

Les schémas de Strang pour le transport linéaire

Histoire et Théorie

Bruno Després JLL

Motivations

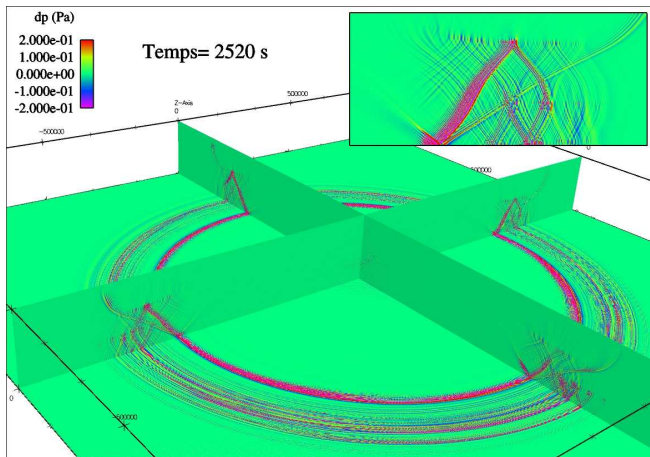
Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Calcul d'aéroacoustique sur le super-calculateur TERA10 du CEA. Maillage de 10^{10} mailles hexagonales.
 \approx Différences Finies : Ecrit par Havé, Delpino + Jourden, D.



Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Le modèle de base est le système d'Euler linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t p_1 + u_0 \partial_x p_1 + \rho_0 c_0^2 (\partial_x u_1 + \partial_y v_1) = 0 \\ \partial_t u_1 + u_0 \partial_x u_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p_1 = 0 \\ \partial_t v_1 + u_0 \partial_x v_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_y p_1 = 0. \end{cases}$$

Les **coefficients** ρ_0 , c_0 et u_0 sont des données. ρ_0 est la densité de l'air, c_0 est la vitesse du son, u_0 est le vent horizontal.

Les **inconnues** sont les écarts de pression et vitesses p_1 , u_1 et v_1 .

Le nombre de **longueur d'onde** est ≥ 100 dans chaque direction.

La **stratégie de discrétisation** repose sur la discrétisation de l'équation du transport par des schémas d'ordre très élevé direction par direction.

Construction des schémas de Strang

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Le symbole en Fourier du transport est : $e^{i\bar{\theta}\Delta x}$.

Le symbole en Fourier du transport sur une longueur $\nu\Delta x = a\Delta t$ est : $e^{i\nu\bar{\theta}\Delta x}$.

Donc si on approche $e^{i\bar{\theta}\Delta x}$ par une série tronquée en $e^{i\nu\bar{\theta}\Delta x}$ avec un résidu à d'ordre $p + 1$, on construit un schéma d'ordre p en temps et en espace.

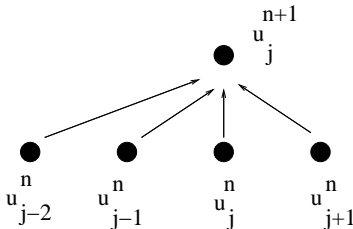


FIG.: Un schéma d'ordre 3 $(p, k) = (3, 1)$. C'est un schéma explicite à $p + 1 = 4$ mailles. Le stencil est décalé de $k = 1$ maille vers la droite.

$P_p (e^{i\theta} - 1) e^{-ki\theta}$ est le symbole du schéma

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Posons $\theta = \bar{\theta} \Delta x$ pour simplifier. On a

$$\begin{aligned} e^{i\nu\theta} &= \left(1 + (e^{i\theta} - 1)\right)^{k+\nu} e^{-ki\theta} \\ &= \left(P_p (e^{i\theta} - 1) + \mathcal{O}(e^{i\theta} - 1)^{p+1}\right) e^{-ki\theta}. \end{aligned}$$

Exemple : $p = 2$ and $k = 0$. Alors

$$\begin{aligned} P_2 (e^{i\theta} - 1) &= 1 + \nu (e^{i\theta} - 1) + \frac{\nu(\nu - 1)}{2} (e^{i\theta} - 1)^2 \\ &= \left(1 - \frac{3}{2}\nu + \frac{1}{2}\nu^2\right) + (2\nu - \nu^2) e^{i\theta} + \frac{-\nu + \nu^2}{2} e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

On obtient le schéma de Beam et Warming

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

1962 : Strang (Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy).

