Sur l'existence de correcteurs stationnaires en homogénéisation stochastique

Séminaire LJLL

Antoine Gloria

1[er] juin 2012

Travail en collaboration avec Felix Otto (MPI Leipzig).

Objectif à long terme : développer une théorie quantitative de l'homogénéisation stochastique.

Collaborateurs :

- Jean-Christophe Mourrat (EPFL)
- Stefan Neukamm (MPI Leipzig)

Homogénéisation stochastique : résultat qualitatif

Soit $A_\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$, avec A symétrique, stationnaire et ergodique.
Alors l'unique solution faible $u_\varepsilon \in H^1_0(D)$ de

$$-\nabla \cdot A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \; = \; f$$

converge presque sûrement faiblement dans $H^1(D)$ vers l'unique solution faible $u_{\mathrm{hom}} \in H^1_0(D)$ de

$$-\nabla \cdot A_{\mathrm{hom}} \nabla u_{\mathrm{hom}} \; = \; f,$$

où A_{hom} est donnée par

$$\xi \cdot A_{\mathrm{hom}} \xi \; = \; \lim_{R\to\infty} \inf\{ \fint_{Q_R} (\xi + \nabla \phi) \cdot A(\xi + \nabla \phi), \phi \in H^1_0(Q_R)\},$$

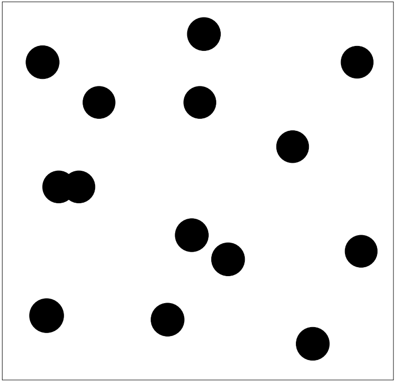
presque sûrement.

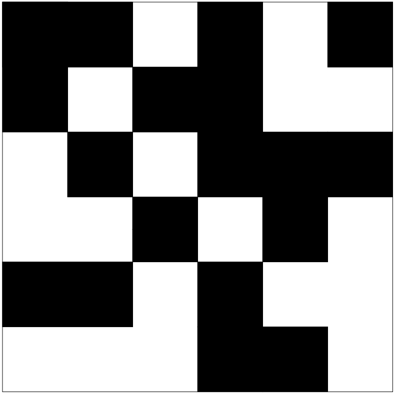
Preuve la plus simple : Γ-convergence et théorème ergodique sous-additif.

(information minimale : la preuve marche pour l'élasticité non linéaire !)

Exemples de coefficients

Inclusions (processus ponctuel de Poisson) / damier aléatoire





Equation du correcteur

Dans le cas $Q = (0,1)^d$-périodique, par convexité

$$\xi \cdot A_{\rm hom}\xi \; = \; \inf\{ \fint_Q (\xi + \nabla\phi) \cdot A(\xi + \nabla\phi), \phi \in H^1_\#(Q)\},$$

Minimum atteint à la solution de l'équation d'Euler-Lagrange dans $H^1_\#(Q)$:

$$-\nabla \cdot A(\xi + \nabla\phi) = 0.$$

Dans le cas stochastique, on ne peut pas se restreindre à Q : il faut toute l'information statistique... équation devient

$$-\nabla \cdot A(\xi + \nabla\phi) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Equation non standard !

Quelle solution à l'équation du correcteur ?

Cette équation n'est pas soluble a priori pour des coefficients quelconques : la stationnarité est cruciale.

Résultat attendu : il existe une unique solution stationnaire d'espérance nulle $\langle \phi \rangle = 0$ à l'équation du correcteur.

Rappel (détails plus loin) : une fonction ϕ est stationnaire si $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_k))$ et $(\phi(y_1 + x), \dots, \phi(y_k + x))$ ont même distribution pour tout k, y_i et x.

Si résultat vrai, alors deux points de vue équivalents par théorème ergodique : presque sûrement

$$\langle (\xi + \nabla \phi) \cdot A(\xi + \nabla \phi) \rangle \ = \ \lim_{R \to \infty} \fint_{Q_R} (\xi + \nabla \phi) \cdot A(\xi + \nabla \phi).$$

Cas facile : la dimension 1 !

