Problèmes aux limites non homogènes pour l'équation de Schrödinger linéaire et généralisations

Corentin Audiard
UPMC, Laboratoire Jacques-Louis Lions

9 décembre 2011

Plan

Le problème aux limites pour l'équation de Schrödinger libre ou non linéaire (ou similairement l'équation de Korteweg de Vries) est assez bien compris en dimension 1 depuis le début des années 2000 ([Bona-Sun-Zhang02], [Colliander-Kenig02], [Holmer05]).

Théorème (Holmer 05)

Pour $0 \leq s \leq 1/2$, $2 \leq \alpha \leq \frac{5-2s}{1-2s}$, *le problème aux limites*

$$\begin{cases} \partial_t u + i\partial_x^2 u = \lambda |u|^{\alpha-1} u, \ (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,T[\\ u(\cdot,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^+), \\ u(0,\cdot) = \varphi \in H^{s/2+1/4}([0,T]), \end{cases}$$

admet "une unique solution" telle que $u \in C([0,T]; H_x^s) \cap C(\mathbb{R}_x^+; H^{s/2+1/4}([0,T]))$.

Les preuves reposent en général sur l'utilisation de formules explicites, typiquement si u est solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} \partial_t u + i\partial_x^2 u = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{x=0} = \varphi, \\ u(t=0) = 0, \end{aligned}$$

on a par transformée de Laplace $\widehat{u} = e^{-\sqrt{-\delta}x}\widehat{\varphi} = (\chi_{\delta>0} + \chi_{\delta\leq 0})e^{-\sqrt{-\delta}x}\widehat{\varphi}$, ce qui donne en posant sur $\mathbb{R}^+$ $\sigma^2 = \delta$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}+} e^{-i\sigma x} e^{i\sigma^2 t}\widehat{\varphi} 2\sigma d\sigma + \int_{\mathbb{R}-} \widehat{\varphi} e^{-\sqrt{-\delta}x} e^{i\delta t} d\delta.$$

On reconnaît une transformée de Fourier en x, et donc $u_+(\cdot, t) \in \dot{H}^s$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}+} \sigma^{2s} 4\sigma^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\sigma < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}+} \delta^{s+1/2} |\widehat{\varphi}|^2 d\delta < \infty$$

c'est à dire si $\varphi \in \dot{H}^{s/2+1/4}$.

En dimension supérieure à 1, les estimations directes sur la solution explicites ne sont plus viables. La même approche donnerait en effet

$$\widehat{u} = e^{-\sqrt{-\delta+|\eta|^2}x}\widehat{\eta}$$

et on identifie trois zones dans l'ensemble $\{(\delta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}\}$:

- Lorsque $\delta > |\eta|^2$ la phase est complexe (zone $\ll$ hyperbolique $\gg$),
- Lorsque $\delta < |\eta|^2$ la phase est réelle négative (zone $\ll$ elliptique $\gg$),
- Lorsque $\delta = |\eta|^2$ la phase stationne (points $\ll$ glancing $\gg$).

Plan

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + i\Delta u = f, \ (x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t, \\ B(u, \partial_{x_d} u)|_{x_d=0} = \varphi, \ (x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_t, \end{cases} \tag{Sc}$$

On note $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$.

Théorème

Soit $f \in L^2(\Omega; H^{1/2}_{\gamma,t})$, $\varphi \in H^{1,1/4}(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$. On suppose que B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme. Alors le problème aux limites (Sc) admet une unique solution u telle que $u \in H^1_{\gamma,2}(\Omega \times \mathbb{R}_t)$, $(u, \partial_x u)$ admettent une trace en $x_d = 0$, satisfaisant de plus l'estimation

$$\gamma \|u\|^2_{H^1_{\gamma,2}} + \sum_{j=0}^{1} |\partial^j_{x_d} u(0)|^2_{H^{1-j,1/4}_{\gamma,2}} \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|f\|^2_{L^2(H^{1/2}_\gamma)} + |\varphi|^2_{H^{1,1/4}_{\gamma,2}} \right), \tag{1}$$

