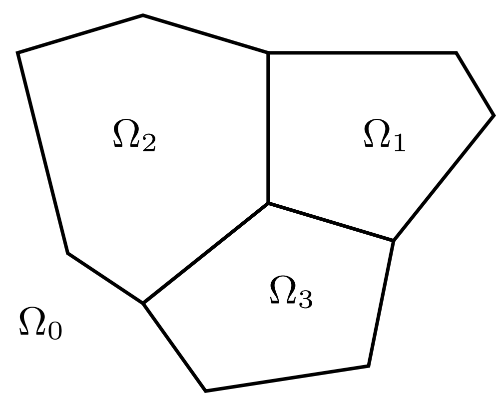
Avec $\mathrm{G}_\kappa\Big(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\Big)(\mathbf{x}) := \displaystyle\int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\,\gamma(u)\,\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $U = (U_0 \ldots, U_n) \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma)$

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma^p \cdot \mathrm{G}^j_{\kappa_j}\big(\,U_j\,\big) \;=\; U_p \quad \forall p$$



Rappelons le théorème de représentation…

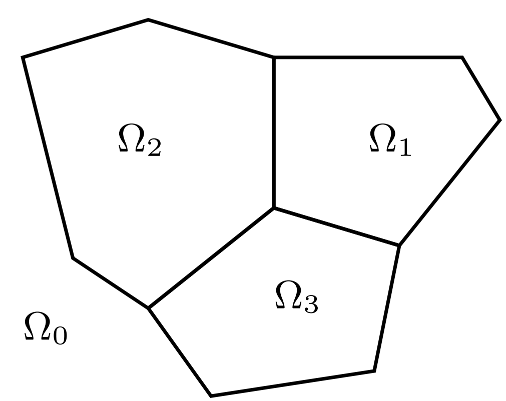
Avec $\mathrm{G}_\kappa\Big(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\Big)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y})\,\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - v(\mathbf{y})\,n(\mathbf{y})\cdot\nabla\mathscr{G}_\kappa(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y})$

Théorème
Si $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$\mathrm{G}_\kappa\big(\,\gamma(u)\,\big)(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x}\in\Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Conséquence: si $U = (U_0\dots,U_n)\in\mathscr{C}_\kappa(\Gamma)$

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^0\cdot\mathrm{G}^0_{\kappa_0}\big(U_0\big)+ & \cdots & +\gamma^0\cdot\mathrm{G}^n_{\kappa_n}\big(U_n\big) = & U_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma^n\cdot\mathrm{G}^0_{\kappa_0}\big(U_0\big)+ & \cdots & +\gamma^n\cdot\mathrm{G}^n_{\kappa_n}\big(U_n\big) = & U_n \end{array}$$



Opérateur multi-potentiel

Le calcul précédent nous amène à considérer l'opérateur "multi-potentiel" $\mathfrak{A}_\kappa : \mathbb{H}(\Gamma) \to \mathbb{H}(\Gamma)$ défini par

$$\mathfrak{A}_\kappa(U) \ := \begin{bmatrix} \gamma^0 \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^0 \cdot G^n_{\kappa_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^n \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^n \cdot G^n_{\kappa_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Le calcul précédent se résume à

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \ \Rightarrow \ U = \mathfrak{A}_\kappa(U) \ .$$

Opérateur multi-potentiel

Le calcul précédent nous amène à considérer l'opérateur "multi-potentiel" $\mathfrak{A}_\kappa : \mathbb{H}(\Gamma) \to \mathbb{H}(\Gamma)$ défini par

$$\mathfrak{A}_\kappa(U) \;:= \begin{bmatrix} \gamma^0 \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^0 \cdot G^n_{\kappa_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^n \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^n \cdot G^n_{\kappa_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Le calcul précédent se résume à

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \;\Rightarrow\; U = \mathfrak{A}_\kappa(U)\ .$$

Lemme

Si $\kappa_0 = \kappa_1 = \cdots = \kappa_n$, on a l'équivalence

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U = 0 \qquad (*)$$

Opérateur multi-potentiel

Le calcul précédent nous amène à considérer l'opérateur "multi-potentiel" $\mathfrak{A}_\kappa : \mathbb{H}(\Gamma) \to \mathbb{H}(\Gamma)$ défini par

$$\mathfrak{A}_\kappa(U) := \begin{bmatrix} \gamma^0 \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^0 \cdot G^n_{\kappa_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^n \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^n \cdot G^n_{\kappa_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Le calcul précédent se résume à

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \ \Rightarrow \ U = \mathfrak{A}_\kappa(U) \ .$$

Lemme
Si $\kappa_0 = \kappa_1 = \cdots = \kappa_n$, on a l'équivalence

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U = 0 \qquad (*)$$

Par ailleurs, il existe $\delta > 0$ tel que si $\max_{i \neq j} |\kappa_i - \kappa_j| < \delta$, alors l'équivalence $(*)$ est encore vraie.