Le correcteur en dimension 1

Solution explicite de

$$-[a(x)(1+\phi'(x))]' = 0$$

est (on utilise $\langle \phi' \rangle = 0$)

$$\phi(x) \;=\; \phi(0) + x\left(\fint_0^x \frac{1}{\langle 1/a\rangle}\frac{dt}{a(t)} - 1\right)$$

et donc pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\left\langle \fint_0^y (\phi(x)-\phi(0))^2 dx \right\rangle = \left\langle \fint_0^y x\left[\sqrt{x}\left(\fint_0^x \frac{1}{\langle 1/a\rangle}\frac{dt}{a(t)} - 1\right)\right]^2 dx \right\rangle.$$

Or : si résultat vrai, terme de gauche d'ordre 1, alors que terme de droite d'ordre y par TCL (si par exemple a est iid — cf damier).
Différence avec le cas périodique : résultat attendu faux ? !

Peut-être trop gourmand : seulement besoin de $\nabla\phi$ stationnaire...

L'espace de probabilité

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- $\Omega = \{\mathbb{R}^d \to$ matrices symétriques uniformément elliptiques$\}$.
- Mesure de probabilité invariante par groupe des translations : $\tau_x : \Omega \to \Omega$, $(\tau_x \omega)(y) := \omega(y-x)$.
- Groupe de translations est ergodique pour $\mathbb{P}$ (si $\tau_x B \subset B$ pour tout x, alors $\mathbb{P}(B) \in \{0,1\}$).
- A champ de matrices aléatoires stochastiquement continu :

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|A(y+h,\omega) - A(y,\omega)| > \delta) = 0.$$

On définit $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$.
Groupe unitaire sur $\mathcal{H}$: T_x défini par $(T_x \tilde{f})(\omega) = \tilde{f}(\tau_{-x}\omega)$.
Processus stationnaire : pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{H}$, extension stationnaire sur $\mathbb{R}^d \times \Omega$ définie par $f(x,\omega) := \tilde{f}(\tau_{-x}\omega)$

Equation du correcteur dans l'espace de probabilité

T_x : d groupes unitaires fortement continus à un paramètre (qui commutent)
$\rightsquigarrow$ générateurs infinitésimaux D_i antisymétriques et fermés,
$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}^1 := \cap_i \mathcal{D}(D_i)$ dense dans $\mathcal{H}$.

L'espace $\mathcal{H}^1$ est un Hilbert muni du produit scalaire : $\left\langle \tilde{f}\tilde{g} \right\rangle + \left\langle D\tilde{g} \cdot AD\tilde{f} \right\rangle$.

Quid de l'ergodicité ?
Si $\psi \in \mathcal{H}^1$ tel que $D\psi = 0$ et $\langle \psi \rangle = 0$ alors $\psi \equiv 0$.

Cas périodique : $\mathcal{H}^1 = H^1(\mathbb{T})$ et on a une version *quantitative* de l'ergodicité : l'inégalité de Poincaré

$$\mathrm{var}\,[\psi] \lesssim \left\langle |\nabla\psi|^2 \right\rangle.$$

Cas stochastique (ex du damier) : pas d'inégalité de Poincaré !

Equation du correcteur : trouver $\phi \in \mathcal{H}^1$ tel que pour tout $\psi \in \mathcal{H}^1$,

$$\langle D\psi \cdot A(\xi + D\phi) \rangle = 0.$$

Résolution de l'équation du correcteur

Par régularisation et Lax-Milgram : soit $T > 0$, il existe une unique solution $\phi_T \in \mathcal{H}^1$ à

$$T^{-1}\phi_T - D \cdot A(\xi + D\phi_T) \; = \; 0.$$

Estimations a priori :

$$\left\langle |D\phi_T|^2 \right\rangle \lesssim 1, \quad \left\langle \phi_T^2 \right\rangle \lesssim T.$$

Compacité faible pour $D\phi_T \rightharpoonup \Phi$ dans $\mathcal{H}$, perte du contrôle de ϕ_T, passage à la limite dans formulation faible : pour tout $\psi \in \mathcal{H}^1$

$$\langle D\psi \cdot A(\xi + \Phi) \rangle \; = \; 0.$$

On peut montrer que Φ est unique.
On peut construire $\phi : \mathbb{R}^d \times \Omega$ telle que $\phi(0,\cdot) \equiv 0$ et $\nabla\phi = \Phi$. Mais ϕ n'est pas stationnaire, seul son gradient est stationnaire.

