

# Ondes planes progressives dans le système d'Euler-Korteweg

# Plan

- 1 Système d'Euler–Korteweg
- 2 Ondes progressives
- 3 Stabilité des ondes progressives
  - Kinks
  - Solitons
  - Ondes périodiques

# Modèle général

Principe variationnel pour le lagrangien  $\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2 - \mathcal{E}$  :

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho$  = masse volumique,  $\mathbf{u}$  = vitesse,  $\mathcal{E}$  = énergie volumique,  
 $E_\rho \mathcal{E}$  = dérivée variationnelle de  $\mathcal{E}$  (par rapport à  $\rho$ ).

# Modèle général

Principe variationnel pour le lagrangien  $\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2 - \mathcal{E}$  :

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho$  = masse volumique,  $\mathbf{u}$  = vitesse,  $\mathcal{E}$  = énergie volumique,  
 $E_\rho \mathcal{E}$  = dérivée variationnelle de  $\mathcal{E}$  (par rapport à  $\rho$ ).

- **Fluides compressibles standard** :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho)$ ,  $E_\rho \mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{d\rho}$ .

➔ équations d'**Euler** « compressibles ».

# Modèle général

Principe variationnel pour le lagrangien  $\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2 - \mathcal{E}$  :

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho$  = masse volumique,  $\mathbf{u}$  = vitesse,  $\mathcal{E}$  = énergie volumique,  
 $E_\rho \mathcal{E}$  = dérivée variationnelle de  $\mathcal{E}$  (par rapport à  $\rho$ ).

- **Fluides compressibles standard** :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho)$ ,  $E_\rho \mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{d\rho}$ .  
 ➔ équations d'**Euler** « compressibles ».
- **Fluides capillaires** :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \nabla \rho)$ ,

$$E_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - \sum_{j=1}^d D_{x_j} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{x_j}} \right).$$

## Cas particuliers

**Théorie de la capillarité** (Rayleigh, van der Waals, Korteweg, cf [Rowlinson & Widom'82]) :

$$\mathcal{E}(\rho, \nabla \rho) = F(\rho) + \frac{1}{2} K(\rho) \|\nabla \rho\|^2.$$

## Cas particuliers

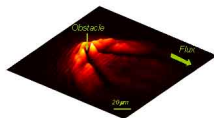
**Théorie de la capillarité** (Rayleigh, van der Waals, Korteweg, cf [Rowlinson & Widom'82]) :

$$\mathcal{E}(\rho, \nabla\rho) = F(\rho) + \frac{1}{2} K(\rho) \|\nabla\rho\|^2.$$

**Fluides quantiques** (Schrödinger, Madelung,...) :

$$\text{(NLS)} \quad i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = \psi F'(|\psi|^2)$$

$$\Downarrow (\psi = \sqrt{\rho}e^{i\phi}, \nabla\phi = \mathbf{u})$$



(A. Bramati, UPMC)

$$\text{(QHD)} \quad \begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \left( F'(\rho) - \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \right) = 0. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\text{(EK)} \quad \text{avec } \rho K(\rho) \equiv 1/4.$$

# Modèle 1D et dynamique des fluides incompressibles 3D

**Équation des filaments** ([Levi-Civita & Da Rios'06], [Hasimoto'72], cf [Arnold & Khesin'98]) :

$$(F) \quad \partial_t \gamma = \partial_x \gamma \wedge \partial_x^2 \gamma, \quad \gamma = \text{paramétrage} \\ \text{du filament.}$$



(U. Pinkall, TU Berlin)



## Modèle 1D et dynamique des fluides incompressibles 3D

**Équation des filaments** ([Levi-Civita & Da Rios'06], [Hasimoto'72], cf [Arnold & Khesin'98]) :

$$(F) \quad \partial_t \gamma = \partial_x \gamma \wedge \partial_x^2 \gamma, \quad \gamma = \text{paramétrage} \\ \text{du filament.}$$

$$\Updownarrow (\psi = k e^{i\phi}, \phi_x = \text{torsion}, k = \text{courbure})$$

$$(NLS1) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi = -\frac{1}{8} \psi |\psi|^2.$$

$$\Downarrow (\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}, u = \phi_x)$$

$$(QHD1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u = \partial_x \left( \frac{\rho}{4} + \frac{\partial_x^2 \sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \right). \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(EK1) \quad \text{avec } \rho K(\rho) \equiv 1/4 \text{ et } F(\rho) = -\rho^2/8.$$

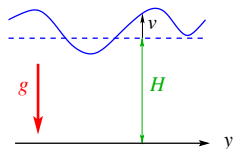


(U. Pinkall, TU Berlin)

## Modèle 1D et vagues

Équation de Boussinesq ([Boussinesq'72], [Bona & Sachs'88]) :

$$(B) \quad \partial_t^2 v - gH \partial_y^2 \left( v + \frac{3}{2H} v^2 + \frac{H^2}{3} \partial_y^2 v \right) = 0.$$



## Modèle 1D et vagues

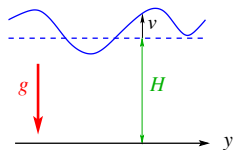
Équation de Boussinesq ([Boussinesq'72], [Bona & Sachs'88]) :

$$(B) \quad \partial_t^2 v - gH \partial_y^2 \left( v + \frac{3}{2H} v^2 + \frac{H^2}{3} \partial_y^2 v \right) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(EKI) \quad \begin{cases} \partial_t v = \partial_y u, \\ \partial_t u - \partial_y f'(v) = -\kappa \partial_y^3 v, \end{cases}$$

avec  $f'(v) = gH \left( v + \frac{3}{2H} v^2 \right)$ ,  $\kappa = -\frac{1}{3} gH^3$ .