On note $x = (x', x_d)$ et on utilise la transformée de Fourier-Laplace

$$\widehat{v}(\eta, x_d, \tau) = \iint e^{-(\gamma+i\delta)t - i\eta\cdot x'} v(x,t)dx'dt.$$

ainsi que sa version tangentielle

$$\widehat{\psi}(\eta, \tau) = \iint e^{-(\gamma+i\delta)t - i\eta\cdot x'} \psi(x',t)dx'dt.$$

On note $\tau := \gamma + i\delta$ et dans la suite $\gamma \geq 0$, $\lambda(\tau,\eta) = (|\tau|^2 + |\eta|^4)^{1/4}$. On définit les espaces de Sobolev quasi-homogènes

$$H^m_{\gamma,2}(\Omega \times \mathbb{R}_t) := \{u \in e^{\gamma t}L^2 : \sum_{j=0}^{m} \iint |\partial^j_{x_d}\widehat{u}|^2 \lambda^{2m-j} dx_d d\delta d\eta < \infty\},$$

ainsi que leurs analogues anisotropes sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t$,

$$H^{m,1/4}_{\gamma,2} := \{\varphi \in e^{\gamma t}L^2 : \iint |\widehat{\varphi}|^2 \lambda^{2m} \sqrt{|\tau|} d\delta d\eta < \infty\},$$

Un multiplicateur de Fourier-Laplace A est défini par son symbole a

$$\widehat{Av} = a(\tau, \eta)\widehat{v}$$

L'opérateur A est dit quasi-homogène d'ordre m si $a(s^2\tau, s\eta) = s^m a(\tau, \eta)$, plus généralement il est d'ordre m si

$$a(\tau, \eta) \leq C\lambda(\tau, \eta)^m.$$

Un opérateur d'ordre m est continu $H^k_{\gamma,2} \to H^{k-m}_{\gamma,2}$ pour $k \geq m$. L'opérateur de symbole λ est noté Λ.

On définit $U=(\Lambda u,\partial_{x_d}u)^t$. La fonction u est solution de (Sc) si et seulement si U satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{x_d}U=GU=\begin{pmatrix}0 & \Lambda\\ \frac{i\partial_t-\Delta'}{\Lambda} & 0\end{pmatrix}U+\widetilde{f},\\ FU|_{x_d=0}=\widetilde{\varphi}=\Lambda\varphi,\end{array}\right. \tag{2}$$

où $\widetilde{f}=(0,f)^t$, $F(U_1,U_2)=\Lambda B(U_1/\Lambda,U_2)$. On suppose que B est tel que que F soit un opérateur quasi-homogène d'ordre 0. L'opérateur G est quasi-homogène d'ordre 1, de symbole

$$g(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \dfrac{i\tau-|\eta|^2}{\lambda} & 0\end{pmatrix}.$$

On note $E_-(g(\tau,\eta)):=\{V:\ \lim_{x_d\to\infty}e^{gx_d}V=0\}$.

Proposition

Pour $(\tau, \eta) \in \{Re(\tau) > 0\} \times \mathbb{R}^{d-1} := \mathcal{E}^{++}$, $E^-(\tau, \eta)$ *est de dimension* 1 *et* C^∞.
Il admet de plus un prolongement quasi-homogène continu sur $(\{Re(\tau) \geq 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) \setminus \{0\} := \mathcal{E}^{+*}$.

Définition

On dit que F satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ lorsque son symbole $F(\tau, \eta)$ est une bijection $E^-(\tau, \eta) \to \mathbb{C}$ pour $(\tau, \eta) \in \mathcal{E}^{++}$.
Il satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme lorsque c'est un isomorphisme pour $(\tau, \eta) \in \mathcal{E}^{+*} \setminus \{0\}$.

Proposition

L'opérateur F *satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme si et seulement si* F *est borné* $E^- \to \mathbb{C}$ *ainsi que son inverse.*

Lemme

Si la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme est satisfaite, alors il existe un opérateur S de symbole s, quasi-homogène d'ordre 0, autoadjoint et tel que

$$Re(sg) = \frac{1}{2}(sg + (sg)^*) \gtrsim Re(\tau)/\sqrt{|\tau|}, \tag{K1}$$

$$s \geq I - CF^* F, \tag{K2}$$

(F désigne ici le symbole de F).