1983 : Iserles-Strang, suivi de Iserles-Norset (Order stars-1991).

1965 : Thomée (Stability of difference schemes in the maximum-norm), suivi de Thomée-Brenner-Wahlbin (Besov spaces and applications to difference methods for initial value problems-1975).

Le chapitre (rédigé par Lascaux-Pironneau) sur les méthodes numériques du Dautray-Lions

2006 : Delpino-Jourdren (CRAS) .

2003 : Daru and C. Tenaud (JCP).

2003 : Titarev-Toro (ADER schemes)

Lemme : Deux schémas avec le même (p, k) sont identiques.

Formule compacte pour le symbole en Fourier : 1

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Posons $f_k(z) = (1+z)^{k+\nu}$.

Lemme : Pour un couple (p, k) donné, le symbole en Fourier du schéma est

$$\lambda(\theta) = \left[f_k \left(e^{i\theta} - 1 \right) - \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} f_k^{(p+1)} \left(t \left(e^{i\theta} - 1 \right) \right) dt \right] e^{-ki\theta}$$

Notons que $\lambda(2\pi - \theta) = \overline{\lambda(\theta)}$.

Preuve : le symbole du schéma (p, k) est

$$\lambda(\theta) = P_p \left(e^{i\theta} - 1 \right) e^{-ki\theta}.$$

Et $P_p(z)$ est le terme principal du développement de Taylor de $f_k(z)$ avec $z = e^{i\theta} - 1$. CQFD.

Formule compacte pour le symbole en Fourier : 2

Motivations

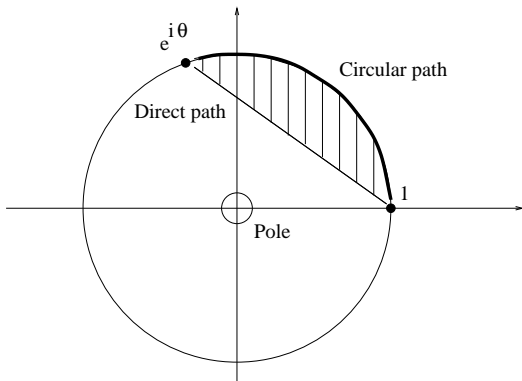
Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

La formule précédente n'est pas agréable, car elle peut être singulière en $\theta = \pi$. On effectue un changement de contour d'intégration



Le contour direct est remplacé par le contour circulaire.

Formule compacte pour le symbole en Fourier : 3

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Tous calculs faits, on trouve

$$\lambda(\theta) = \left[1 - \mathbf{i}^{p+1} \alpha_{k,p} 2^p \int_0^\theta \sin^p \frac{\theta - \varphi}{2} e^{(k - \frac{p}{2} + \nu)\mathbf{i}(\varphi - \theta)} d\varphi \right] e^{\nu\mathbf{i}\theta}$$

$$\text{avec } \alpha_{k,p} = \frac{\prod_{q=0}^p (k + \nu - q)}{p!}.$$

Cette formule n'est plus singulière en $\theta = \pi$.

Les paramètres sont : p , k et $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Elle est compacte et explicite. C'est l'avantage par rapport au travail Iserles-Strang qui utilisait une approche complètement différente.