Reformulation en termes d'opérateurs

On définit $\mathcal{L} := -D \cdot AD$ comme forme quadratique sur $\mathcal{H}^1$, et considère son extension de Friedrichs sur $\mathcal{H}$.

Dans le cas périodique, $\mathcal{L}$ a un trou spectral (inégalité de Poincaré).
Dans le cas stochastique (damier), $\mathcal{L}$ "a" un spectre continu.

Pour comprendre l'équation du correcteur et les propriétés quantitatives d'ergodicité

Nécessité de regarder plus finement le spectre...

Question fondamentale :
soit A avec une longueur de corrélation finie (ex du damier), quel type de corrélations a $\nabla\phi$?

(pas l'objet de cet exposé, mais $(\xi + \nabla\phi) \cdot A(\xi + \nabla\phi)$ assez peu corrélé pour avoir un TCL, [G.-Otto] [Nolen])

Point de départ de l'analyse quantitative

Relier deux spectres :

- spectre de $\mathcal{L}$, opérateur dégénéré ("dérivées horizontales"),
  - Résolution spectrale : $\mathcal{L} = \int_0^\infty \lambda G(d\lambda)$
  - Projection sur la dérive locale $g = D \cdot A\xi$: mesure spectrale de_g
  - Estimation de l'épaisseur du spectre : $\int_0^\mu de_g(\lambda) \le \mu^\gamma \ln_+^q \mu$ pour $\gamma, q \ge 0$?
- spectre de la dynamique de Glauber, inégalité de Poincaré (cas du damier), dérivées par rapport aux coefficients ("dérivées verticales"). Soit X une fonction de A, alors

$$\mathrm{var}\,[X] \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \operatorname*{osc}_{A|_{Q_3(x)}}{}^2\, X \right\rangle dx.$$

Résultats principaux

Théorème (G.-Otto)

Si A a une longueur de corrélation finie alors pour tout $k \geq 1$ il existe $q > 0$ tel que

$$\left\langle |\phi_T|^k \right\rangle \lesssim \left| \begin{array}{rl} \ln_+^q T & d = 2, \\ 1 & d > 2. \end{array} \right.$$

Corollaire (G.-Otto)

Pour $d > 2$, il existe un unique correcteur $\phi \in \mathcal{H}^1$

Théorème (G.-Otto)

Pour $g = D \cdot A\xi$, pour tout $0 < \mu \leq 1$,

$$\int_0^\mu de_g(\lambda) \lesssim \left| \begin{array}{rl} \mu^2 \ln_+^q T & d = 2, \\ \mu^{d/2+1} & 2 < d \leq 6, \\ \mu^4 & d > 6. \end{array} \right.$$

Remarque

Dans le cas d'une équation elliptique discrète, on peut montrer $d/2 + 1$ en toutes dimensions [G.-Neukamm-Otto].

Lien entre les deux résultats

Calcul fonctionnel... ([Papanicolaou-Varadhan],[Mourrat],[G.-Mourrat])

Comme $\phi_T = (T^{-1} + \mathcal{L})^{-1} g$, on a

$$\left\langle \phi_T^2 \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{(T^{-1} + \lambda)^2} de_g(\lambda).$$

Lien devient clair :

- d'une part
$$\int_0^\mu de_g(\lambda) \lesssim \mu^2 \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda + \mu)^2} de_g(\lambda)$$
- d'autre part, en écrivant l'intégrand comme l'intégrale de sa dérivée :
$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\lambda) de_g(\lambda) &= -\int_{\lambda=0}^\infty \int_{\delta=\lambda}^\infty f'(\delta) d\delta de_g(\lambda) \\ &= -\int_0^\infty f'(\delta) \int_0^\delta de_g(\lambda) d\delta. \end{aligned}$$
- $\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} de_g(\lambda) < \infty$.