Remarque

Dans la construction de s l'inégalité $sg \gtrsim \mathrm{Re}(\tau)/\sqrt{|\tau|}$ est optimale.

Corollaire

Si U est une fonction ≪ suffisamment régulière ≫, alors elle satisfait l'estimation

$$\gamma\|U\|^2_{L^2_\gamma} + |U(0)|^2_{L^2(\partial\Omega;H^{1/4}_\gamma)} \lesssim \frac{1}{\gamma}\|\partial_{x_d} U - GU\|^2_{L^2(\Omega;H^{1/2}_\gamma)} + |FU(0)|_{L^2(\partial\Omega;H^{1/4}_\gamma)}. \quad \text{(EB)}$$

Plus généralement, si $s \in \mathbb{R}$ on a

$$\gamma\|U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;H^s_\gamma)} + |U(0)|^2_{H^{s,1/4}_\gamma}$$

$$\lesssim \frac{1}{\gamma}\|\partial_x U - G_\gamma U\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^+;\ H^{s,1/2}_\gamma\right)} + |FU(0)|^2_{H^{s,1/4}_\gamma} \quad \text{(EBs)}$$

Démonstration.

En multipliant l'équation $\partial_{x_d}\widehat{U} = g\widehat{U} + \widehat{\widehat{f}}$ par $U^t S$ il vient

$$\langle s\widehat{U}(\eta,0,\tau), \widehat{U}(\eta,0,\tau)\rangle + \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty \langle sg\widehat{U}(\eta,x_d,\tau), \widehat{U}(\eta,x_d,\tau)\rangle dx_d\right) = -\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty \langle s\widehat{\widehat{f}}, \widehat{U}(\eta,x_d,\tau)\rangle dx_d\right).$$

On obtient d'après $(K1, K2)$

$$\begin{aligned}|\widehat{U}(\eta,0,\tau)|^2 d + \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{Re}(\tau)\frac{|\widehat{U}(\eta,x_d,\tau)|^2}{\sqrt{|\tau|}} dx_d \quad &\leq \quad C|F\widehat{U}(\eta,0,\tau)|^2 \\ &+ \quad \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{|\tau|}|\widehat{f}|^2/\mathrm{Re}(\tau) dx_d.\end{aligned}$$

Finalement, en multipliant par $\sqrt{|\tau|}$, en intégrant et en utilisant la formule de Plancherel on obtient l'estimation annoncée. Le même raisonnement en multipliant par $\sqrt{|\tau|}\lambda^{2s}$ fournit (EBs). □

Proposition

Soit $U \in L^2_\gamma(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ telle que $\partial_{x_d} U - GU \in L^2 H^{1/2}_{\gamma,t}$, alors U admet une trace sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}_t$. Si de plus $FU(0) \in L^2(\partial\Omega; H^{1/4})$, alors U satisfait l'estimation précédente

$$\gamma \|U\|^2_{L^2} + |U(0)|^2_{L^2(\partial\Omega; H^{1/4}_\gamma)} \lesssim \frac{\|\partial_{x_d} U - GU\|^2_{L^2(\Omega; H^{1/2}_\gamma)}}{\gamma} + |FU(0)|_{L^2(\partial\Omega; H^{1/4})}.$$

Démonstration.

La preuve se base sur la continuité de l'opérateur de trace $(C^\infty_c(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_t), \|\cdot\|_V) \to (C^\infty_c(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t), |\cdot|_{H^{-1/2}_{\gamma,2}})$ où $\|v\|_V = \|v\|_{L^2_\gamma} + \|\partial_{x_d} v - Gv\|_{L^2_\gamma}$.
On prend alors une suite $U_n \to U$, l'estimation a priori implique alors que U_n est de Cauchy dans les « bons »espaces, puis que U satisfait également l'estimation. □

La preuve de l'existence passe par l'introduction d'un problème dual. Pour simplifier on considère les conditions aux limites de Dirichlet.