## Deux formulations du modèle 1D

**En coordonnées eulériennes :**

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse,  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$E_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

## Deux formulations du modèle 1D

**En coordonnées eulériennes :**

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse,  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$E_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

**En coord. lagrangiennes de masse :**

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y (E_v e), \end{cases}$$

$v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse,  
 $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$E_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - D_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

## Deux formulations du modèle 1D

En coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ (\partial_t + u \partial_x)u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse,  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$E_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

En coord. lagrangiennes de masse :

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y (E_v e), \end{cases}$$

$v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse,  
 $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$E_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - D_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

$$\boxed{dy = \rho dx - \rho u dt} \Leftrightarrow \boxed{dx = v dy + u dt}$$

## Deux formulations du modèle 1D

En coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse,  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$\mathbf{E}_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

En coord. lagrangiennes de masse :

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\mathbf{E}_v e), \end{cases}$$

$v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse,  
 $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$\mathbf{E}_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - D_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

$$\boxed{dy = \rho dx - \rho u dt} \Leftrightarrow \boxed{dx = v dy + u dt}$$

$$\partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = -\partial_y(\mathbf{E}_v e)$$

## Deux formulations du modèle 1D

En coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

 $\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$\mathbf{E}_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - \mathbf{D}_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

En coord. lagrangiennes de masse :

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\mathbf{E}_v e), \end{cases}$$

 $v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse, $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$\mathbf{E}_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - \mathbf{D}_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

$$\boxed{dy = \rho dx - \rho u dt} \Leftrightarrow \boxed{dx = v dy + u dt}$$

$$\partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = -\partial_y(\mathbf{E}_v e)$$

$$\text{car } \rho \partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = -\partial_x \Sigma, \quad \Sigma := \mathcal{E} - \rho \mathbf{E}_\rho \mathcal{E} - \rho_x \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x}$$



## Deux formulations du modèle 1D

En coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

 $\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$\mathbf{E}_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

En coord. lagrangiennes de masse :

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\mathbf{E}_v e), \end{cases}$$

 $v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse, $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$\mathbf{E}_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - D_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

$$\boxed{dy = \rho dx - \rho u dt} \Leftrightarrow \boxed{dx = v dy + u dt}$$

$$\partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = -\partial_y(\mathbf{E}_v e)$$

$$\text{car } \rho \partial_x(\mathbf{E}_\rho \mathcal{E}) = -\partial_x \Sigma, \quad \Sigma := \mathcal{E} - \rho \mathbf{E}_\rho \mathcal{E} - \rho_x \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} = \mathbf{E}_v e, \quad e = v \mathcal{E}.$$

## Deux formulations du modèle 1D

En coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

$\rho =$  masse volumique,  $u =$  vitesse,  
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)$  énergie volumique,

$$E_\rho \mathcal{E} := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_x} \right)$$

En coord. lagrangiennes de masse :

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(E_v e), \end{cases}$$

$v =$  volume spécifique,  $u =$  vitesse,  
 $e = e(v, v_y)$  énergie spécifique,

$$E_v e := \frac{\partial e}{\partial v} - D_y \left( \frac{\partial e}{\partial v_y} \right)$$

$$\boxed{dy = \rho dx - \rho u dt} \Leftrightarrow \boxed{dx = v dy + u dt}$$

En particulier (Euler-Korteweg) :

$$\mathcal{E}(\rho, \rho_x) = F(\rho) + \frac{1}{2} K(\rho) \rho_x^2 \quad \Leftrightarrow \quad e(v, v_y) = f(v) + \frac{1}{2} \kappa(v) v_y^2,$$

avec  $F(\rho) = \rho f(v)$ ,  $\kappa(v) := \rho^5 K(\rho)$ .

## Nature

**Systèmes linéarisés autour d'états constants :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u + \underline{u}\rho) = 0, \\ \partial_t u + \underline{u}\partial_x u + \partial_x(\text{Hess}\mathcal{E}(\rho)\rho) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\text{Hess}\mathcal{E}(\underline{v})v), \\ \text{Hess}\mathcal{E}(\underline{v}) = -\partial_y \underline{\kappa} \partial_y + \underline{\gamma}, \end{array} \right.$$

$$\underline{K} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_x^2}(\rho, 0), \quad \underline{\Gamma} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho^2}(\rho, 0).$$

$$\underline{\kappa} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial v_y^2}(\underline{v}, 0), \quad \underline{\gamma} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial v_x^2}(\underline{v}, 0).$$

## Nature

**Systèmes linéarisés autour d'états constants :**

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u + \underline{u}\rho) = 0, \\ \partial_t u + \underline{u}\partial_x u + \partial_x(\text{Hess}\mathcal{E}(\rho)\rho) = 0, \end{cases}$$

$$\text{Hess}\mathcal{E}(\rho) = -\partial_x \underline{K} \partial_x + \underline{\Gamma},$$

$$\underline{K} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_x^2}(\rho, 0), \quad \underline{\Gamma} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho^2}(\rho, 0).$$

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\text{Hess}e(\underline{v})v), \end{cases}$$

$$\text{Hess}e(\underline{v}) = -\partial_y \underline{\kappa} \partial_y + \underline{\gamma},$$

$$\underline{\kappa} := \frac{\partial^2 e}{\partial v_y^2}(\underline{v}, 0), \quad \underline{\gamma} := \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}(\underline{v}, 0).$$

**Relations de dispersion :**

$$(\tau + i\underline{u}\xi)^2 + \rho \xi^2 (\underline{\Gamma} + \underline{K}\xi^2) = 0$$

$$\lambda^2 + \zeta^2 (\underline{\gamma} + \underline{\kappa}\zeta^2) = 0$$

## Nature

**Systèmes linéarisés autour d'états constants :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u + \underline{u}\rho) = 0, \\ \partial_t u + \underline{u}\partial_x u + \partial_x(\text{Hess}\mathcal{E}(\rho)\rho) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(\text{Hess}e(\underline{v})v), \\ \text{Hess}e(\underline{v}) = -\partial_y \underline{\kappa} \partial_y + \underline{\gamma}, \end{array} \right.$$

$$\text{Hess}\mathcal{E}(\rho) = -\partial_x \underline{K} \partial_x + \underline{\Gamma},$$

$$\underline{K} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_x^2}(\rho, 0), \quad \underline{\Gamma} := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho^2}(\rho, 0).$$

$$\underline{\kappa} := \frac{\partial^2 e}{\partial v_y^2}(\underline{v}, 0), \quad \underline{\gamma} := \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}(\underline{v}, 0).$$

