



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Un modèle hyperélasto-plastique : utilisation de la formulation en potentiel.

Gilles Kluth

CEA/DIF - Paris 6/JLL

19 mars 2006

Directeurs de thèse : Bruno Després (CEA) et Pascal Frey (P6)



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Contexte

On étudie la propagation des ondes de contraintes dans un solide élasto-plastique isotrope.

- Compressible
- Grandes déformations, non linéaire
- Prise en compte des ondes de cisaillement

Modélisation proposée

- Utilisation du modèle hyperélastique (formulation en potentiel), que ce soit dans la phase élastique ou dans la phase plastique
- Englobe de nombreuses situations : incompressible, élasticité linéaire, dynamique des fluides...



Aucun consensus n'existe actuellement, quant à la modélisation des phénomènes plastiques.

Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Avantages du modèle proposé

- Système hyperbolique sous forme conservative
- Toute la partie modélisation physique est concentrée dans la donnée du potentiel hyperélastique
- L'introduction de la plasticité n'entraîne pas d'EDP supplémentaire (par rapport à l'élasticité)



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

- 1 Le modèle hyperélastique
- 2 Analyse mathématique et numérique
- 3 Plasticité



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Gradient de déformation F

- $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, où le mouvement est :
$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_2(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_3(t, X_1, X_2, X_3) \end{matrix}$$
- $\det(F) > 0$
- invariant par translation uniforme mais pas par rotation uniforme
- conservation de la masse : $\rho \det(F) = \rho_0$

Tenseurs de déformation

- $B = F^t F$
- B est symétrique
- invariant par translation uniforme et rotation uniforme
- Autre possibilité : $E = \frac{1}{2}(F^t F - Id)$



Mécanique des milieux continus

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_k}(\rho v_k) = 0 \\ \partial_t(\rho v_i) + \partial_{x_k}(\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_{x_k}(\rho e v_k - v_j \sigma_{jk}) = 0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 3$$

avec : $e = \epsilon + \frac{1}{2}v^2$ et $\sigma = {}^t\sigma$.

- + 1 équation d'état "thermodynamique" (**EOS**) : $\epsilon(S, B)$
- + 1 équation d'état "cinématique" : $\sigma(S, F) \leftarrow$ **Hyperélasticité**

L'hyperélasticité

On peut montrer que le tenseur des contraintes est relié au potentiel ϵ par

$$\sigma_{ij}(S, F) = \rho F_{j\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial F_{i\rho}}$$

Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

L'hyperélasticité dans le cas isotrope

ϵ dépend de I_1, I_2 et I_3 , les invariants tensoriels de B . Alors, une formule simplifiée pour σ est

$$\boxed{\sigma_{ij}(S, F) = \alpha_0 I_d + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_0 &= 2\rho \quad I_3 \frac{\partial \epsilon}{\partial I_3} \\ \alpha_1 &= 2\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \epsilon}{\partial I_2} \right) \\ \alpha_2 &= -2\rho \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial I_2} \end{cases}$$

Un exemple simple : isentropique élastique linéaire

$$\epsilon = \mu(I_1 - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{8}(I_1 - 3)^2 - \frac{\mu}{2}(I_2 - 3)$$

Alors

$$\sigma = I_3^{-1/2} \left(\left(\frac{\lambda}{2}(I_1 - 3) - \mu \right) B + \mu B^2 \right).$$

[9] P.Ciarlet **Mathematical Elasticity. Volume 1 : 3D elasticity**, North-Holland Pub.Comp. (1988)



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Relations de compatibilité

F et v dérivent du mouvement, on a 9 équations supplémentaires :

$$D_t F = \partial_x v$$

Soit sous sa forme eulérienne :

$$\partial_t(\rho F_{ij}) + \partial_{x_k}(\rho F_{ij} v_k - \rho v_i F_{kj}) = 0.$$

[5] B.J.Plohr, D.H.Sharp **A conservative formulation for plasticity**, Adv.Appl.Math. 13, 462-493 (1991)

Contrainte involutive

Toute solution vérifie

$$\operatorname{div}(\rho^t F) = 0,$$

ce qu'il faudra assurer numériquement.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Le modèle complet :

$$\rho D_t \begin{pmatrix} v_i \\ F_{ij} \\ e \end{pmatrix} - \partial_{x_k} \begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ \rho v_i F_{kj} \\ v_j \sigma_{jk} \end{pmatrix} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq d$$