Opérateur multi-potentiel

Le calcul précédent nous amène à considérer l'opérateur "multi-potentiel" $\mathfrak{A}_\kappa : \mathbb{H}(\Gamma) \to \mathbb{H}(\Gamma)$ défini par

$$\mathfrak{A}_\kappa(U) \;:= \begin{bmatrix} \gamma^0 \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^0 \cdot G^n_{\kappa_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^n \cdot G^0_{\kappa_0} & \cdots & \gamma^n \cdot G^n_{\kappa_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Le calcul précédent se résume à

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \;\Rightarrow\; U = \mathfrak{A}_\kappa(U)\ .$$

Lemme
Si $\kappa_0 = \kappa_1 = \cdots = \kappa_n$, on a l'équivalence

$$U \in \mathscr{C}_\kappa(\Gamma) \iff (\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U = 0 \qquad (*)$$

Par ailleurs, il existe $\delta > 0$ tel que si $\max_{i\neq j}|\kappa_i - \kappa_j| < \delta$, alors l'équivalence $(*)$ est encore vraie.

Conjecture: L'équivalence $(*)$ est vraie quels que soient les $\kappa_j \in \mathbb{R}_+$.

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j, \ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array}\right.$$

$$\iff \quad U = (U_j) := \big(\gamma^j(u)\big)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{X}(\Gamma)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j, \ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

Reformulation du problème de transmission

Problème de transmission

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{cases}$$

$$\iff \quad U = (U_j) := \big(\gamma^j(u)\big)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{X}(\Gamma)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_j, \ \forall j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{cases}$$

$$\iff \quad (\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)(U - U^{\mathrm{inc}}) = 0,$$

$$\text{avec } U^{\mathrm{inc}} = \big(\gamma^j(u_{\mathrm{inc}})\big)_{0\leq j\leq n}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{X}(\Gamma) \text{ tel que} \\ (\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U = F \end{cases}$$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V) \qquad \forall V \in \mathbb{H}(\Gamma)\end{array}\right.$$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{H}(\Gamma) \end{array} \right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver}\quad U \in \mathbb{X}(\Gamma)\quad\text{tel que}\\[1ex] \mathrm{B}\big((\mathrm{Id}-\mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F,V)\big) \qquad \forall V \in \mathbb{H}(\Gamma) = \mathbb{X}(\Gamma)\oplus\mathbb{Y}(\Gamma)\end{array}\right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-\mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

Reformulation du problème de transmission

complémentaire (fermé)
arbiraire de $\mathbb{X}(\Gamma)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; U \in \mathbb{X}(\Gamma) \; \text{ tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{H}(\Gamma) = \mathbb{X}(\Gamma) \oplus \mathbb{Y}(\Gamma) \end{cases}$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\[2ex] \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{array}\right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{cases}$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} \qquad - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{array}\right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} + \mathfrak{A}_* - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{cases}$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Reformulation du problème de transmission

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} + \mathfrak{A}_* - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{cases}$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Reformulation du problème de transmission

Opérateur intégral contenant uniquement des noyaux $\mathscr{G}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) - \mathscr{G}_{\kappa_j}(\mathbf{x})$ réguliers
Conséquence: opérateur compact.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad U \in \mathbb{X}(\Gamma) \quad \text{tel que} \\ \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} + \boxed{\mathfrak{A}_* - \mathfrak{A}_\kappa})U, V\big) = \mathrm{B}(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma) \end{array} \right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Reformulation du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \; U \in \mathbb{X}(\Gamma) \; \text{ tel que} \\[2ex] \mathrm{B}\big((\mathrm{Id} + \mathfrak{A}_* - \mathfrak{A}_\kappa)U, V\big) = \mathrm{B}\big(F, V\big) \qquad \forall V \in \mathbb{Y}(\Gamma)\end{array}\right.$$

Proposition:
Quelles que soient les valeurs des κ_j on a toujours $\;\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa) \subset \mathbb{X}(\Gamma)$.