**Relations de dispersion :**

$$(\underline{K} = \underline{v}^5 \underline{\kappa}, \quad \underline{\Gamma} = \underline{v}^3 \underline{\gamma})$$

$$\boxed{(\tau + i\underline{u}\xi)^2 + \rho \xi^2 (\underline{\Gamma} + \underline{K} \xi^2) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda^2 + \zeta^2 (\underline{\gamma} + \underline{\kappa} \zeta^2) = 0}$$

→ états constants stables si  $\underline{\gamma} > 0, \underline{\kappa} > 0$ .  $(\lambda = \tau + i\underline{u}\xi, \zeta = \underline{v}\xi)$

→ instabilités basses fréquences si  $\underline{\gamma} < 0, \underline{\kappa} > 0$ .

→ instabilités hautes fréquences si  $\underline{\gamma} > 0, \underline{\kappa} < 0$ .

## Problème de Cauchy

**Théorème** ([SBG,Danchin & Descombes'06] EJDE)

*Si  $(\underline{v}, \underline{u})$  est une solution régulière globale du système d'Euler–Korteweg 1D en coordonnées lagrangiennes de masse (EKI), le problème de Cauchy pour (EKI) est localement bien posé dans  $(\underline{v}, \underline{u}) + (H^{k+1} \times H^k)$ ,  $k \geq 2$ .*

**Théorème** ([SBG,Danchin & Descombes'07] IUMJ)

*Si  $(\rho, \underline{u})$  est une solution régulière globale du système d'Euler–Korteweg (EK) en dimension  $d$ , le problème de Cauchy pour (EK) est localement bien posé dans  $(\rho, \underline{u}) + (H^{s+1} \times H^s)$ ,  $s > d/2 + 1$ .*

# Problème de Cauchy

**Théorème** ([SBG,Danchin & Descombes'06] EJDE)

*Si  $(\underline{v}, \underline{u})$  est une solution régulière globale du système d'Euler-Korteweg 1D en coordonnées lagrangiennes de masse (EKI), le problème de Cauchy pour (EKI) est localement bien posé dans  $(\underline{v}, \underline{u}) + (H^{k+1} \times H^k)$ ,  $k \geq 2$ .*

Cf aussi, sur (B) (cas  $\kappa \equiv 1$ ) : explosion en temps fini [Kalantarov and Ladyzhenskaya'78] ; [Bona & Sachs'88].

**Théorème** ([SBG,Danchin & Descombes'07] IUMJ)

*Si  $(\rho, \underline{u})$  est une solution régulière globale du système d'Euler-Korteweg (EK) en dimension  $d$ , le problème de Cauchy pour (EK) est localement bien posé dans  $(\rho, \underline{u}) + (H^{s+1} \times H^s)$ ,  $s > d/2 + 1$ .*

Cf aussi, sur (NSL) et (QHD) (cas  $\rho K \equiv 1/4$ ) : [Zhidkov'01], [Gallo'08] ; existence globale de solutions faibles [Antonelli & Marcati'09-11], [Carles, Danchin & Saut'11], etc.

# Plan

- 1 Système d'Euler–Korteweg
- 2 Ondes progressives
- 3 Stabilité des ondes progressives
  - Kinks
  - Solitons
  - Ondes périodiques



## Équations des profils

**Coordonnées eulériennes :** $(\rho, u) = (R, U)(x - \sigma t)$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} D_\xi(R(U - \sigma)) = 0, \\ (U - \sigma)D_\xi U + D_\xi(E_\rho \mathcal{E}) = 0. \end{cases}$$

**Coordonnées lagrangiennes :** $(v, u) = (V, W)(y + jt)$  solution de

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(E_v e), \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} D_\zeta(W - jV) = 0, \\ D_\zeta(E_v e - jW) = 0. \end{cases}$$

## Équations des profils

**Coordonnées eulériennes :** $(\rho, u) = (R, U)(x - \sigma t)$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ (U - \sigma)D_\xi U + D_\xi(E_\rho \mathcal{E}) = 0. \end{cases}$$

**Coordonnées lagrangiennes :** $(v, u) = (V, W)(y + jt)$  solution de

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(E_v e), \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ D_\zeta(E_v e - jW) = 0. \end{cases}$$

## Équations des profils

Coordonnées eulériennes :

 $(\rho, u) = (R, U)(x - \sigma t)$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ (U - \sigma)D_\xi U + D_\xi(E_\rho \mathcal{E}) = 0. \end{cases}$$

Coordonnées lagrangiennes :

 $(v, u) = (V, W)(y + jt)$  solution de

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(E_v e), \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ D_\zeta(E_v e - jW) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(\xi)V(Y(\xi)) &= 1, \quad U(\xi) = W(Y(\xi)), \\ \frac{dY}{d\xi} &= R = \frac{1}{V(Y)}. \end{aligned}$$

## Équations des profils

**Coordonnées eulériennes :** $(\rho, u) = (R, U)(x - \sigma t)$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(E_\rho \mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ (U - \sigma)D_\xi U + D_\xi(E_\rho \mathcal{E}) = 0. \end{cases}$$

**Coordonnées lagrangiennes :** $(v, u) = (V, W)(y + jt)$  solution de

$$\begin{cases} d_t v = \partial_y u, \\ d_t u = \partial_y(E_v e), \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ D_\zeta(E_v e - jW) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(\xi)V(Y(\xi)) &= 1, \quad U(\xi) = W(Y(\xi)), \\ \frac{dY}{d\xi} &= R = \frac{1}{V(Y)}. \end{aligned}$$

**Proposition** Les relations ci-dessus définissent une bijection entre les ondes progressives eulériennes (t.q.  $\overline{R(\mathbb{R})}$  compact de  $\mathbb{R}^{+*}$ ) et les ondes progressives lagrangiennes (t.q.  $\overline{V(\mathbb{R})}$  compact de  $\mathbb{R}^{+*}$ ).

# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

- une solution onde progressive eulerienne est telle que  
 $u(\chi, t) = U(\chi - \sigma t)$

# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

- une solution onde progressive eulerienne est telle que  
 $u(\chi, t) = U(\chi - \sigma t) \Rightarrow \partial_t(\chi - \sigma t) = U(\chi - \sigma t) - \sigma$

# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

- une solution onde progressive eulerienne est telle que

$$u(\chi, t) = U(\chi - \sigma t) \Rightarrow \partial_t(\chi - \sigma t) = U(\chi - \sigma t) - \sigma = j/R(\chi - \sigma t)$$



# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

- une solution onde progressive eulerienne est telle que

$$u(\chi, t) = U(\chi - \sigma t) \Rightarrow \partial_t(\chi - \sigma t) = U(\chi - \sigma t) - \sigma = j/R(\chi - \sigma t) \\ \Rightarrow \partial_t(Y(\chi - \sigma t)) = j \text{ avec } \frac{dY}{d\xi} = R.$$

# Pourquoi ça marche

## Point de vue abstrait :

- les solutions des deux systèmes d'EDP sont reliées par

$$\rho(\chi(\xi, t), t) v(y_0(\xi), t) = 1, \quad u(\chi(\xi, t), t) = w(y_0(\xi), t),$$

$$\partial_t \chi = u(\chi, t), \quad \chi(\xi, 0) = \xi, \quad \frac{dy_0}{d\xi} = \rho_0(\xi) = \rho(\xi, 0).$$

- une solution onde progressive eulerienne est telle que

$$u(\chi, t) = U(\chi - \sigma t) \Rightarrow \partial_t(\chi - \sigma t) = U(\chi - \sigma t) - \sigma = j/R(\chi - \sigma t) \\ \Rightarrow \partial_t(Y(\chi - \sigma t)) = j \text{ avec } \frac{dY}{d\xi} = R. \text{ Finalement,}$$

$$\boxed{Y(\chi(\xi, t) - \sigma t) = Y(\xi) + j t} \quad \blacktriangleleft \text{ formule-clé de « conjugaison ».}$$

## Pourquoi ça marche, concrètement

Les équations de profils sont des équations d'**Euler-Lagrange** [Benjamin'72].

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ E_\rho \mathcal{L} = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{E} - \frac{j^2}{2\rho} - \mu\rho.$$

## Pourquoi ça marche, concrètement

Les équations de profils sont des équations d'**Euler-Lagrange** [Benjamin'72].

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ E_\rho \mathcal{L} = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{E} - \frac{j^2}{2\rho} - \mu\rho.$$

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ E_v \ell = 0, \end{cases}$$

$$\ell := \mathcal{E} - \frac{j^2 v^2}{2} - \lambda v.$$

## Pourquoi ça marche, concrètement

Les équations de profils sont des équations d'**Euler-Lagrange** [Benjamin'72].

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ E_\rho \mathcal{L} = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{E} - \frac{j^2}{2\rho} - \mu\rho.$$

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ E_v l = 0, \end{cases}$$

$$l := \mathcal{E} - \frac{j^2 v^2}{2} - \lambda v.$$

$$\blacktriangleright \boxed{E_\rho \mathcal{L} = -v E_v l - L_v l - \mu, \quad E_v l = -\rho E_\rho \mathcal{L} - L_\rho \mathcal{L} - \lambda} \blacktriangleleft$$

$$L_\rho \mathcal{L} := \rho_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_x} - \mathcal{L}, \quad L_v l := v_y \frac{\partial l}{\partial v_y} - l,$$

## Pourquoi ça marche, concrètement

Les équations de profils sont des équations d'**Euler-Lagrange** [Benjamin'72].

$$\begin{cases} R(U - \sigma) \equiv j, \\ E_\rho \mathcal{L} = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{E} - \frac{j^2}{2\rho} - \mu\rho.$$

$$\begin{cases} W - jV \equiv \sigma, \\ E_v l = 0, \end{cases}$$

$$l := \mathcal{E} - \frac{j^2 v^2}{2} - \lambda v.$$

$$\blacktriangleright \boxed{E_\rho \mathcal{L} = -v E_v l - L_v l - \mu, \quad E_v l = -\rho E_\rho \mathcal{L} - L_\rho \mathcal{L} - \lambda} \blacktriangleleft$$

$$L_\rho \mathcal{L} := \rho_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_x} - \mathcal{L}, \quad L_v l := v_y \frac{\partial l}{\partial v_y} - l,$$

$$\boxed{\begin{cases} E_\rho \mathcal{L} = 0 \\ L_\rho \mathcal{L} = -\lambda \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} E_v l = 0 \\ L_v l = -\mu \end{cases}}$$

## Types d'ondes progressives

- Ondes hétéroclines, ou « *kinks* », déterminées par  $(\rho_-, \rho_+, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_{\pm}, 0) + \frac{j^2}{2\rho_{\pm}^2} = \mu, \quad \mathcal{E}(\rho_{\pm}, 0) - \frac{j^2}{2\rho_{\pm}} - \mu \rho_{\pm} = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites hétéroclines de **dimension deux**.

## Types d'ondes progressives

- Ondes hétéroclines, ou « *kinks* », déterminées par  $(\rho_-, \rho_+, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_{\pm}, 0) + \frac{j^2}{2\rho_{\pm}^2} = \mu, \quad \mathcal{E}(\rho_{\pm}, 0) - \frac{j^2}{2\rho_{\pm}} - \mu \rho_{\pm} = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites hétéroclines de **dimension deux**.