- + conservation de la masse $\longrightarrow \rho = \rho_0 / \det(F)$
- + EOS isotrope $\longrightarrow \epsilon(S, l_1, l_2, l_3)$
- + hyperélasticité $\longrightarrow \sigma(S, F)$

Avantages :

Ce modèle est

- **conservatif,**
- **valide en grandes déformations.**
- **peut se simplifier (cas isotherme, isentropique, incompressible, petites déformations, élasticité linéaire, dynamique des fluides.)**



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Caractère bien posé : hyperbolicité

Le système est hyperbolique si et seulement si

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial F_{ij} \partial F_{ih}} n_l n_h x_i x_j > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall F \in \mathbb{R}^{9 \times 9}.$$

On retrouve une notion développée en élastostatique :

- la condition de forte ellipticité (des équations d'Euler)
- ou encore la stricte rang-1 convexité de $\epsilon(F)$.

Recherche d'un critère suffisant :

- polyconvexité de Ball, critère de Steigmann...

Non stricte

Par exemple en élasticité isotrope et déformation uni-axiale, les 2 vitesses d'onde transverses sont égales.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Cas 1D plan

Désormais, nous utiliserons le système simplifié suivant :

$$\rho D_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ e \end{pmatrix} - \partial_x \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \\ K v_1 \\ K v_2 \\ K v_3 \\ v_1 \sigma_{11} + v_2 \sigma_{21} + v_3 \sigma_{31} \end{pmatrix} = 0,$$

Avec : $K = \rho F_{11}$ constante, et $\sigma_{i1} = K \frac{\partial \epsilon}{\partial F_{i1}}$, $1 \leq i \leq 3$.

Hyperbolicité

ssi stricte convexité de ϵ par rapport à F_{11} , F_{21} et F_{31} .



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Formulation Volumes Finis

Le système s'écrivant

$$\rho D_t U + \partial_x f(U) = 0,$$

on utilise un schéma conservatif de type Godunov :

$$\frac{\rho_i^n \Delta_i x}{\Delta t} \left(U_i^{n+1} - U_i^n \right) + \left(f(U)_{i+\frac{1}{2}} - f(U)_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Fermeture lagrangienne

On détermine la position de la nouvelle maille avec

$$D_t x = u(t, x).$$

Il reste à déterminer les flux aux interfaces $f(U)_{i+\frac{1}{2}}$.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Calcul des flux : théorie des systèmes fluides lagrangiens

[9] B. Després, *Lagrangian systems of conservation laws*, Num.Math., number 89, pages 99-134 (2001)

Les flux des systèmes hyperboliques 1D issus de la mécanique des milieux continus peuvent en général s'écrire

$$f(U) = \begin{pmatrix} M\psi \\ -\frac{1}{2} {}^t\psi M\psi \end{pmatrix} \quad \text{avec } \psi = -\nabla_U e, \quad \text{et } M = {}^t M.$$

Alors, par la discrétisation suivante,

- splitting en chaque interface : $M = M^+ + M^-$ avec $M^+ > 0$ et $M^- < 0$ symétriques,
- décentrage du flux :

$$f(U)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} M^+ \psi_{i+1} + M^- \psi_i \\ -\frac{1}{2} {}^t\psi_{i+1} M^+ \psi_{i+1} - \frac{1}{2} {}^t\psi_i M^- \psi_i \end{pmatrix},$$

on obtient un schéma **entropique**.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Calcul des flux dans le cas hyperélastique simplifié

On a

$$M = \begin{bmatrix} 0_3 & K Id \\ K Id & 0_3 \end{bmatrix}.$$

On prend le splitting suivant

$$M^\pm = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pm\sqrt{K\lambda_1} & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{K\lambda_2} & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{K\lambda_3} & 0 & 0 & K \\ K & 0 & 0 & \pm\sqrt{\frac{K^3}{\lambda_1}} & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & \pm\sqrt{\frac{K^3}{\lambda_2}} & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & \pm\sqrt{\frac{K^3}{\lambda_3}} \end{bmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les 3 valeurs propres du tenseur acoustique.



