

## Analyse d'un schéma préservant l'asymptotique

Francis Filbet<sup>1</sup>, Amélie Rambaud<sup>2</sup>

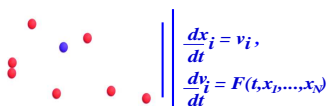
<sup>1</sup>Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1

<sup>2</sup>Institut de Mathématiques de Toulouse - Université Paul Sabatier

GT Méthodes Numériques,  
Laboratoire JLL, Paris Jussieu, 5 mars 2012



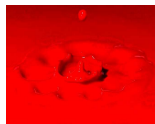
## L'équation de Boltzmann dans la modélisation d'un fluide



**Description  
microscopique**

*Nombre de particules  
tend vers  $+\infty$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t, x) : \text{densité,} \\ u(t, x) : \text{vitesse,} \\ T(t, x) : \text{température,} \\ p(t, x) : \text{pression.} \end{array} \right.$$

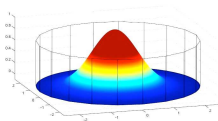


**Description macroscopique**

**Euler**

**Navier–Stokes**

*$\varepsilon$  tend vers 0.*



**Description mésoscopique :**  $f(t, x, v)$  solution de l'équation de Boltzmann.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f, f).$$

## Travaux théoriques : du cinétique vers les limites fluides



[Caflish,](#)

The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation (1980).



[Bardos, Golse, Levermore,](#)

Fluid dynamic limits of kinetic equations. I Formal derivations (1991), II. Convergence proofs for the Boltzmann equation (1993)



[Golse, Saint-Raymond,](#)

The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation (2001, 2004),  
Hydrodynamic limits for the Boltzmann equation (2005),  
The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials (2009).



[Berthelin, Tzavaras, Vasseur,](#)

From discrete velocity Boltzmann equations to gas dynamics before shocks (2009).

## Objectif : développer des méthodes numériques

Considérons l'équation de Boltzmann sous la forme

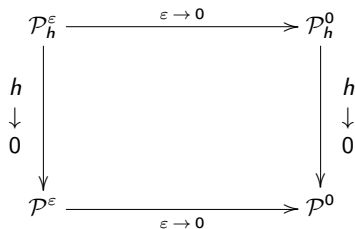
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f).$$

L'asymptotique  $\varepsilon \ll 1$  donne le système de Navier-Stokes compressible ou les équations d'Euler.

**Objectifs** : nous voulons mettre au point

- ▶ des schémas **stables** par rapport au paramètre  $\varepsilon \Rightarrow$  traitement implicite ;
- ▶ des schémas **uniformément précis** par rapport au paramètre  $\varepsilon \Rightarrow$  ordre élevé, uniforme ;
- ▶ des méthodes numériques systématiques traitant des opérateurs **non linéaires** ;
- ▶ des méthodes numériques au coût de calcul **non prohibitif**.

## Approche *préservant l'asymptotique*



### Définition

On dit d'un schéma numérique  $\mathcal{P}_h^\varepsilon$  qu'il *préservé l'Asymptotique* (AP) si :

- ▶ il fournit une discrétisation stable du problème ( $\mathcal{P}^\varepsilon$ ) pour **toute** valeur de  $\varepsilon > 0$ , et lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, à  $h$  fixé, il conduit à un schéma  $\mathcal{P}_h^0$  consistant avec le problème limite (équilibre local)  $\mathcal{P}^0$  ;
- ▶ le terme source implicite peut être implémenté explicitement.



## Quelques références : différents types de schémas AP

Physique des plasmas, limites quasi-neutres, limites diffusives



Carillo, Degond, Lafitte, Negulescu, Vignal, . . .

Chapman Enskog, fermeture en moments/ **splitting** + **explicite**.



Besse, Goudon, Lafitte, Samaey

Méthodes spectrales, explicites ou intégration projective, explicite.



Bennoune, Lemou, Mieussens (2008)

décomposition micro/macro, **semi-implicite**.



Gabetta, Pareschi, Toscani (1997), Filbet, Jin (2010)

Pénalisation de la source, **splitting**, **IMEX**.