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

La stabilité dans L^2 s'obtient sous la condition

$$|\lambda(\theta)| \leq 1, \quad \forall \theta.$$

Les paramètres sont : p , k et $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Théorème (Iserles-Strang, D.) : Les seuls couples (p, k) tels que $|\lambda(\theta)| \leq 1$ est vrai $\forall \nu \in]0, 1]$ sont $p = 2k + 1$, $p = 2k$ et $p = 2k + 2$. Pour $p = 2k$ la stabilité L^2 est vraie pour $\nu \leq 2$.

Idee de la preuve : on part de

$$\begin{aligned} & |\lambda(\theta)|^2 \\ &= \left(1 - (-1)^{\frac{p+1}{2}} \alpha_{k,p} 2^p \int_0^\theta \sin^p \frac{\theta - \varphi}{2} \cos \left(k - \frac{p}{2} + \nu \right) (\varphi - \theta) d\varphi \right)^2 \\ &+ + \left(\alpha_{k,p} 2^p \int_0^\theta \sin^p \frac{\theta - \varphi}{2} \sin \left(k - \frac{p}{2} + \nu \right) (\varphi - \theta) d\varphi \right)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Intérêt de l'étude de stabilité dans L^q , $q \neq 2$

Motivations

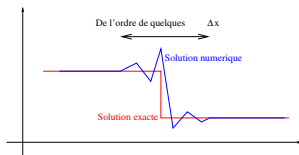
Histoire

Une formule

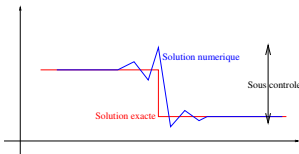
Résultats
numériques

Conclusions

Un schéma stable dans L^1 est aussi TVB (Total Variation Diminishing) : il contrôle l'extention des oscillations.



L^∞ : contrôle de l'amplitude des oscillations.



Un schéma stable dans L^q permet des estimations de convergence optimale en fonction de la régularité des données.

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Soit la matrice d'itération $u_1 = Au_0$, et $u_n = A^n u_0$. On peut le représenter A^n comme une matrice bande infinie

$$A^n = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & b & c & d & e & f & g & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & b & c & d & e & f & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & b & c & d & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & b & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

alors

$$\begin{aligned} \|A^n\|_{L^1} &= \|A^n\|_{L^\infty} = \max_j \sum_i |(A^n)_{i,j}| = \max_i \sum_j |(A^n)_{i,j}| \\ &= \sum_j |(A^n)_j| = \sum_j \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(\theta)^n e^{-ij\theta} d\theta \right|. \end{aligned}$$

Estimations fines sur $a_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(\theta)^n e^{-ij\theta} d\theta$

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Tout d'abord $|a_j^n| \leq 1$. Puis (facile) $|a_j^n| \leq \frac{C}{(\nu n)^{\frac{1}{p+1}}}$, et (plus subtile)

$$|a_j^n| \leq \frac{C}{n^2(\nu - \gamma)^2} (n\nu)^{\frac{1}{p+1}}, \quad \gamma = \frac{j}{n}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_j |a_j^n| &= \sum_{j: |j-n\nu| \leq N} |a_j^n| + \sum_{j: |j-n\nu| > N} |a_j^n|. \\ &\leq 1 + 2N \times \frac{C}{(\nu n)^{\frac{1}{p+1}}} + C(n\nu)^{\frac{1}{p+1}} \left(2 \sum_{j > N} \frac{1}{j^2} \right) \leq C. \end{aligned}$$

C'est une preuve à la Thomée.

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Tout vient de la diffusion des schémas d'ordre impair, laquelle est supérieure à la dispersion.

Pour $p = 2k + 1$

$$\lambda(\theta)e^{-\nu i\theta} = 1 - (-1)^{k+1} \alpha_{k,2k+1} \left(\frac{\theta^{p+1}}{p+1} - \mathbf{i} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\theta^{p+2}}{p+2} \right) + o(\theta^{p+2})$$

Pour $p = 2k$ (Lax-Wendroff)

$$\lambda(\theta)e^{-\nu i\theta} = 1 - \mathbf{i}(-1)^k \alpha_{k,2k} \left(\frac{\theta^{p+1}}{p+1} - \mathbf{i}\nu \frac{\theta^{p+2}}{p+2} \right) + o(\theta^{p+2}).$$

Théorème (Godunov) Les seuls schémas linéaires pour l'advection vérifiant le principe du maximum sont d'ordre 1.