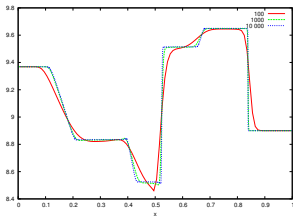
Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

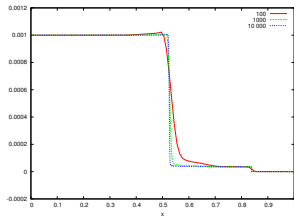
Plasticité

Tube à choc à 5 ondes

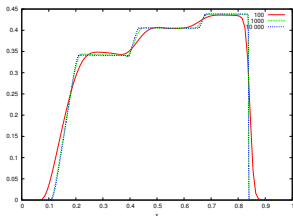
ρ



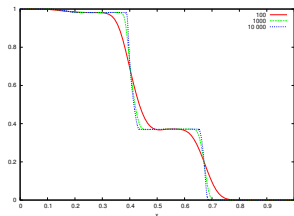
S



U



V



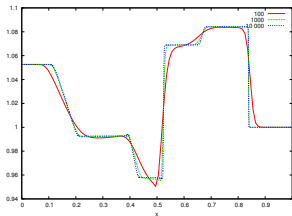


Le modèle
hyperélastique

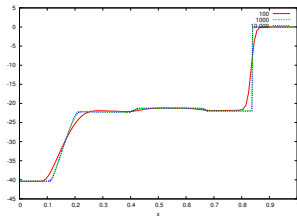
Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

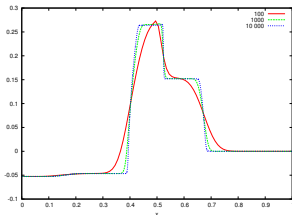
Tube à choc à 5 ondes
 $(F^{-1})_{11}$



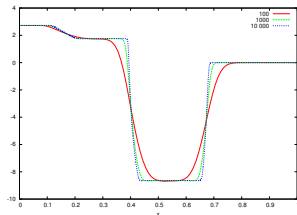
σ_{11}



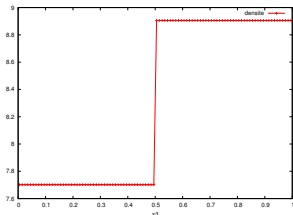
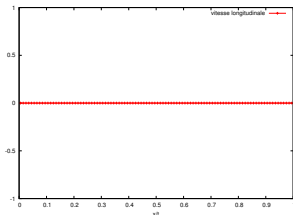
$(F^{-1})_{21}$



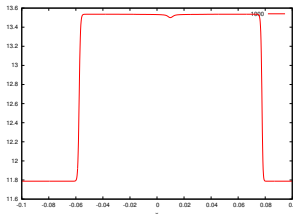
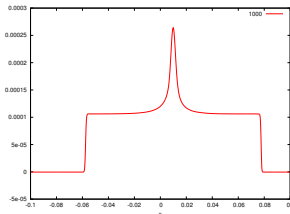
σ_{21}



Discontinuité de contact stationnaire exactement calculée

 ρ  u 

Mais phénomène du Wall-Heating

 ρ  S 



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Résultats numériques

8 cas tests sur du cuivre, tirés de

[7] G.H.Miller **An iterative Riemann solver for systems of hyperbolic conservation laws, with application to hyperelastic solid mechanics**, JCP 193, 198-225 (2003),

[8] V.A.Titarev, E.Romenski, E.F.Toro **Exact Riemann problem solutions and upwind fluxes for nonlinear elasticity**, preprint (2006).

- On calcule correctement les variables thermodynamiques, grâce au **caractère entropique du schéma**.
- Les discontinuités de contact sont précisément calculées, de par l'utilisation d'un **code lagrangien**.
- On observe le phénomène de Wall-Heating au niveau de la discontinuité.

Le code est robuste et les résultats sont globalement plus précis (ormis pour le Wall-Heating), et ont permis de résoudre des problèmes de Riemann avec **cisaillement**.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Objectif

On **construit un potentiel** ϵ dans le but de reproduire les expériences d'impact de barres uni-dimensionnel, et être stable dans les cas plus complexes.

De plus, on veut retrouver l'élasticité linéaire dans le cas des petites déformations.