On en déduit que $\mathrm{B}((\mathrm{Id} - \mathfrak{A}_\kappa)U, V) = 0$ dès que $V \in \mathbb{X}(\Gamma)$. Compte tenu de la forme a priori de F, il est équivalent de considérer uniquement des $V \in \mathbb{Y}(\Gamma)$.

Proposition:
Notons $\mathfrak{A}_*$ l'opérateur construit en prenant $\kappa_j = \kappa_0, \forall j$. Quel que soit κ_0 on a

$$\mathfrak{A}_* U = 0, \quad \forall U \in \mathbb{X}(\Gamma).$$

Conclusion: On a dérivé une formulation de seconde espèce.

Plan de l'exposé

Problème modèle

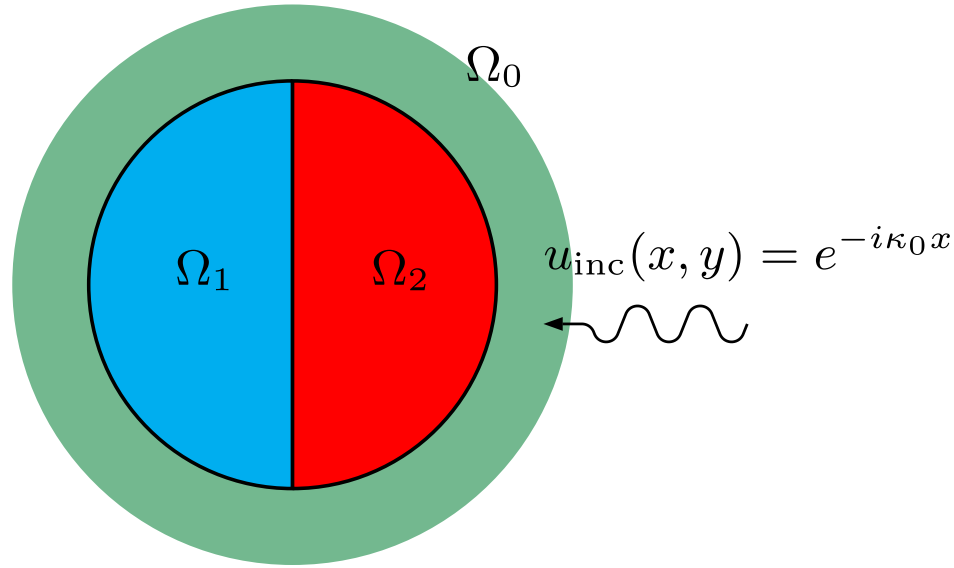
Milieu de propagation

$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\mathrm{D}}(0,1)$

Problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \ \Omega_j \\ u - u_{\mathrm{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array}\right.$$

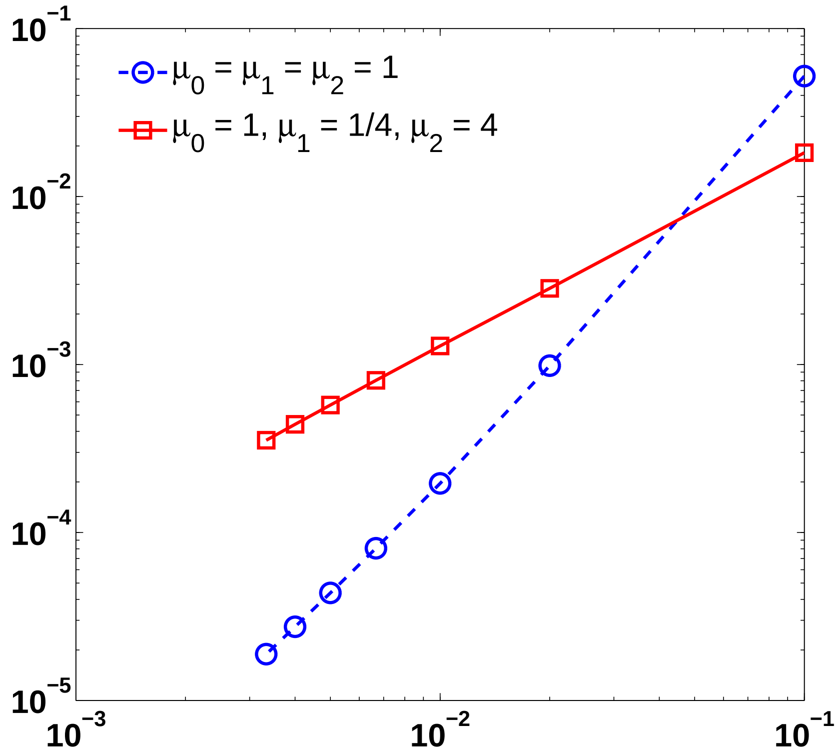
$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \mu_j^{-1} \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \mu_k^{-1} \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j,k \end{array}\right.$$



Comment calculer une solution de référence?

