



# Simulation directe d'écoulements à surface libre sur parois ondulées

Alexandre Ern, Rémi Joubaud et Tony Lelièvre

ANDRA & Université Paris-Est, CERMICS, École des Ponts Paristech.



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites  
Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement  
Formulation ALE

## Études numériques

Étude de stabilité  
Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



# Plan

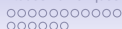
## Introduction

### Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites  
Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement  
Formulation ALE

### Études numériques

Étude de stabilité  
Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Motivations et contexte de l'étude

- ANR METHODE (WP2) : Direct simulations at the meter scale
  - a Free surface Navier-Stokes;
  - b Saint-Venant on micro-topography with furrows.
- Compréhension de la physique du problème;
- Outil numérique : **Mistral** (solveur ALE éléments finis développé par J-F Gerbeau et T. Lelièvre);
- Étude par des simulations numériques de la stabilité des écoulements gravitaires;
- Réduction de modèles : comparaison avec les approches de type Shallow-Water.

*Référence: Numerical study of a thin liquid film flowing down an inclined wavy plane, Physica D, (2011), (A. Ern, RJ, T. Lelièvre).*



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites  
Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement  
Formulation ALE

## Études numériques

Étude de stabilité  
Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



# Plan

## Introduction

### Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

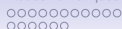
Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement

Formulation ALE

### Études numériques

Étude de stabilité

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Équations de conservation

- Bilan de quantité de mouvement et incompressibilité:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \rho \mathbf{g}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

- Équations posées sur  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ .
- Tenseur des contraintes:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -p \mathbf{I} + 2\eta \mathcal{E}(\mathbf{u}),$$

et  $\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  tenseur de déformation (fluide Newtonien).

- Condition initiale:  $\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0$ .
- Paramètres physiques du problème:  $\eta$  viscosité dynamique,  $\rho$  masse volumique,  $g$  gravité.

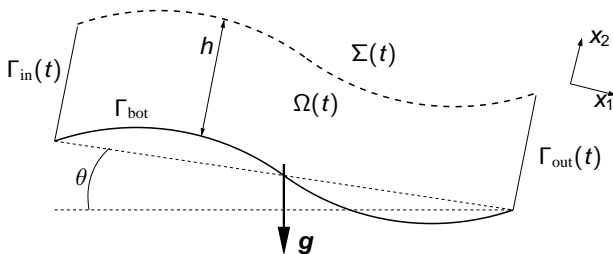


## Configuration géométrique : sinusoïde

- Plan incliné et parois ondulées : topographie décrite par

$$b(x_1) = A \sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right), \quad x_1 \in \mathbb{T}.$$

( $A$  amplitude des sillons)



- Gravité:

$$\mathbf{g} = g\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ -g \cos \theta \end{pmatrix}.$$





## Conditions aux limites

- Condition de Dirichlet au fond

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{\text{bot.}}$$

(collement et non-pénétration)

- Condition de surface libre

$$\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Sigma(t),$$

(contrainte normale nulle et pas de tension de surface)

- Conditions aux limites périodiques en entrée/sortie:

$\mathbf{u}$  et  $\sigma(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}$  périodiques.



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

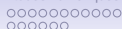
**Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement**

Formulation ALE

## Études numériques

Étude de stabilité

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Propriétés physiques

- Quantités physiques

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \text{ (énergie cinétique),}$$

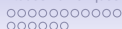
$$P_v(t) = \int_{\Omega} \frac{\eta}{2} \left| \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^T \right|^2 \text{ (dissipation visqueuse),}$$

- Bilan d'énergie:

$$\frac{d}{dt} K + P_v = \int_{\Omega} \rho \Theta \cdot \mathbf{u}$$

- Conservation du volume:

$$\frac{d}{dt} |\Omega(t)| = 0.$$



## Écoulement de Nusselt

- **Hypothèse** : fond plat ( $A = 0$ ) et état stationnaire ( $\partial_t \mathbf{u} = 0$ )
- **Profil de vitesse parabolique** :