Nouvelle formulation Pour tous les schémas de Strang d'ordre impair ($p = 2k + 1$)

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq K_p \|u_0\|_{L^\infty},$$

on a $K_p > 1$ pour $p > 1$. En revanche $K_1 = 1$. En pratique on observe que $K_p < K_{p+2}$.

Preuve : Si $K_p \leq 1$ alors le schéma vérifie le principe du maximum $\Rightarrow p=1$.

Theorème (de convergence). On a

$$\|u^n - u(n\Delta t)\|_{L^1} \leq C_p \|u_0^{(p+1)}\|_{L^1} (\Delta x^p T).$$

Supposons que $u_0 \in L^\infty \cap BV$. Alors

$$\|u^n - u(n\Delta t)\|_{L^1} \leq D_p |u_0|_{BV} \left(\Delta x^a T^b + \Delta x \right)$$

avec $a = \frac{p}{p+1}$ et $b = \frac{1}{p+1}$.

Si on passe par L^2 , on obtient uniquement

$$\|u^n - v^n\|_{L^2} \leq \left(C \|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} |u|_{BV}^{\frac{1}{2}} \right) \times \left(\Delta x^a T^b + \Delta x^{\frac{1}{2}} \right)$$

avec $a = \frac{p}{2(p+1)} < \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2(p+1)}$.

Convergence pour des solutions régulières (P. Havé)

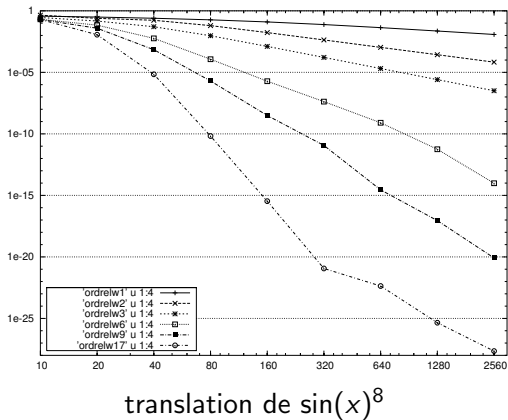
Motivations

Histoire

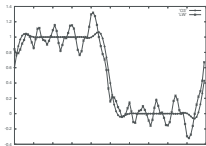
Une formule

Résultats
numériques

Conclusions



On a $2^{17} = 131072 \approx 10^5$. L'ordre théorique est atteint.



Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Convergence dans L^2 . CFL=0.2.

100	Upwind	LW	BW	O3
100	0.204370	0.165566	0.154501	0.100967
200	0.171888	0.132580	0.125728	0.078042
400	0.144545	0.104283	0.103494	0.059947
800	0.121560	0.083612	0.083504	0.046356
1600	0.102227	0.067617	0.066693	0.035915
order	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

cells	LW (L^1)	LW (L^2)	O3 (L^1)	O3 (L^2)
100	0.136120	0.183949	0.040989	0.102097
800	0.056499	0.094048	0.008625	0.047275
order	$\frac{1}{3} < 0.42 < \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

Comparaison L^1 - L^2 . CFL=0.001.