Preuve du théorème 1

Trois ingrédients principaux :

- inégalité de trou spectral sur la dynamique de Glauber
- inégalité de Caccioppoli en probabilité (gain en intégrabilité)
- estimations fines sur les fonctions de Green

Preuve simplifiée :

- Suppose que la fonction de Green de $T^{-1} - \nabla \cdot A \nabla$ est la même que celle de $T^{-1} - \triangle$;
- Suppose qu'il n'y a pas de singularité en 0 :

$$
\begin{aligned}
G_T(x,y) &\lesssim \ln T \frac{\ln(2+|x-y|)}{1+|x-y|^{d-2}} \exp\Big(-c\frac{|x-y|}{\sqrt{T}}\Big) \\
|\nabla G_T(x,y)| &\lesssim \frac{1}{1+|x-y|^{d-1}} \exp\Big(-c\frac{|x-y|}{\sqrt{T}}\Big)
\end{aligned}
$$

Preuve du théorème 1

Par récurrence, point de départ :

$$\left\langle \phi_T^{2m} \right\rangle = \mathrm{var}\,[\phi_T^m] + \langle \phi_T^m \rangle^2 .$$

Si on contrôle bien la variance pour tout m, c'est fini car $\langle \phi_T \rangle = 0$.

Requiert une estimation non linéaire car mêmes exposants à droite et à gauche.

Trou spectral :

$$\mathrm{var}\,[\phi_T^m] \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}}{}^2 \, \phi_T^m(0) \right\rangle dx.$$

"Chain-rule" :

$$\begin{aligned} \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}} \, \phi_T^m(0) &\leq \Big(\sup_{A|Q_3(x)} |\phi_T^{m-1}(0)| \Big) \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}} \, \phi_T(0) \\ \sup_{A|Q_3(x)} |\phi_T(0)| &\leq |\phi_T(0)| + \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}} \, \phi_T(0) \end{aligned}$$

Preuve du théorème 1

Ainsi, par Young,

$$\mathrm{var}\left[\phi_T^m\right] \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}}^{2m} \phi_T(0) \right\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \phi_T^{2(m-1)}(0) \underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}}^{2} \phi_T(0) \right\rangle dx.$$

Le terme dominant est le second terme.

Estimation de l'oscillation :

$$\underset{A|Q_3(x)}{\mathrm{osc}}^{2} \phi_T(0) \lesssim \int_{Q_3(x)} |\nabla_y G_T(0,y)|^2 dy \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right).$$

Et donc :

$$\mathrm{var}\left[\phi_T^m\right] \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \phi_T^{2(m-1)}(0) \int_{Q_3(x)} |\nabla_y G_T(0,y)|^2 dy \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right) \right\rangle dx$$

Preuve de l'estimation d'oscillation

Soient A et $\tilde{A}$ qui coïncident hors de $Q_3(x)$. On a :

$$T^{-1}(\tilde{\phi}_T - \phi_T) - \nabla \cdot \tilde{A}\nabla(\tilde{\phi}_T - \phi_T) = \nabla \cdot (\tilde{A} - A)(\xi + \nabla\phi_T).$$

Si A et $\tilde{A}$ régulières, représentation de Green :

$$\begin{aligned} |(\tilde{\phi}_T - \phi_T)(0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_y \tilde{G}_T(y,0) \cdot (\tilde{A} - A)(\xi + \nabla\phi_T(y))dy\right| \\ &\leq \left(\int_{Q_3(x)} |\nabla_y \tilde{G}_T(y,0)|^2 dy\right)^{1/2} \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla\phi_T(y)|^2 dy\right)^{1/2} \end{aligned}$$

On doit prendre le supremum du membre de droite en A et $\tilde{A}$.
Pour fonction de Green : cf. hypothèse simplificatrice.
Pour correcteur régularisé : estimation a priori,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\tilde{\phi}_T(y) - \nabla\phi_T(y)|^2 dy \lesssim 1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla\phi_T(y)|^2 dy.$$

Conclut la preuve de l'estimation d'oscillation.

Preuve du théorème 1

$$\mathrm{var}\left[\phi_T^m\right] \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \phi_T^{2(m-1)}(0) \int_{Q_3(x)} |\nabla_y G_T(0,y)|^2 dy \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right)\right\rangle dx$$

Apparemment, rien gagné : même puissance de ϕ_T à gauche et à droite.