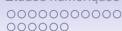
$$\varphi(x_2) = \frac{3}{2} \frac{Q_N}{h_N} \left( \frac{2x_2}{h_N} - \left( \frac{x_2}{h_N} \right)^2 \right), \quad x_2 \in [0, h_N].$$

- **Formule du débit  $Q_N$** :

$$Q_N = \frac{1}{3} \frac{\rho g \sin \theta}{\eta} h_N^3.$$

→ Vitesse de référence :

$$U_* = \frac{1}{3} \frac{\rho g \sin \theta}{\eta} h_*^2.$$



## Adimensionnement

- Nombres sans dimension:

$$\text{Re} := \frac{\rho U_* h_*}{\eta} = \frac{1}{3}(\sin \theta) \frac{\rho^2 g h_*^3}{\eta^2},$$

$$\text{Fr}^2 := \frac{U_*^2}{h_* g} = \frac{1}{3}(\sin \theta) \text{Re}$$

- Scaling advectif en temps et Bernoulli en pression:

$$t_* = h_* / U_*, \quad p_* = \rho U_*^2.$$

- Équations sans dimension :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \text{div} \left( \frac{2}{\text{Re}} \mathcal{E}(\mathbf{u}) \right) + \nabla p = \frac{1}{\text{Fr}^2} \Theta, \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement

**Formulation ALE**

## Études numériques

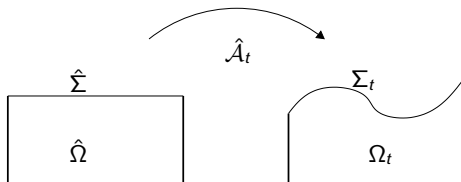
Étude de stabilité

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Formulation ALE (1)

- Transformation d'un domaine de référence vers le domaine courant:



- Vitesse du domaine de référence:

$$\hat{\mathbf{w}}(t, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_t(\hat{\mathbf{x}}).$$

- Vitesse du domaine courant:

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{w}}(t, \hat{A}_t^{-1}(\mathbf{x})).$$

avec  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega \setminus \Sigma(t)$ , et  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Sigma(t)$ .



## Formulation ALE (2)

- Discrétisation en temps et en espace : schéma d'Euler semi-implicite et éléments finis  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$ ;
- Formulation variationnelle discrète: étant donnés  $\mathbf{u}^n \in V_h^n$ ,  $\Omega^n$ ,  $\mathbf{w}^n$ , et  $\Omega^{n+1}$ , on cherche  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$  tels que  $(\mathbf{v}, q) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{n+1}} (\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{w}}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega^{n+1}} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{w}}^n) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{n+1}} \frac{2}{\operatorname{Re}} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathcal{E}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega^{n+1}} p^{n+1} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{n+1}} \frac{1}{2} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}^n) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^n} \mathbf{u}^n \cdot (\mathbf{v} \circ \mathcal{A}_{n,n+1}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{n+1}} \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega^{n+1}} q \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) \, d\mathbf{x} = 0, \end{array} \right.$$





## Formulation ALE (3)

- Déplacement du maillage **vertical**;
- Calcul du déplacement du maillage en résolvant un problème de Poisson :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w_2^n = 0 & \text{dans } \Omega^n, \\ w_2^n = \frac{\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_h}{n_{h,2}} & \text{sur } \Sigma(t^n), \\ w_2^n = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{bot}}, \\ w_2^n \text{ périodique} & \text{sur } \Gamma_{\text{in/out}}(t^n). \end{array} \right.$$



## Algorithme général

Algorithme de résolution étant donnés  $(\Omega^n, \mathbf{u}^n, p^n)$ :

- (i) Évaluation des termes définis sur  $\Omega^n$  ;
- (ii) Calcul  $\mathbf{w}^n = (0, w_2^n)$  en résolvant le problème de Poisson.
- (iii) Déplacement du maillage.
- (iv) Assemblage des termes définis sur  $\Omega^{n+1}$  ;
- (v) Calcul  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ .

**Algorithme explicite:** condition de stabilité type **CFL**.



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement

Formulation ALE

## Études numériques

Étude de stabilité

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement

Formulation ALE

## Études numériques

**Étude de stabilité**

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Stabilité spectrale pour NS surface libre

- Valable dans la limite  $\xi := \frac{h^*}{L} \rightarrow 0$  (limite des grandes longueurs d'onde).
- Cas d'un fond plat ( $A = 0$ ). Résultat théorique de **Yih ('63)**: il existe un nombre de Reynolds critique  $Re_c$  tel que l'écoulement de Nusselt est instable pour toute perturbation:

$$Re_c = \frac{5}{6} \cot(\theta).$$

- Cas d'un fond sinueux ( $A > 0$ ): résultats théoriques formels de **Wierschem et Aksel ('03)** sous l'hypothèse que la cote du fond décroît:

$$\zeta := 2\pi \frac{A}{L} \leq \tan(\theta)$$

on a des formules analytiques pour:

- Reynolds critique (fonction de  $\theta$  et  $\zeta$ );
- Profils de vitesse et de surface libre;



## Stabilité spectrale pour NS surface libre : approche numérique

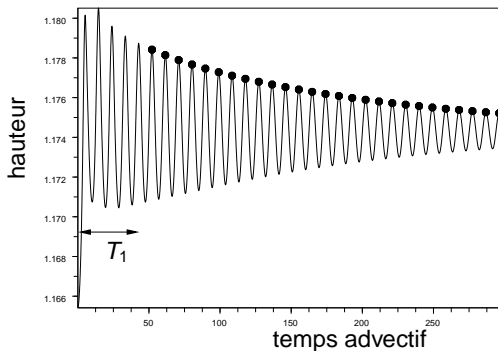
### Objectifs

- Retrouver par des simulations directes les résultats théoriques de Yih et Wierschem .
- Extension à des ondulations quelconques ( $\zeta > \tan(\theta)$ );
- Extension à des longueurs d'ondes finies;
- Analyse paramétrique : dépendance en  $\theta, \zeta, \xi$ .



## Détermination du Reynolds critique

On observe le comportement suivant en un point de la surface libre :



$$(\text{Re} = 15.29, \theta = \frac{4\pi}{180}, \zeta = 0.016\pi, \xi = 0.083\pi)$$



**Protocole :** Déterminer le Reynolds critique par une méthode d'extrapolation.

- i Pour un  $Re_{\text{stab}}$  suffisamment petit, simuler le système NS surface libre en temps long pour atteindre un état stationnaire;
- ii Sélectionner  $Re_1$  et  $Re_2$  “proches” de  $Re_{\text{stab}}$  et simuler le système NS surface libre sur un intervalle de temps  $[T_{\text{in}}, T_{\text{end}}]$  pour observer la décroissance exponentielle en temps de la hauteur de fluide.
- iii Minimiser l'erreur aux moindres carrés entre les maxima locaux des hauteurs en temps et le profil:

$$f(t) \simeq \varphi_{a,B,M}(t) := a \exp(-Bt) + M.$$

- iv On obtient  $B_1$  et  $B_2$  (taux de décroissance) et  $M_1$  et  $M_2$  (hauteur à l'état stationnaire)
- v Extrapoler linéairement en  $B = 0$  pour obtenir la valeur de  $Re_c$ .





