Quelques petites questions qui m'ont résisté jusqu'à aujourd'hui.

Alain Haraux

Mars 2009

1. Opérateurs monotones et oscillations forcées.

Problème 1.1. (1977) Soit A un opérateur maximal monotone sur un espace de Hilbert réel H, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ presque périodique et u une solution de

$$u' + Au(t) \ni f(t)$$

sur $[0, +\infty)$ d'**image précompacte**. Peut-on en conclure que u est asymptotiquement presque périodique? La réponse est positive si $H = \mathbb{R}^N$ avec $N \leq 2$. Résultat inconnu même si $H = \mathbb{R}^3$.

Référence: Asymptotic behavior for two-dimensional, quasi-autonomous, almost periodic evolution equations, J. Diff. Eq. 66 (1987), 62-70.

La question est naturelle. Tout d'abord l'existence d'une trajectoire précompacte implique l'existence d'au moins une solution presque périodique.

Référence: Nonlinear evolution equations: Global behavior of solutions, Lecture Notes in Math.841, Springer (1981), Theorem 1 p.295-299.

D'autre part le résultat est vrai dans un certain nombre de cas importants

1) Si A est linéaire.

2) Si A est un sous-différentiel.

3) Pour certains opérateurs de la forme $L + \partial\varphi$

4) Si f est périodique.

Référence: A simple almost periodicity criterion and applications, J. Diff. Eq. 66 (1987), 51-61.

Enfin mentionnons l'existence d'un travail où le résultat est annoncé pour N quelconque. Malheureusement la démonstration est erronée car elle revient à se limiter au cas où la variété des solutions presque-périodiques est de dimension ≤ 2.

Référence: Hu, Zuosheng; Mingarelli, Angelo, Almost periodicity of solutions for almost periodic evolution equations, Differential Integral Equations 18 (2005), no.4, 469-480..

Problème 1.2. (1978) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et g une fonction lipschitzienne. On considère le problème hyperbolique semilinéaire

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f(t,x) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

On suppose que $f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\Omega)$ est continue et périodique en t. Supposant

$$u \in C_b(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap C_b^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$$

pouvons-nous conclure que

$$\underset{t\geq 0}{\cup} \{u(t,.), u_t(t,.)\} \text{ est précompact dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)?$$

La réponse est positive dans les cas extrêmes suivants

1) Si $g = 0$.

2) Si g^{-1} est uniformément continue.

Référence: Almost periodic forcing for a wave equation with a nonlinear, local damping term, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 94 A (1983), 195-212.

Je m'attends plutôt à un contre-exemple, sans doute très difficile mais si la compacité avait toujours lieu cela permettrait de simplifier les démonstrations des principaux résultats de

Damping out of transient states for some semi-linear, quasi-autonomous systems of hyperbolic type, Rc. Accad. Naz. Sci. dei 40 (Memorie di Matematica) 101, 7, fasc.7 (1983), 89-136.

2. Théorie des oscillations.

Problème 2.1. (1985) Soit $\Omega = (0, 2l) \times (0, 2l) \subset \mathbb{R}^2$. On considère l'équation des ondes linéaire

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

Pour $T > 0$ donné quelconque, peut-on trouver une solution u telle que

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times (0, l) \times (0, l), \quad u(t, x) > 0?$$

Référence: H & V. KOMORNIK, Oscillations of anharmonic Fourier series and the wave equation. Rev. mat. ibero-americana 1, 4 (1985), 57-77.

Bien entendu la même question se pose pour un ouvert quelconque $\omega \subset \Omega$. D'autre part ce problème est probablement lié à celui de la contrôlabilité spectrale dans l'ouvert $(0, T) \times \omega$. Dans le cas de l'équation des plaques minces

$$u_{tt} + \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \qquad u = \Delta u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

on a des résultats assez précis liés au fait que le spectre en t des solutions est lacunaire, cf:

Références:

H & V. KOMORNIK, On the vibrations of rectangular plates, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 119 A (1991), 47-62.