Proposition

On note $L = \partial_{x_d} - G$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L^* := -\partial_{x_d} - G^*$, $F' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *le produit scalaire sur* $L^2_\gamma(\Omega \times \mathbb{R}_t)$, $(\cdot, \cdot)$ *le produit scalaire sur* $L^2_\gamma(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$. *On a alors la formule de dualité*

$$\forall U, V \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_t), \langle LU, V \rangle = \langle U, L^* V \rangle + (FU(0), MV(0)) + (NU(0), F'V(0)).$$

(avec ici $M = -F'$, $N = -F$*). Le problème dual* $L^*V = f$, $F'V(0) = \psi$ *correspond à l'équation de Schrödinger rétrograde avec conditions aux limites de Dirichlet.*

Soit $E := \{V \in H^1_{-\gamma}(\Omega \times \mathbb{R}_t) : \ F' V(0) = 0\}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} T : L^* E &\to \mathbb{C}, \\ L^* V &\to \langle f, V \rangle + (\varphi, MV(0)). \end{aligned}$$

L'estimation *a priori* implique

$$\begin{aligned} T(L^* V) &\leq \|f\|_{L^2 H^{1/2}_{\gamma,t}} \|V\|_{L^2 H^{-1/2}_{-\gamma,t}} + |\varphi|_{L^2 H^{1/4}_{\gamma,t}} |V(0)|_{L^2 H^{-1/4}_{-\gamma,t}} \\ &\lesssim \|L^* V\|_{L^2_{-\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2 H^{1/2}_{\gamma,t}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} |\varphi|_{L^2 H^{1/4}_{\gamma,t}} \right). \end{aligned}$$

Le théorème de Hahn-Banach fournit alors $U \in L^2_\gamma$ tel que

$$\forall\, V \in E,\ \langle U, L^* V \rangle = \langle f, V \rangle + (\varphi, MV(0)).$$

On peut alors montrer que U est solution au sens des distributions de (2).

Corollaire

Le théorème d'existence et d'unicité reste vrai si on remplace $\mathbb{R}_t$ *par* $]-\infty, T]$*, ou par* $[0, T]$ *avec* $u(x, 0) = 0$*, et la condition de compatibilité* $u(x', 0, 0) = \varphi(x', 0) = f(x, 0) = 0$*.*

Démonstration.

La preuve repose sur un principe de causalité (données nulles pour $t \leq 0$ implique solution nulle pour $t \leq 0$). Si ce résultat est prouvé, il suffit pour obtenir une solution sur $]-\infty, T]$ de prolonger φ et f sur $\mathbb{R}_t$ et d'utiliser le principe de causalité, qui assure que la solution obtenue est indépendante du prolongement.
L'existence d'une solution pour une donnée initiale nulle se fait de la même manière en prolongeant φ et f par 0 pour $t \leq 0$. □

Plan

On établit ici l'existence et l'unicité d'une solution à

$$\begin{cases} \partial_t u + i\Delta u = f,\ (x,t) \in \Omega \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0,\ x \in \Omega \\ u(0, \cdot) = \varphi,\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

avec éventuellement $T = \infty$.

Comme condition de compatibilité on supposera que φ (resp. u_0) est ≪ plate ≫ en $t = 0$ (resp $x_d = 0$).

Soit $\chi \in C_c^\infty([0, T[)$, $\chi(0) = 1$. Si u_0 est une fonction régulière, il suffit d'appliquer le corollaire précédent au problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u_b + i\Delta u_b = f - (\partial_t + i\Delta)(\chi(t) u_0),\ (x,t) \in \Omega \times [0, T] \\ u_b(\cdot, 0) = 0,\ x \in \Omega \\ u_b(0, \cdot) = \varphi - \chi(t) u_0(x', 0),\ (x', t) \in \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

pour obtenir une solution $u = \chi u_0 + u_b$ du problème mixte. L'estimation clé dans le cas général est la suivante :

$$\begin{aligned} \forall\, t > 0,\ e^{-\gamma t} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2_\gamma([0,t];H^1)} + |\partial_{x_d} u(0)|_{H^{1/2}_{\gamma,2}} \quad &\lesssim \quad \|f\|_{H^1_{\gamma,2}(\Omega\times[0,t])} \\ + |\varphi|_{H^{3/2}_{\gamma,2}(\partial\Omega\times[0,t])} \quad &+ \quad \|u_0\|_{H^1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Stratégie de la preuve :

- Obtenir une estimation ponctuelle en temps pour le problème au limites pur dual,
- En déduire une estimation L^2 pour le problème mixte,
- En déduire l'estimation ponctuelle en temps pour le problème mixte.