## Évaluation du nombre de Reynolds

- Role du débit pour  $A > 0$ :

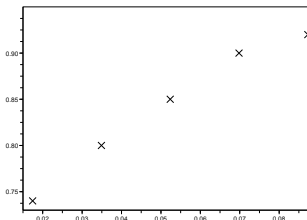


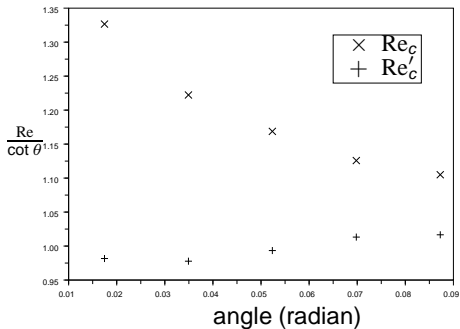
Figure: Débit “critique” en fonction de  $\theta$ .

- Deux choix possibles pour le Reynolds critique :

$$\text{Re}_c = \frac{\rho}{\eta} Q_*, \text{ ou } \text{Re}'_c = \frac{\rho}{\eta} Q_c.$$



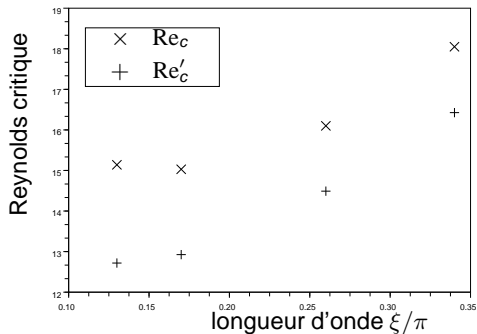
## Stabilité en fonction de $\theta$



- **Faible** dépendance en  $\cot \theta$  pour  $Re'_c$ .



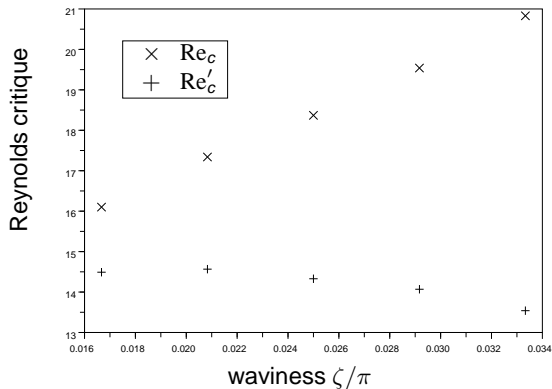
## Stabilité en fonction de $\xi$



- On observe bien l'asymptotique  $\xi \rightarrow 0$



## Stabilité en fonction de $\zeta$

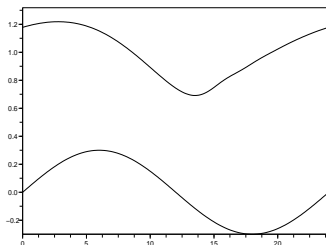


- Effet stabilisant lorsque  $Re$  est évalué avec le débit  $Q_*$  alors qu'on observe un effet destabilisant avec  $Q_c$ .

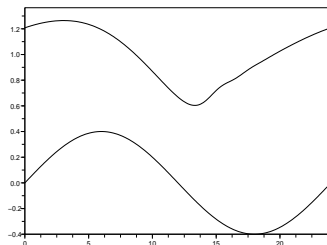


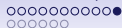
## Impact de $\zeta$ sur les profils de surface libre

$Re = 16.5$  et  $\zeta = 0.025\pi$



$Re = 19$  et  $\zeta = 0.033\pi$





## Comparaison avec Wierschem et Yih

On se place dans le cadre des hypothèses de Wierschem :

$$\zeta \leq \tan(\theta).$$

| $\theta$ (deg) | $\zeta$ | DNS              |                  | Wierschem et Aksel  |
|----------------|---------|------------------|------------------|---------------------|
|                |         | $\xi = 0.083\pi$ | $\xi = 0.042\pi$ | $\xi \rightarrow 0$ |
| 4              | 0.01    | 14.85            | 12.69            | 12.16               |
| 4              | 0.02    | 14.97            | 13.01            | 12.99               |
| 15             | 0.1     | 4.25             | 3.91             | 3.65                |