Critères de plasticité de Von Mises

$$\|dev(\sigma)\|^2 \leq \frac{2}{3} Y^2. \quad \text{avec } dev(\sigma) = \sigma - \frac{1}{3} tr(\sigma) Id$$

Si l'inégalité est stricte, on se situe dans la **zone élastique** ; sinon, en **zone plastique**, il faut trouver un potentiel ϵ tel que l'**égalité** soit vérifiée. On rappelle que

$$\sigma_{ij}(S, F) = \alpha_0 Id + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_0 &= 2\rho \quad l_3 \frac{\partial \epsilon}{\partial l_3} \\ \alpha_1 &= 2\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial l_1} + l_1 \frac{\partial \epsilon}{\partial l_2} \right) \\ \alpha_2 &= -2\rho \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial l_2} \end{cases}$$



Découplage fluide - solide

$$\sigma = -P I_d + dev(\sigma) \quad \text{avec} \quad P = -\frac{1}{3} tr(\sigma)$$

- Pour simplifier, on veut décomposer ϵ de la même manière. On démontre que si

$$\epsilon = \epsilon_{hydro}(I_3, S) + \epsilon_s(X_1, X_2) \quad \text{avec} \quad X_1 = I_1 I_3^{-1/3} \quad \text{et} \quad X_2 = I_2 I_3^{-2/3}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{2}{3} \rho I_3 \frac{\partial \epsilon_{hydro}}{\partial I_3} \\ dev(\sigma) = \alpha_{0s} I_d + \alpha_{1s} B + \alpha_{2s} B^2 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{0s} = 2\rho I_3 \frac{\partial \epsilon_s}{\partial I_3} \\ \alpha_{1s} = 2\rho \left(\frac{\partial \epsilon_s}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \epsilon_s}{\partial I_2} \right) \\ \alpha_{2s} = -2\rho \frac{\partial \epsilon_s}{\partial I_2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Seule la partie déviatorique de σ , et donc ϵ_s , interviennent dans le phénomène de plasticité.



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Exemple d'une collision simple



$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$l_1 = 2 + F_1^2 \quad \text{et} \quad l_3 = F_1^2.$$

- Pour simplifier, on prend ϵ_s ne dépendant que de X_1 .
- Dans le domaine élastique, l'élasticité linéaire impose

$$\epsilon_s^{elast} = \frac{\mu}{2\rho_l} (X_1 - 3).$$

- Le critère de Von Mises peut alors s'exprimer dans l'espace des déformations

$$\mu |F_1^2 - 1| F_1^{-5/3} \leq Y.$$



Exemple d'une collision simple

- Cette équation donne 2 valeurs seuils, l'une en compression $F_1^C < 1$, l'autre en élévation $F_1^E > 1$,

$$\mathbb{D}_{\text{élastique}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dev}(\sigma)_{11} \in \mathbb{R} / \quad -\frac{2}{3}Y \leq \text{dev}(\sigma)_{11} \leq \frac{2}{3}Y \\ F_1 \in \mathbb{R} / \quad F_1^C \leq F_1 \leq F_1^D \end{array} \right\}.$$

- On peut en déduire que sur le bord du domaine élastique

$$\text{dev}(\sigma) = \mp Y \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- Enfin, le caractère fluide du système en phase plastique impose la linéarité par rapport à F_1 , soit

$$\epsilon_s^{\text{plast}} = \mp \frac{2}{3} \frac{Y}{K} F_1 + \text{Cste},$$

que l'on raccorde continûment à $\epsilon_s^{\text{élast}}$.



Exemple d'une collision simple

- Récapitulatif

$$\epsilon = \epsilon_{hydro}(I_3, S) + \epsilon_s(X_1), \text{ avec}$$

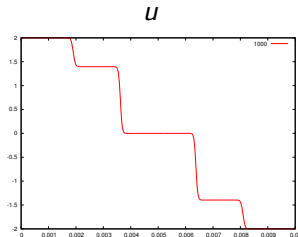
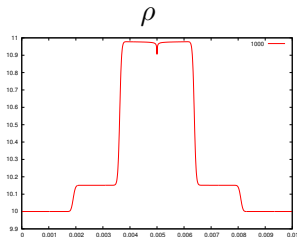
$$\epsilon_s = \begin{cases} \frac{\mu}{2\rho_l} (X_1 - 3) & \text{si } F_1^C \leq F_1 \leq F_1^E \\ -\frac{2}{3} \frac{Y}{K} (F_1 - F_1^C) + \epsilon_s^{el}(F_1^C) & \text{si } F_1 \leq F_1^C \\ \frac{2}{3} \frac{Y}{K} (F_1 - F_1^E) + \epsilon_s^{el}(F_1^E) & \text{si } F_1^E \leq F_1 \end{cases}$$

Le modèle hyperélastique

Analyse mathématique et numérique

Plasticité

Résultats attendus : dédoublement du choc avec précurseur élastique.