Nous résolvons numériquement la formulation simple-trace (PMCHWT) de 1ere espèce, et comparons avec la solution de la formulation multi-trace.

Résultat de consistance



Erreur relative $\|U_h^{\text{2eme esp}} - U_h^{\text{Rumsey}}\| / \|U_h^{\text{Rumsey}}\|$

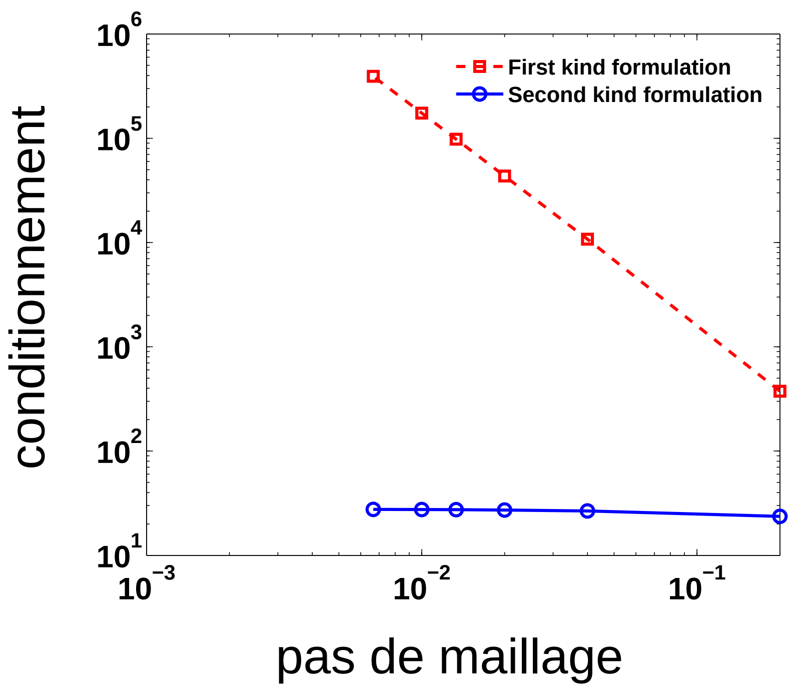
versus pas du maillage h

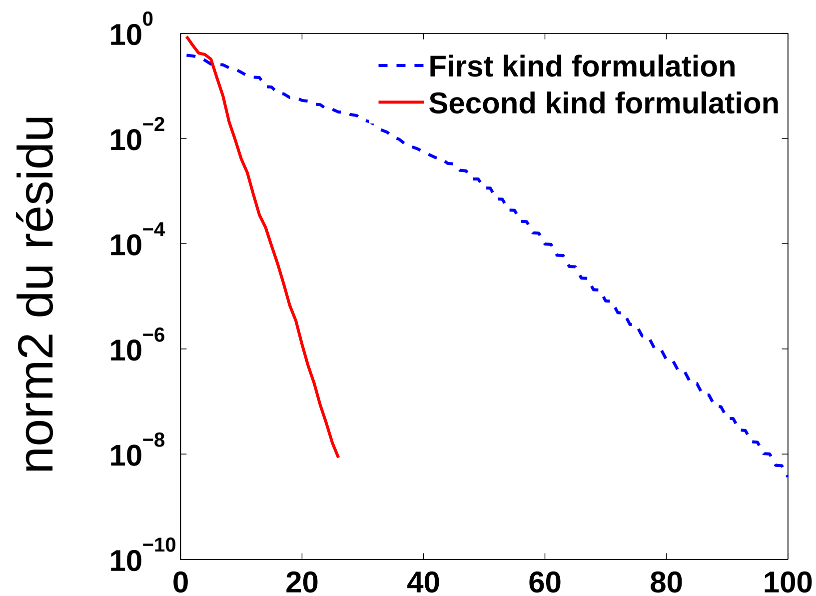
Numerical results

Resultats obtenus avec:

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = 1/2, \mu_2 = 2,$$

$$\kappa_0 = 1, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 3.$$





Nb d'iterations avec GMRES sans restart et 1200 ddl

Conclusion

Extensions

La nouvelle formulation de 1ère espèce se généralise aux cas suivants:

• **$\Im m\{\kappa_j\} \neq 0$ et $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ arbitraires**
tant que le problème de transmission reste bien posé (vrai si $\Im m\{\kappa_j\} \geq 0$, $\Re e\{\kappa_j\} \geq 0$ et $\kappa_j \neq 0$, $\forall j = 0 \ldots n$). **Conséquence: pas de mode parasite.**

• **Équations de Maxwell**
Nous démontrons un équivalent de tous les résultats précédents dans le cas des équations de Maxwell. Pour la preuve de convergence quasi-optimale, nous utilisons le cadre théorique développé dans [Buffa, 2005].