Advection d'un Dirac

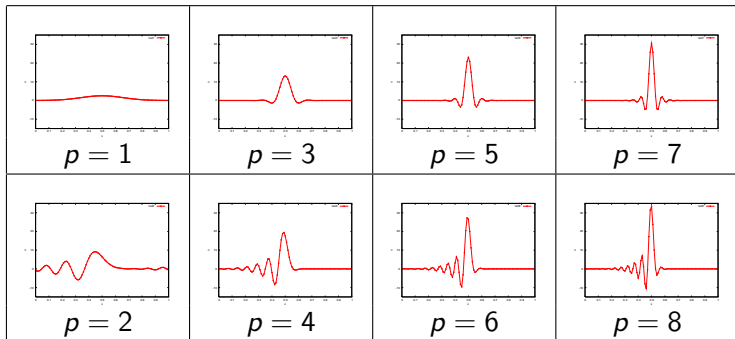
Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions



Numerical solution for various orders : $p = 2k + 1$ on the left column and $p = 2k$ on the right column. The CFL number is between $\nu = 0.5$.

Advection d'un Dirac

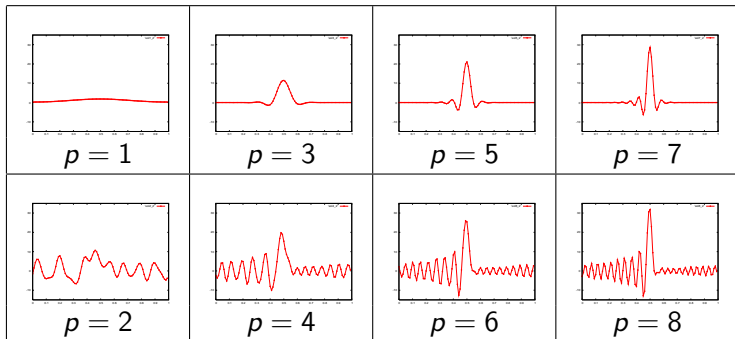
Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions



Numerical solution for various orders : $p = 2k + 1$ on the left column and $p = 2k$ on the right column. The CFL number is between $\nu = 0.05$.

Comparaison avec le schéma saute-mouton

Motivations

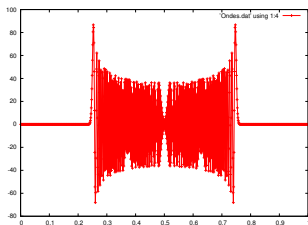
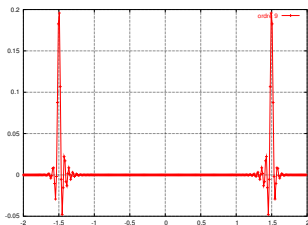
Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Donnée initiale = Dirac au centre.



Question = lequel correspond au schéma saute-mouton ?

L'autre est un schéma de Strang d'ordre 9.

Quelle est l'explication ?

Motivations

Sur maillage cartésien, on peut utiliser les schémas de Strang pour la résolution numérique des problèmes suivants.

Histoire

Une formule

Résultats numériques

Conclusions

Le rayonnement

$$\frac{1}{c} \partial_t I + \vec{\Omega} \cdot \nabla I = S$$

Vlasov-Maxwell

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0$$

Boltzmann-Williams

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f + F_R(\dots) \partial_R f + \dots = 0$$

Le splitting directionnel est très favorable.

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

La résolution numérique précise de l'équation du transport est en enjeu permanent en CFD

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

$$\partial_t (\rho c) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c) = 0.$$

$0 \leq c \leq 1$ est une concentration.

Conclusion et perspectives

Motivations

Histoire

Une formule

Résultats
numériques

Conclusions

Les schémas de Strang pour l'advection offrent un compromis coût-efficacité numérique exceptionnel sur maillage cartésien. La théorie et les test-numériques montre la stabilité dans L^∞ à tout ordre impair $p = 2k + 1$.

Les schémas dit symplectiques permettent un splitting de type Strang (encore!!) à tout ordre. Cela permet d'obtenir des schémas d'ordre quelconque en temps et en espace en toute dimension.

Quid des ENO-WENO ...

Pour l'instant la théorie est restreinte aux coefficients constants (mais la pratique marche pour les coefficients lentement variables).

Le point complètement ouvert concerne l'advection sur maillage non structuré.