Remarque

On ne sait pas montrer directement l'estimation

$$\begin{aligned} \forall\, t > 0,\ \|u\|_{L^2_\gamma([0,t];H^1)} + |\partial_{x_d} u(0)|_{H^{1/2}_{\gamma,2}} &\lesssim \|f\|_{H^1_{\gamma,2}(\Omega\times[0,t])} + |\varphi|_{H^{3/2}_{\gamma,2}(\partial\Omega\times[0,t])} \\ &+ \|u_0\|_{H^1}, \end{aligned} \tag{4}$$

(qui correspond en fait à la deuxième étape de la preuve).
Si c'était le cas, il suffirait d'appliquer une méthode d'énergie directe pour obtenir (3).

Proposition

Soit $T \in \mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R})$, $g \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ et v solution du problème dual

$$\begin{cases} -\partial_t v - i\Delta v = g, \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ v(0,\cdot) = \psi, \ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_t. \end{cases}$$

Alors v satisfait l'estimation a priori

$$\begin{aligned} e^{2\gamma T}\|v(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad &+ \quad \gamma\|v\|^2_{L^2_{-\gamma}(\Omega\times[T,\infty[)} + \sum_{j=0}^{1} |\partial^j_{x_d} v|^2_{H^{-j,1/4}_{-\gamma}(\partial\Omega\times[T,\infty[)} \\ &\leq \quad C\left(\frac{1}{\gamma}\|g\|^2_{L^2_{-\gamma}(\Omega\times[T,\infty[)} + |\psi|^2_{H^{0,1/4}_{-\gamma,2}(\partial\Omega\times[T,\infty[)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Proposition

Si f et φ sont régulières, la solution u de (5) satisfait l'estimation a priori

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2_\gamma(\Omega\times[0,\infty[)} + \sum_{j=0}^{1} |\partial^j_{x_d} u|^2_{H^{-j,1/4}_\gamma(\partial\Omega\times[0,\infty[)} &\lesssim \|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega\times[0,\infty[)} \\ &+ |\varphi|^2_{H^{0,1/4}_\gamma(\partial\Omega\times[0,\infty[)} + \|u_0\|^2_{L^2} \quad (6) \end{aligned}$$

Corollaire

L'estimation précédente reste vraie en remplaçant $[0,\infty[$ *par* $[0,T]$.

Théorème

Le problème aux limites (5) *admet une unique solution dans* $C([0,T];H^1)$ *telle que les fonctions* u *et* $\partial_{x_d} u$ *ont une trace en* $x_d = 0$ *et on a l'estimation* (3)

$$\begin{aligned}\forall\, t>0,\ e^{-\gamma t}\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2_\gamma([0,t];H^1)} + |\partial_{x_d} u(0)|_{H^{1/2}_{\gamma,2}} &\lesssim \|f\|_{H^1_{\gamma,2}(\Omega\times[0,t])} \\ +|\varphi|_{H^{3/2}_{\gamma,2}(\partial\Omega\times[0,t])} &+ \|u_0\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Démonstration.

La preuve de (3) est analogue à celle pour le problème dual.
Pour obtenir une solution du problème mixte, on prend une suite de solutions u_n associées à des données régularisées, l'estimation (3) montre que (u_n) est de Cauchy, et la limite est solution du problème mixte. □

Plan

Une grande partie des preuves se base uniquement sur deux propriétés élémentaires de l'opérateur de Schrödinger :

- Son symbole $\tau - i|\xi|^2$ a une racine imaginaire pure en tau (simple puisque c'est la seule),
- Le symbole $\tau - i|\xi|^2$ est quasi-homogène,

La quasi-homogénéité n'est pas absolument nécessaire, en fait il est nécessaire de s'affranchir de cette condition si l'on veut traiter par exemple l'équation de Schrödinger avec un terme d'advection supplémentaire :

$$\partial_t u + c\partial_x u + i\partial_x^2 u = 0.$$

À l'inverse, il est connu que le problème

$$\partial_t u + ic\partial_x u + i\partial_x^2 u = 0,$$

est mal posé si $c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ il est nécessaire d'assurer une certaine $\ll$ stabilité spectrale $\gg$ du symbole.