Cas multi-d

- La construction du potentiel hyperélasto-plastique revient à l'étude des solutions de $\|dev(\sigma)\|^2 = \frac{2}{3} Y^2$.
- Pour simplifier l'équation, on prend

$$\epsilon = \epsilon_{hydro}(I_3, S) + I_3^{1/2} \phi(X_1, X_2)$$

- Alors, $\|dev(\sigma)\|^2 = \frac{2}{3} Y^2$. s'écrit

$$\frac{Y^2}{12\rho_f^2} = \left(\frac{X_1^2}{3} - X_2\right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2^2}{3} - X_1\right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{X_1 X_2}{3} - 3\right) \frac{\partial\phi}{\partial X_1} \frac{\partial\phi}{\partial X_2}$$

Soit par un calcul perturbatif à l'ordre 1, autour de l'état de repos ($X_1 = 3 + \delta x, X_2 = 3 + \delta y$),

$$\frac{Y^2}{12\rho_f^2} = (2\delta x - \delta y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\delta x}\right)^2 + (\delta y - \delta x) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\delta y}\right)^2 + (\delta x + \delta y) \frac{\partial\phi}{\partial\delta x} \frac{\partial\phi}{\partial\delta y}$$



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Cas multi-d

Soit avec $R = \delta x + \delta y$,

$$\frac{Y^2}{12\rho_l^2} = 2R \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \right)^2$$

- On trouve une solution approchée de ϕ pour la zone plastique.
- Finalement :

$$\epsilon = \epsilon_{hydro}(I_3, S) + I_3^{1/2} \phi(R) \quad \text{avec} \quad R = X_1 + X_2 - 6, \text{ et}$$

$$\phi = \begin{cases} \frac{\mu}{4\rho_l} R & \text{si } R \leq R^* \\ \frac{Y}{\sqrt{6}\rho_l} (\sqrt{R} - \sqrt{R^*}) + \frac{\mu}{4\rho_l} R^* & \text{si } R^* \leq R \end{cases}$$

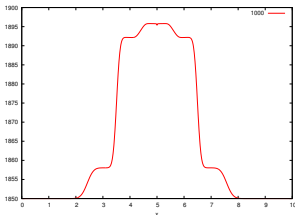
avec

$$R^* = \frac{2}{3} \frac{Y^2}{\mu^2}$$

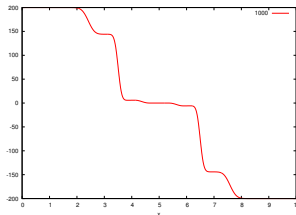


Collision de barres avec vitesse transverse importante : le calcul est stable, mais on ne dispose pas de résultats expérimentaux.

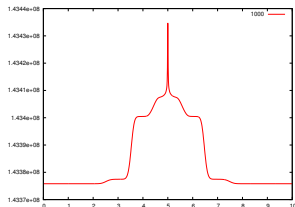
ρ



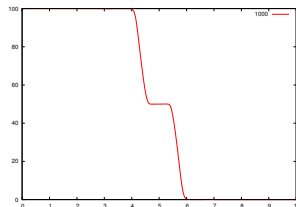
u



ϵ



v



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité



Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité

Conclusion

- On a un modèle unique et bien posé, celui de l'hyperélasticité.
- La physique du matériau est introduite dans le potentiel ϵ .
- On a dégagé une méthode permettant de construire ce potentiel.
- On retrouve numériquement les résultats expérimentaux pour les impacts de barres.

Perspectives

- Code multi-dimensionnel.
- Extension à d'autres exemples physiques : visco-plasticité, incompressible...



Questions ?

Le modèle
hyperélastique

Analyse
mathématique
et numérique

Plasticité