- Ondes homoclines, ou *solitons*, déterminées par  $(\rho_{\infty}, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_{\infty}, 0) + \frac{j^2}{2\rho_{\infty}^2} = \mu, \quad \mathcal{E}(\rho_{\infty}, 0) - \frac{j^2}{2\rho_{\infty}} - \mu \rho_{\infty} = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites homoclines de **dimension trois**.



## Types d'ondes progressives

- Ondes hétéroclines, ou « *kinks* », déterminées par  $(\rho_{\pm}, \rho_{\pm}, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_{\pm}, 0) + \frac{j^2}{2\rho_{\pm}^2} = \mu, \quad \mathcal{E}(\rho_{\pm}, 0) - \frac{j^2}{2\rho_{\pm}} - \mu \rho_{\pm} = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites hétéroclines de **dimension deux**.

- Ondes homoclines, ou *solitons*, déterminées par  $(\rho_{\infty}, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_{\infty}, 0) + \frac{j^2}{2\rho_{\infty}^2} = \mu, \quad \mathcal{E}(\rho_{\infty}, 0) - \frac{j^2}{2\rho_{\infty}} - \mu \rho_{\infty} = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites homoclines de **dimension trois**.

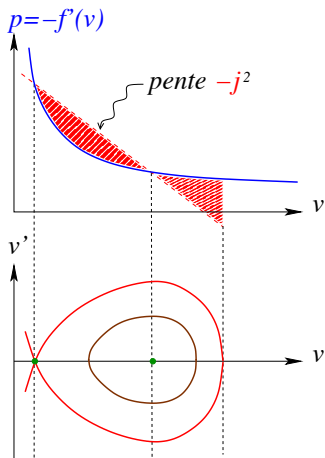
- Ondes *périodiques*, déterminées par  $(\rho_0, j, \sigma, \lambda, \mu)$  t.q.

$$\mathcal{E}(\rho_0, 0) - \frac{j^2}{2\rho_0} - \mu \rho_0 = \lambda.$$

➔ génériquement, variété d'orbites périodiques de **dimension quatre**.

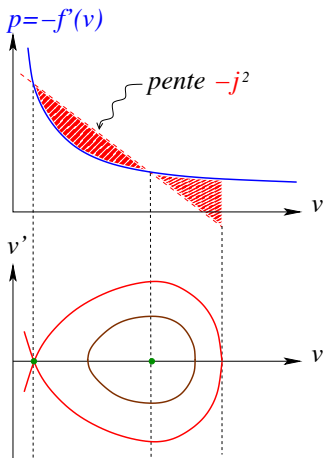
# Portraits de phase typiques

- **Pression convexe :**

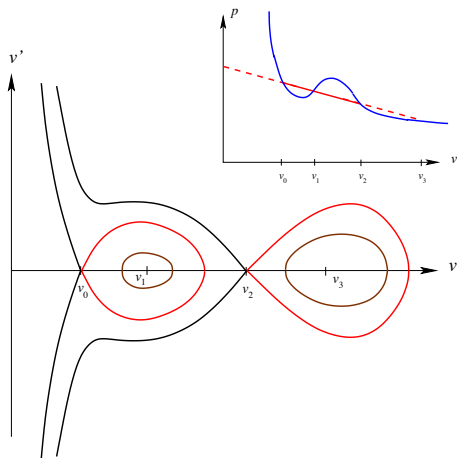


# Portraits de phase typiques

- **Pression convexe :**

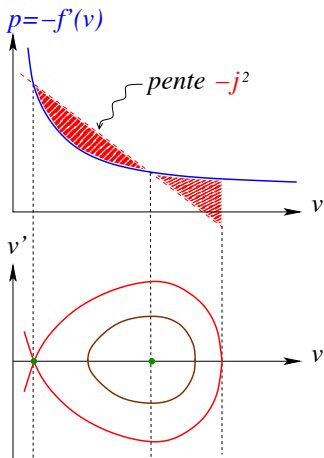


- **Pression non convexe :**

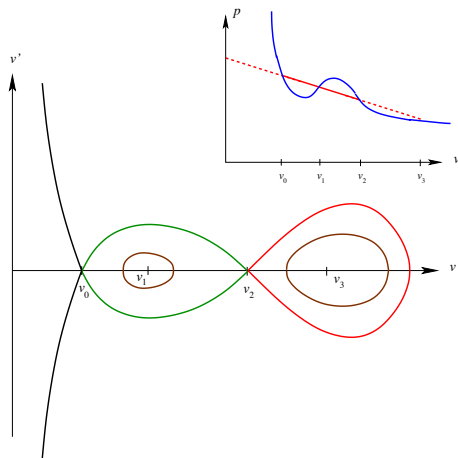


# Portraits de phase typiques

- **Pression convexe :**

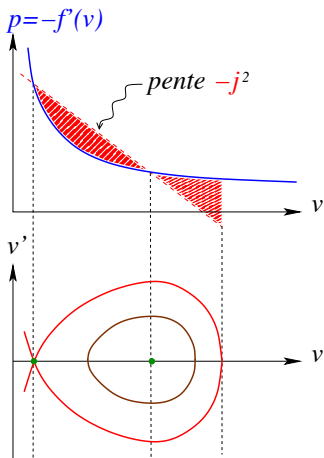


- **Pression non convexe :**

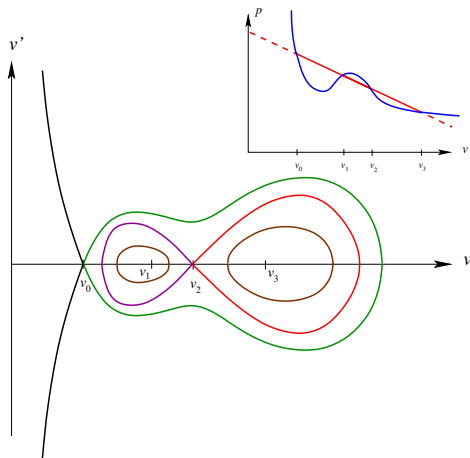


# Portraits de phase typiques

- **Pression convexe :**



- **Pression non convexe :**



# Plan

- 1 Système d'Euler–Korteweg
- 2 Ondes progressives
- 3 Stabilité des ondes progressives
  - Kinks
  - Solitons
  - Ondes périodiques

# Ondes hétéroclines

Théorème ([SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05])

Les « *kinks* » sont *orbitalement stables*.