Définition

Soit p un entier strictement plus grand que 1.
On définit le p-degré d'un monôme $d^\circ(\tau^k\xi^\alpha) = |\alpha| + pk$. Le p-degré d'un polynôme est le plus grand p-degré de ses monômes, la partie $p-$principale est la somme de ses monômes de $p-$degré maximal.
On dit qu'un opérateur différentiel matriciel L est *strictement dispersif* lorsque les racines en τ du déterminant de son symbole $\det(L(\tau,\xi))$ sont imaginaires pures pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, et que les racines de la partie $p-$principale de $\det(L(\tau,\xi))$ sont simples.

Proposition

Soit mp le $p-$degré de L. Si L est strictement dispersif, pour tout opérateur Q de p degré au plus $p(m-1)$ les racines en τ de $(L+Q)(\tau,\xi)$ sont de partie réelle bornée uniformément en $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Ce qui ne change pas :

- On peut reformuler le problème aux limites $Lu = f$, $BU = \varphi$ sous la forme $\partial_{x_d} U = GU + \widetilde{f}$, $FU(0) = \widetilde{\varphi}$, G d'ordre 1, F d'ordre 0.
- La structure de G reste $\ll$ la même $\gg$, en particulier on peut définir un prolongement des espaces stables et une condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme.
- Le symbole g a une structure par bloc similaire, que l'on peut utiliser pour construire des symétriseurs.
- On peut déduire d'une estimation *a priori* la nature bien posée du problème aux limites pur comme du problème aux limites à données initiales nulles posé sur $[0, T]$.

Ce qui change :

- Les opérateurs ne sont plus quasi-homogènes, au lieu d'utiliser la quasi-homogénéité on doit utiliser les variables $(\widehat{\eta}, \widehat{\tau}, \varepsilon) := (\eta/\lambda, \tau/\lambda^p, 1/\lambda)$. La limite $\varepsilon \to 0$ correspond alors aux hautes fréquences (asymptotique quasi-homogène).
- On peut ne pas avoir $\text{Re}(sg) \gtrsim \text{Re}(\tau)/|\tau|^{(p-1)/p}$. Dans le cas général on a seulement $\text{Re}(sg) \gtrsim \text{Re}(\tau)/\lambda(\tau,\eta)^{p-1}$.
- L'existence et unicité pour le problème mixte est ouverte (les estimations obtenues en multipliant par $\overline{u}$ et en intégrant doivent être convenablement adaptées).

Théorème

Soit L un opérateur strictement dispersif d'ordre mp, B satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskiĭ uniforme, alors le problème aux limites

$$\begin{cases} Lu = f, \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ B(u, \partial_{x_d} u, \cdots, \partial_{x_d}^{mp-1} u)|_{x_d=0} = \varphi, \ (x',t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_t, \end{cases} \tag{7}$$

admet une unique solution dans $H^{mp-1}_{\gamma,p}$ pour γ assez grand.

L'analyse à coefficients variables est délicate pour une raison évidente : si G est un opérateur *pseudo-différentiel* d'ordre 1, $\mathrm{Re}(sg) \gtrsim \mathrm{Re}(\tau)/\lambda$ ne permet pas d'appliquer l'inégalité de Gårding précisée.

Théorème

Soit L strictement dispersif d'ordre mp. On suppose que les termes de p−degré $\geq p(m-1)+2$ sont constants, et que les coefficients des termes d'ordre inférieur sont des fonctions régulières bornées ainsi que leurs dérivées. Alors le problème aux limites

$$\begin{cases} Lu = f,\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ B(u, \partial_{x_d} u, \cdots, \partial_{x_d}^{mp-1} u)|_{x_d=0} = \varphi,\ (x', t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_t, \end{cases}$$

admet une unique solution dans $H^{mp-1}_{\gamma,p}$ pour γ assez grand.

Merci pour votre attention !