Argument clé : inégalité de Cacciopoli en probabilité.
Rappel : $T^{-1}\phi_T - \nabla \cdot A(\xi + \nabla \phi_T) = 0$.
Multiplier par ϕ_T^{2m+1}, espérance et ipp :

$$\begin{aligned}\left\langle \phi_T^{2m} |\nabla \phi_T|^2 \right\rangle &\lesssim \\ &\left\langle \phi_T^{2m} \nabla \phi_T \cdot A \nabla \phi_T \right\rangle \leq -\left\langle \phi_T^{2m} \nabla \phi_T \cdot A\xi \right\rangle \\ &\lesssim \left\langle \phi_T^{2m} |\nabla \phi_T|^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle \phi_T^{2m} \right\rangle^{1/2}.\end{aligned}$$

Cacciopoli :

$$\left\langle \phi_T^{2m} |\nabla \phi_T|^2 \right\rangle \lesssim \left\langle \phi_T^{2m} \right\rangle.$$

Preuve du théorème 1

Par Hölder avec exposants $(\frac{m+1}{m}, m+1)$,

$$\left\langle \phi_T^{2(m-1)}(0) \int_{Q_3(x)} |\nabla_y G_T(0,y)|^2 dy \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right) \right\rangle$$

$$\lesssim |\nabla G_T(0,x)|^2 \left\langle |\phi_T|^{\frac{2(m-1)(m+1)}{m}} \right\rangle^{\frac{m}{m+1}} \left(1 + \left\langle \left(\int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right)^{m+1} \right\rangle^{\frac{1}{m+1}}\right)$$

On "conclut" par Cacciopoli et Hölder en probabilité que

$$\left\langle \phi_T^{2(m-1)}(0) \int_{Q_3(x)} |\nabla_y G_T(0,y)|^2 dy \left(1 + \int_{Q_3(x)} |\nabla \phi_T(y)|^2 dy\right) \right\rangle$$

$$\lesssim |\nabla G_T(0,x)|^2 \left\langle |\phi_T|^{2m} \right\rangle^{\frac{m-1}{m}} \left(1 + \left\langle \phi_T(0)^{2m} \right\rangle^{\frac{1}{m+1}}\right)$$

$$\lesssim |\nabla G_T(0,x)|^2 (1 + \left\langle \phi_T^{2m} \right\rangle^{1-\frac{1}{m(m+1)}}).$$

Application de Cacciopoli

Argument licite si

$$\left(\int_{Q_3(0)} |\nabla\phi_T(y)|^2 dy\right)^{m+1} \lesssim \int_{Q_6(0)} (1+\phi_T(y)^{2m})(1+|\nabla\phi_T(y)|^2)dy.$$

Conséquence de Cacciopoli (en espace) : tester équation avec $y \mapsto \mu(y)^2(\xi\cdot y+\phi_T(y))$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_6(0)} \mu(y)^2|\xi+\nabla\phi_T(y)|^2 dy \\
&\quad\lesssim\quad 1+\int_{Q_6(0)} \mu(y)|\nabla\mu(y)||\xi\cdot y+\phi_T(y)||\xi+\nabla\phi_T(y)|dy \\
&\quad\lesssim\quad 1+\int_{Q_6(0)} (\mu(y)^2|\xi+\nabla\phi_T(y)|^2)^{(n-1)/(2n)} \\
&\qquad\qquad \times(|\xi\cdot y+\phi_T(y)||\xi+\nabla\phi_T(y)|^{1/n})dy
\end{aligned}$$

Conclure par Young et Jensen.

Conclusion

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[\phi_T^m\right] &\lesssim 1+\left\langle \phi_T^{2m}\right\rangle^{1-\frac{1}{m(m+1)}} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla_y G_T(0,y)\right|^2 dy \\
&\lesssim 1+\left\langle \phi_T^{2m}\right\rangle^{1-\frac{1}{m(m+1)}} \left| \begin{array}{rl} \ln T & d=2, \\ 1 & d>2. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On conclut par Young et par récurrence.

Sans simplifications :

- singularité de la fonction de Green : nouvelle estimation de l'oscillation
- dérivée de la fonction de Green décroît de manière optimale seulement intégrée sur des anneaux dyadiques par Cacciopoli.

Outils utilisés :

- ϕ_T est Hölderienne,
- estimations de Meyers (décroissance optimale de $|\nabla G_T|^p$ pour un exposant $p>2$).

Questions à traiter...

- avoir les exposants spectraux optimaux en toutes dimensions,
- traiter les corrélations les plus générales possibles (Dobrushin-Shlosman — systèmes de spin),
- estimations quantitatives de $\left\langle |u_\varepsilon - u_{\mathrm{hom}}|^2 \right\rangle$ en fonction de ε...

Merci pour votre attention

Inria

Lille

www.inria.com