# Ondes hétéroclines

Théorème ([SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05])

Les « *kinks* » sont *orbitalement stables* :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall \text{ solution } \mathbf{U} \in \underline{\mathbf{U}} + \mathcal{C}([0, T[; H^3 \times H^2),$

$\max\left(\|\mathbf{U}(0) - \underline{\mathbf{U}}\|_{H^1 \times L^2}, \|\mathbf{U}(0) - \underline{\mathbf{U}}\|_{L^1 \times L^1}\right) < \eta \Rightarrow$

$\forall t \in [0, T[, \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U}(t) - \underline{\mathbf{U}}_s\|_{H^1 \times L^2} < \varepsilon.$



# Ondes hétéroclines

Théorème ([SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05])

Les « *kinks* » sont *orbitalement stables*.

Idée de la démonstration : utiliser

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{L}(\rho, \rho_x) - \mathcal{L}(R, R_x)) dx, \text{ respectivement } \int_{\mathbb{R}} (\ell(v, v_y) - \ell(V, V_y)) dy$$

comme une fonction de **Lyapunov**.

# Ondes hétéroclines

Théorème ([SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05])

Les « *kinks* » sont *orbitalement stables*.

Idée de la démonstration : utiliser

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{L}(\rho, \rho_x) - \mathcal{L}(R, R_x)) dx, \text{ respectivement } \int_{\mathbb{R}} (\ell(v, v_y) - \ell(V, V_y)) dy$$

comme une fonction de **Lyapunov**.

## Remarque

Ça marche grâce à la monotonie de  $R$  et de  $V$ , qui impliquent

$$\text{Hess}\mathcal{L}(R) \geq 0, \quad \text{Hess}\ell(V) \geq 0,$$

ces hessiennes étant des opérateurs de **Sturm–Liouville**, de noyaux engendrés par  $R_x$  et  $V_y$  respectivement.

# Hamiltoniens, moments de Benjamin

En fait, les « vraies » fonctions de Lyapunov sont

 en coordonnées eulériennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u] dx$$

 en coordonnées lagrangiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [h(v, u, v_y) - j \rho - \lambda_1 v - \lambda_2 u] dy$$

## Hamiltoniens, moments de Benjamin

En fait, les « vraies » fonctions de Lyapunov sont

 en coordonnées eulériennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u] dx$$

$$\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) = \mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

 en coordonnées lagrangiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [h(v, u, v_y) - j\rho - \lambda_1 v - \lambda_2 u] dy$$

$$h(v, u, v_y) = e(v, v_y) + \frac{1}{2} u^2,$$

# Hamiltoniens, moments de Benjamin

En fait, les « vraies » fonctions de Lyapunov sont

 en coordonnées eulériennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u] dx$$

$$\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) = \mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

$$\mathcal{Q} = \rho u,$$

 en coordonnées lagrangiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [h(v, u, v_y) - j \mathcal{P} - \lambda_1 v - \lambda_2 u] dy$$

$$h(v, u, v_y) = e(v, v_y) + \frac{1}{2} u^2,$$

$$\mathcal{P} = vu,$$

# Hamiltoniens, moments de Benjamin

En fait, les « vraies » fonctions de **Lyapunov** sont

 en coordonnées eulériennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u] dx$$

$$\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) = \mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

$$\mathcal{Q} = \rho u,$$

$$\mu_1 = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \quad \mu_2 = j.$$

 en coordonnées lagrangiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [h(v, u, v_y) - j \rho - \lambda_1 v - \lambda_2 u] dy$$

$$h(v, u, v_y) = e(v, v_y) + \frac{1}{2} u^2,$$

$$\rho = v u,$$

$$\lambda_1 = \lambda - j \sigma, \quad \lambda_2 = \sigma.$$

## Hamiltoniens, moments de Benjamin

En fait, les « vraies » fonctions de **Lyapunov** sont

 en coordonnées eulériennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u] dx$$

$$\mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) = \mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

$$\mathcal{Q} = \rho u,$$

$$\mu_1 = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \quad \mu_2 = j.$$

 en coordonnées lagrangiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} [h(v, u, v_y) - j \rho - \lambda_1 v - \lambda_2 u] dy$$

$$h(v, u, v_y) = e(v, v_y) + \frac{1}{2} u^2,$$

$$\rho = v u,$$

$$\lambda_1 = \lambda - j \sigma, \quad \lambda_2 = \sigma.$$

Sous les contraintes  $\rho(u - \sigma) \equiv j$ ,  $u - jv \equiv \sigma$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) - \sigma \mathcal{Q} - \mu_1 \rho - \mu_2 u, \quad \ell = h(v, u, v_y) - j \rho - \lambda_1 v - \lambda_2 u.$$

# Le moment de Boussinesq

Lemme ([SBG'11])