H& S. JAFFARD) Pointwise and spectral control of plate vibrations, Revista Matematica Iberoamericana 7, 1 (1991), 1-24.

Problème 2.2. (1985)

On considère l'équation des poutres semilinéaire

$$u_{tt} + u_{xxxx} + g(u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times]0,1[, \quad u = u_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0,1\}$$

avec g impaire et croissante au sens large par rapport à u. Est-il possible pour une solution $u(t,.)$ de rester positive en un point x_0 sur un intervalle arbitrairement long (éventuellement non borné)?

Ceci ne peut arriver pour l'équation des ondes semilinéaire, car dans ce cas un temps uniforme oscillation (2l) est connu.

Référence: H & T. CAZENAVE, Oscillatory phenomena associated to semilinear wave equations in one spatial dimension, Trans. A. M. S. 300, 1 (1987), 207-233.

Problème 2.3. (1997) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On considère l'équation de la chaleur

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \Omega, \qquad u = 0 \text{ on } \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

Pour $t > 0$, on considère

$$\mathcal{E} = \{x \in \Omega, \quad u(t,x) \neq 0\}$$

Est-ce que $\mathcal{E}$ a un nombre fini de composantes connexes ?

C'est vrai si N $= 1$ (Angenent) et apparemment aussi for N $= 2$ au moins dans chaque sous-domaine strict $\omega \subset\subset \Omega$ (J'avais un schéma de démonstration basé sur des résultats de Lojasiewicz mais je ne l'ai jamais rédigé). Bien sûr le résult d'Angenent est vrai aussi dans le cas semilinéaire et je m'intéressais surtout au cas semilinéaire multidimensionnel... jusqu'à ce que je réalise que ce n'était pas clair même en linéaire.

Un résultat très partiel, pour t grand:

Référence: M. COMTE & H, The oscillation pattern of solutions to parabolic equations as time goes to infinity, Communications in Contemporary Math.1, 3 (1999), 451-466.

D'autre part le résultat pour le problème stationnaire est bien connu, cf. notamment Courant-Hilbert ou

M. COMTE, H et P. MIRONESCU, Multiplicity and stability topics in semilinear parabolic equations, Differential and integral equations 13 (2000), n0.7-9, 801-811

3. Une équation des ondes non linéaire.

Problème 3.1. (1976)

Pour l'équation très simple

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times (0,1), \quad u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0,1\}$$

Les deux questions suivantes semblent toujours ouvertes

Question 1. Y a -t-il des solutions qui tendent faiblement (au sens de l'énergie) vers 0 pour t infini?

Question 2. Si $(u(0,.), u_t(0,.)) \in H^2((0,1)) \cap H_0^1((0,1)) \times H_0^1((0,1)) := \mathcal{V}$, est-ce que $(u(t,.), u_t(t,.))$ reste borné dans $\mathcal{V}$ pour tout t réel?

Commentaire: la question 1 semble saugrenue pour un système conservatif. En fait si on oublie le laplacien, de nombreuses solutions tendent faiblement vers 0. La question est donc de savoir si c'est l'équation des ondes ou la nonlinéarité qui impose sa loi. Si on remplace u^3 par la non-linéarité "affaiblie"

$$u \int_0^1 u^2 dx$$

le d'Alembertien gagne "presque" toujours: la réponse à la question 1 est négative, celle à la question 2 est positive, et les systèmes projetés en dimension finie ont des solutions "en majorité " récurrentes, et toutes les "petites" solutions en dimension finie sont quasi-périodiques.

Références: T. CAZENAVE, H. et F. B. WEISSLER, A class of nonlinear completely integrable abstract wave equations, J. Dynamics and Differential Equations 5, 1 (1993), 129-154. & Detailed asymptotics for a convex hamiltonian system with two degrees of freedom, J. Dynamics and Differential Equations 5, 1 (1993), 155-187.

Rappelons enfin que le résultat de P. Rabinowitz d'existence de solutions périodiques non-triviales montre au moins que le d'Alembertien gagne parfois...