Pour la formulation de 2ème espèce, beaucoup de questions restent ouvertes:

• **Présence/absence de modes parasites?**

• **généralisation aux équations de Maxwell?**

• **Consistance des méthodes de Petrov-Galerkin?**

Références bibliographiques

- Z. Peng et J.F. Lee, "*Non-conformal Domain Decomposition Methods for Solving Large Multi-scale Electromagnetic Scattering Problems*", proc. of IEEE, vol. 6, no. 1, may 2012.

- L. Greengard et J.-Y. Lee, "*Stable and accurate integral equation methods for scattering problems with multiple material interfaces in two dimensions*", Journal of Computational Physics, 231:2389-2395, 2012.

- X. Claeys, "*A single trace integral formulation of the second kind for acoustic scattering in complex geometries*", ETH SAM Report no.2010-14.

- X. Claeys et R. Hiptmair, "*Electromagnetic scattering at composite objects: a novel multi-trace boundary integral formulation*", ESAIM Math.Model. Numer. Anal., 46 (2012) 1421-1445.

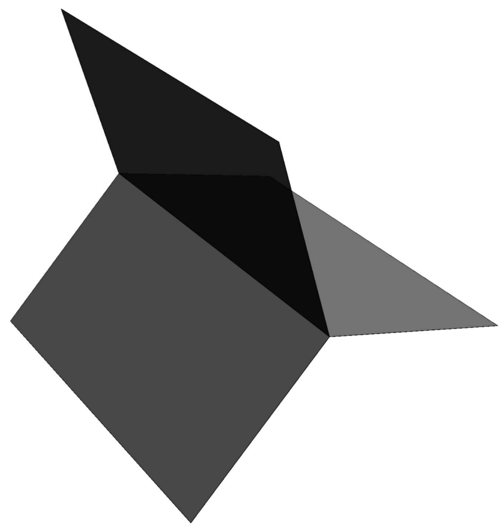
- X. Claeys et R. Hiptmair, "*Boundary integral formulation of the first kind for acoustic scattering by composite structures*", accepté dans Comm. Pure Appl. Math.

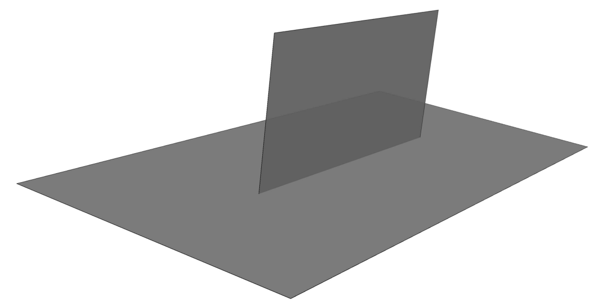
- X. Claeys, R. Hiptmair et C. Jerez, "*Multi-trace boundary integral equations*", SAM Report 2012-20, soumis.

- X. Claeys, R. Hiptmair et E. Spindler, "*Second kind Galerkin boundary element method for acoustic scattering at composite objects*", en préparation.

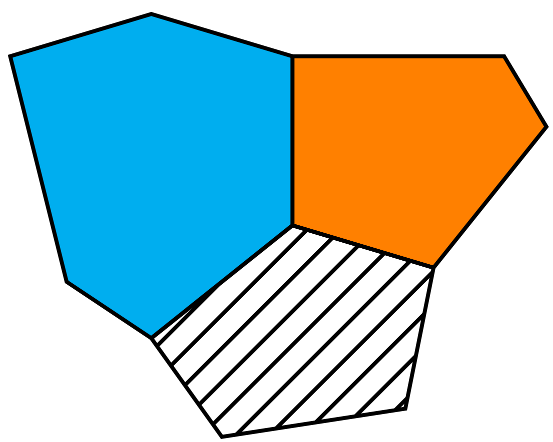
Future work

Nous travaillons actuellement sur les formulations intégrales pour la diffraction par des objets "multi-écrans", . . .





. . . et les cas où le milieu comporte des parties métalliques.



Merci

de votre attention