La variété de dimension 3 des solitons est paramétrée par  $(\rho_\infty, j, \sigma)$  et

$$\int \mathcal{M} \, dx = \int m \, dy =: M(\rho_\infty, j, \sigma)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} := & \mathcal{H}(R, U, R_x) - \sigma RU \\ & - \mathcal{H}(\rho_\infty, u_\infty, 0) + \sigma \rho_\infty u_\infty \\ & - \mu_1 R - jU + \mu_1 \rho_\infty + j u_\infty, \end{aligned}$$

$$\mu_1 := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(\rho_\infty, 0) + \frac{j^2}{2\rho_\infty^2} - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$\begin{aligned} m := & h(V, W, V_y) - jVW \\ & - h(v_\infty, u_\infty, 0) + jv_\infty u_\infty \\ & - \lambda_1 V - \sigma W + \lambda_1 v_\infty + \sigma u_\infty, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 := \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}(v_\infty, 0) - j^2 v_\infty - j\sigma,$$

$$\rho_\infty v_\infty = 1, \quad u_\infty = jv_\infty + \sigma.$$



# Stabilité/instabilité des solitons

## Théorème

Soit un soliton homocline à  $(\rho_\infty, u_\infty)$  en coordonnées eulériennes, à  $(v_\infty, u_\infty)$  en coordonnées lagrangiennes, de vitesse  $\sigma$  et de quantité de mouvement relative  $j$ . Soit  $M(\rho_\infty, j, \sigma)$  le moment d'instabilité de *Boussinesq* associé. Alors les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} M(\rho_\infty, \rho_\infty(u_\infty - \sigma), \sigma) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial j^2} M(\rho_\infty, j, u_\infty - jv_\infty)$$

sont de même signe et

- si elles sont strictement positives alors le soliton est *orbitalement stable*,
- si elles sont strictement négatives alors le soliton est *spectralement instable*.

## Stabilité/instabilité des solitons, suite

- Stabilité orbitale par la méthode de [Grillakis–Shatah–Strauss'87].  
**Idée** : la convexité (locale) stricte du moment de Boussinesq implique que « la direction instable » est transverse aux ensembles de niveau du moment de Benjamin.  
[Bona–Sachs'88], [SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05].

## Stabilité/instabilité des solitons, suite

- Stabilité orbitale par la méthode de [Grillakis–Shatah–Strauss'87].  
**Idée** : la convexité (locale) stricte du moment de Boussinesq implique que « la direction instable » est transverse aux ensembles de niveau du moment de Benjamin.  
[Bona–Sachs'88], [SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05].
- Instabilité spectrale par le développement basse fréquence de la fonction d'Evans, comme dans [Pego–Weinstein'92].  
[Liu'93], [Zumbrun'08], [SBG'10].

## Stabilité/instabilité des solitons, suite

- Stabilité orbitale par la méthode de [Grillakis–Shatah–Strauss'87].  
**Idée** : la convexité (locale) stricte du moment de Boussinesq implique que « la direction instable » est transverse aux ensembles de niveau du moment de Benjamin.  
[Bona–Sachs'88], [SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05].
- Instabilité spectrale par le développement basse fréquence de la fonction d'Evans, comme dans [Pego–Weinstein'92].  
[Liu'93], [Zumbrun'08], [SBG'10].

### Theorem ([Höwing'11])

*Tous les solitons sont orbitalement stables si  $f^{(3)}(v) < 0$  ( $\Leftrightarrow$  pression convexe) et  $f^{(4)}(v) \geq 0$ .*

## Stabilité/instabilité des solitons, suite

- Stabilité orbitale par la méthode de [Grillakis–Shatah–Strauss'87].  
**Idée** : la convexité (locale) stricte du moment de Boussinesq implique que « la direction instable » est transverse aux ensembles de niveau du moment de Benjamin.  
 [Bona–Sachs'88], [SBG, Danchin, Descombes & Jamet'05].
- Instabilité spectrale par le développement basse fréquence de la fonction d'Evans, comme dans [Pego–Weinstein'92].  
 [Liu'93], [Zumbrun'08], [SBG'10].

### Theorem ([Höwing'11])

*Tous les solitons sont orbitalement stables si  $f^{(3)}(v) < 0$  ( $\Leftrightarrow$  pression convexe) et  $f^{(4)}(v) \geq 0$ . (Avec  $\kappa \equiv$  constante.)*

Diagrammes de moments convexes/concaves (avec pression non convexe) :  
 [SBG–Danchin–Descombes–Jamet'05] ( $\kappa \equiv$  constante),  
 [Chiron'11] ( $\rho K \equiv 1/4$ ).

# Bon à savoir

- 👉 Conditions nécessaires de **stabilité spectrale** des ondes périodiques :
  - les ondes de **grande longueur d'onde** ne peuvent être stables que si le **soliton limite** l'est [**Gardner**'97],

# Bon à savoir

- 👉 Conditions nécessaires de **stabilité spectrale** des ondes périodiques :
  - les ondes de **grande longueur d'onde** ne peuvent être stables que si le **soliton limite** l'est [[Gardner'97](#)],
  - les **équations modulées** à la **Whitham** doivent être **hyperboliques** [[Serre'05](#)], [[Bronski, Johnson & Zumbrun'09-11](#)], [[SBG,Noble & Rodrigues](#)] (en cours).

# Bon à savoir

- 👉 Conditions nécessaires de **stabilité spectrale** des ondes périodiques :
  - les ondes de **grande longueur d'onde** ne peuvent être stables que si le **soliton limite** l'est [[Gardner'97](#)],
  - les **équations modulées** à la **Whitham** doivent être **hyperboliques** [[Serre'05](#)], [[Bronski, Johnson & Zumbrun'09-11](#)], [[SBG,Noble & Rodrigues](#)] (en cours).
- 👉 la méthode de **Grillakis–Shatah–Strauss** permet de montrer la stabilité par rapport aux **perturbations de même période** [[Gallay–Hărăguș'07](#)] (cf aussi [[Deconinck–Kapitula'10](#)]).