# Plan

## Introduction

## Équations de Navier-Stokes à surface libre et formulation ALE

Équations de conservation, géométrie, conditions aux limites

Bilan d'énergie, solution stationnaire, adimensionnement

Formulation ALE

## Études numériques

Étude de stabilité

Comparaison avec un modèle de type Shallow-Water



## Modèle Shallow-Water stationnaire

- Conservation de la masse et de la quantité de mouvement:

$$\begin{cases} q'_{sw} = 0, \\ h'_{sw} \left( 1 - \frac{6}{5} \frac{q_{sw}^2}{gh_{sw}^3 \cos \theta} \right) = \tan \theta - b' - 3 \frac{\eta}{\rho} \frac{q_{sw}}{g \cos \theta h_{sw}^3}, \end{cases}$$

Version simplifiée d'une classe de modèles (voir Boutonet, Chupin, Noble, Vila '10).

- Terme de frottement obtenu par fermeture Nusselt pour le profil de vitesse.
- Simplification et adimensionnement :

$$h'_{sw} \left( 1 - q_{sw}^2 \frac{2 \tan \theta}{5 h_{sw}^3} \text{Re} \right) = \tan \theta \left( 1 - \frac{q_{sw}^2}{h_{sw}^3} \right) - b',$$





## Résolution numérique

On cherche à reproduire Navier-Stokes:

- Contrainte de périodicité;
- Contrainte volumique (épaisseur moyenne  $\frac{1}{L} \int_0^L h_{sw} = 1$ );
- Restriction sur le Reynolds :  $(1 - q_{sw}^2 \frac{2 \tan \theta}{h_{sw}^3} \text{Re}) \neq 0$ .
- Intégrateur de Runge-Kutta 4 et méthode itérative pour trouver  $h_{sw}$  satisfaisant les contraintes:
  - a Initialisation :  $(q_{sw}, h_{sw})$ ;
  - b Résolution backward de l'EDO;
  - c Si les contraintes sont satisfaites fin **sinon**;
  - d De nouveaux  $(q_{sw}, h_{sw})$  sont sélectionnés par dichotomie.

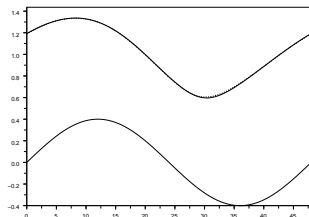
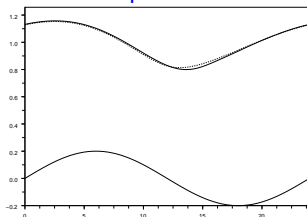


## Résultats numériques

- Comparaisons des débits :

| $\xi$      | Re   | $q_{ns}$ | $q_{sw}$ | erreur                |
|------------|------|----------|----------|-----------------------|
| $0.055\pi$ | 12.6 | 0.867    | 0.868    | $4.03 \times 10^{-4}$ |
| $0.083\pi$ | 13.8 | 0.895    | 0.893    | $1.83 \times 10^{-3}$ |
| $0.11\pi$  | 14.5 | 0.916    | 0.912    | $4.22 \times 10^{-3}$ |

- Comparaisons des profils de surface libre:



→ parfait accord dans la limite  $\xi \rightarrow 0$  pour  $\zeta > 0$ .



## Conclusion et perspectives

- Simulations numériques directes pour des nombres de Reynolds modérés;
- Validation numérique d'analyses asymptotiques formelles;
- Validation d'un modèle Shallow-Water dans le cas stationnaire;

Perspectives pour ces études:

- Réduction de modèle souhaitable car les simulations directes sont coûteuses;
- Analyse de stabilité pour les modèles de type Shallow-Water permettant de valider leur utilisation systématique.



**Merci pour votre attention!**