# Analyse spectrale des linéarisés

Dans des repères mobiles attachés aux ondes, les systèmes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = -\partial_\xi (E_u(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})), \\ \partial_t u = -\partial_\xi (E_\rho(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})). \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} d_t v = \partial_\zeta (E_w(k - j\rho)), \\ d_t u = \partial_\zeta (E_v(k - j\rho)). \end{array} \right.$$

# Analyse spectrale des linéarisés

Dans des repères mobiles attachés aux ondes, les systèmes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = -\partial_\xi (E_u(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})), \\ \partial_t u = -\partial_\xi (E_\rho(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})). \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} d_t v = \partial_\zeta (E_w(k - j\rho)), \\ d_t u = \partial_\zeta (E_v(k - j\rho)). \end{array} \right.$$

D'où les équations linéarisées (autour des profils)

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad \left| \quad d_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} := -\partial_\xi \begin{pmatrix} j/R & R \\ \text{Hess}\mathcal{E}(R) & j/R \end{pmatrix}. \quad \left| \quad \mathcal{A} := \partial_\zeta \begin{pmatrix} -j & 1 \\ \text{Hess}e(V) & -j \end{pmatrix}.$$

## Analyse spectrale des linéarisés

Dans des repères mobiles attachés aux ondes, les systèmes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = -\partial_\xi (\mathbf{E}_u(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})), \\ \partial_t u = -\partial_\xi (\mathbf{E}_\rho(\mathcal{H} - \sigma \mathcal{Q})). \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} d_t v = \partial_\zeta (\mathbf{E}_w(h - j\rho)), \\ d_t u = \partial_\zeta (\mathbf{E}_v(h - j\rho)). \end{array} \right.$$

D'où les équations linéarisées (autour des profils)

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad \left| \quad d_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} := -\partial_\xi \begin{pmatrix} j/R & R \\ \text{Hess}\mathcal{E}(R) & j/R \end{pmatrix}. \quad \left| \quad \mathcal{A} := \partial_\zeta \begin{pmatrix} -j & 1 \\ \text{Hess}e(V) & -j \end{pmatrix}.$$

👉 **Floquet–Bloch**  $\Rightarrow$  les spectres de  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\partial_\xi)$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\partial_\zeta)$  dans  $L^p$  sont continus et respectivement constitués des valeurs propres de  $\mathcal{B}_\theta := \mathcal{B}(\partial_\xi + i\theta)$  et  $\mathcal{A}_\theta := \mathcal{A}(\partial_\zeta + i\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

# Un résultat d'instabilité

Théorème ([Serre'94])

Les ondes périodiques telles que  $j = 0$  sont *spectralement instables* en coordonnées lagrangiennes.

# Un résultat d'instabilité

Théorème ([Serre'94])

Les ondes périodiques telles que  $j = 0$  sont *spectralement instables* en coordonnées lagrangiennes.

Schéma de la démonstration :

# Un résultat d'instabilité

Théorème ([Serre'94])

Les ondes périodiques telles que  $j = 0$  sont *spectralement instables* en coordonnées lagrangiennes.

Schéma de la démonstration :

- l'analyse spectrale de  $\text{Hess}_\varepsilon(V) - j^2$  implique l'existence de  $\phi \in L^2_{\text{per}}$  t.q.

$$\langle \partial_\zeta(\text{Hess}_\varepsilon(V) - j^2)\partial_\zeta\phi, \phi \rangle > 0,$$

# Un résultat d'instabilité

Théorème ([Serre'94])

Les ondes périodiques telles que  $j = 0$  sont *spectralement instables* en coordonnées lagrangiennes.

Schéma de la démonstration :

- l'analyse spectrale de  $\text{Hess}_\varepsilon(V) - j^2$  implique l'existence de  $\phi \in L^2_{\text{per}}$  t.q.

$$\langle \partial_\zeta(\text{Hess}_\varepsilon(V) - j^2)\partial_\zeta\phi, \phi \rangle > 0,$$

- élimination de la vitesse dans le problème aux valeurs propres :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} w = (\tau + j\partial_\zeta)z, \partial_\zeta z = v, \\ \partial_\zeta \text{Hess}_\varepsilon(V)\partial_\zeta z = (\tau + j\partial_\zeta)^2 z. \end{cases}$$

# Un résultat de stabilité

Théorème ([Gallay–Hărăguș'07])

Pour (NLS) cubique défocalisante ( $\rho K(\rho) \equiv 4$ ,  $F'(\rho) = \rho$ ), les ondes périodiques sont *orbitalement stables* par rapport aux perturbations de même période, et celles de faible amplitude sont *spectralement stables*.



# Un résultat de stabilité

Théorème ([Gallay–Hărăguș'07])

Pour (NLS) cubique défocalisante ( $\rho K(\rho) \equiv 4$ ,  $F'(\rho) = \rho$ ), les ondes périodiques sont *orbitalement stables* par rapport aux perturbations de même période, et celles de faible amplitude sont *spectralement stables*.

- pas de contradiction avec le résultat précédent !

# Un résultat de stabilité

Théorème ([Gallay–Hărăguș'07])

Pour (NLS) cubique défocalisante ( $\rho K(\rho) \equiv 4$ ,  $F'(\rho) = \rho$ ), les ondes périodiques sont *orbitalement stables* par rapport aux perturbations de même période, et celles de faible amplitude sont *spectralement stables*.

- pas de contradiction avec le résultat précédent !
- pas de conclusion définitive en général.

## En résumé

- Les ondes hétéroclines sont stables en coordonnées eulériennes et lagrangiennes, indépendamment du coefficient de capillarité.
- Pour une loi de pression donnée, il existe des ondes solitaires stables et des ondes solitaires instables, simultanément en coordonnées eulériennes et lagrangiennes, selon la convexité ou non du moment de Boussinesq.
- Les ondes périodiques peuvent être stables ou instables, selon la loi de pression...

## En résumé

- Les ondes hétéroclines sont stables en coordonnées eulériennes et lagrangiennes, indépendamment du coefficient de capillarité. Elles sont « *stabilisées* » par les perturbations transverses en **multi-D** [SBG'01].
- Pour une loi de pression donnée, il existe des ondes solitaires stables et des ondes solitaires instables, simultanément en coordonnées eulériennes et lagrangiennes, selon la convexité ou non du moment de **Boussinesq**. Les ondes solitaires stables sont *déstabilisées* par des perturbations transverses en **multi-D** [SBG'10], [RoussetTzvetkov'10].
- Les ondes périodiques peuvent être stables ou instables, selon la loi de pression...