## Quelques références : analyse de schémas AP

### Problèmes hyperboliques de relaxation



[Aregba-Driollet, Caflisch, Chalabi, Jin, Levermore, T.P. Liu, Natalini, ...](#)

### Limites hydrodynamiques d'équations cinétiques



[Golse, Jin, Levermore,](#)

Convergence of numerical transfer schemes in diffusive regime : discrete ordinate method (1999)



[Liu , Mieussens](#)

Analysis of an asymptotic preserving scheme for linear kinetic equations in the diffusion limit (2010)

### Un article de revue



[Jin,](#)

Asymptotic Preserving (AP) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations : a review (2009)

## Plan de l'exposé

- 1 Analyse d'un schéma AP pour un modèle cinétique à deux vitesses
  - Présentation du modèle
  - Présentation du schéma
  - Les résultats de convergences
- 2 Application au système de Broadwell
  - Le modèle de Broadwell et ses propriétés
  - Simulations numériques
  - Quelques propriétés du schéma AP



## Outline

- 1 Analyse d'un schéma AP pour un modèle cinétique à deux vitesses
  - Présentation du modèle
  - Présentation du schéma
  - Les résultats de convergences
- 2 Application au système de Broadwell
  - Le modèle de Broadwell et ses propriétés
  - Simulations numériques
  - Quelques propriétés du schéma AP



## Un modèle cinétique à deux vitesses

Pour tout  $(t, x)$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x v^\varepsilon = 0, \\ \partial_t v^\varepsilon + a \partial_x u^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{R}(u^\varepsilon, v^\varepsilon), \end{cases} \quad (\mathcal{P}^\varepsilon)$$

$$\text{Conditions initiales : } u^\varepsilon(0, x) = u_0^\varepsilon(x), \quad v^\varepsilon(0, x) = v_0^\varepsilon(x). \quad (CI^\varepsilon)$$

(H0)  $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^1$  possède un unique équilibre local :  $\mathcal{R}(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = A(u)$ ,  
et une condition de **stabilité** sur le gradient de  $\mathcal{R}$ .

$$\text{Problème limite : } \begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ v = A(u), \end{cases} \quad (\mathcal{P}^0)$$

avec  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $v(0, x) = v_0(x)$ .

## Condition de stabilité

- ▶ La fonction  $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  possède un unique équilibre local :

$$\mathcal{R}(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = A(u)$$

où  $A$  est une fonction continue Lipschitzienne,  $A(0) = 0$ .

- ▶ La condition *sous-caractéristique* :

$$\partial_v \mathcal{R}(u, v) > 0, \quad \left| \frac{\partial_u \mathcal{R}(u, v)}{\partial_v \mathcal{R}(u, v)} \right| < \sqrt{a}$$

Exemple de la relaxation semi-linéaire : le modèle de Jin & Xin



Whitam (1974), Liu (1987), Natalini (1998).



## Convergence vers l'équilibre local ( $\mathcal{P}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}^0$ )

Sous une condition de **stabilité** :

### Théorème

Bornes uniformes sur la solution de ( $\mathcal{P}^\varepsilon$ ) :

$$\begin{cases} \|v^\varepsilon(t) \pm \sqrt{a} u^\varepsilon(t)\|_\infty \leq C, \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ TV(u^\varepsilon(t)) + TV(v^\varepsilon(t)) \leq C, \forall t \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

Contrôle de la déviation  $\delta^\varepsilon = v^\varepsilon - A(u^\varepsilon)$  :

$$\|\delta^\varepsilon(t, \cdot)\|_1 \leq e^{-\frac{\beta_0 t}{\varepsilon}} \|\delta^\varepsilon(0, \cdot)\|_1 + C\varepsilon.$$

Convergence vers l'équilibre local : lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0, \infty); L^1_{loc}(\mathbb{R})), \quad v^\varepsilon \rightarrow A(u) \text{ dans } \mathcal{C}([\nu, \infty); L^1_{loc}(\mathbb{R})),$$

où  $u$  est solution du problème limite ( $\mathcal{P}^0$ ).



## Discrétisation : Volumes Finis

► Paramètre de discrétisation  $h = (\Delta t, \Delta x)$  :

- Maillage uniforme en espace  $(x_{j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ ,  $C_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$ , pas d'espace  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ ,
- maillage en temps  $t^n = n \Delta t$ , soumis à la condition :

$$0 < \lambda := \frac{\sqrt{a} \Delta t}{\Delta x} < 1. \quad (\text{CFL})$$

► Condition initiale : pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$u_j^{\varepsilon,0} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u_0^{\varepsilon}(x) dx, \quad v_j^{\varepsilon,0} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} v_0^{\varepsilon}(x) dx. \quad (\text{CI}_h^{\varepsilon})$$

Construction de la solution approchée  $(u_h^{\varepsilon}, v_h^{\varepsilon})$  :

$$(u_h^{\varepsilon}, v_h^{\varepsilon})(t, x) = (u_j^{\varepsilon,n}, v_j^{\varepsilon,n}) \quad \text{pour } (t, x) \in [t^n, t^{n+1}[ \times C_j, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}.$$



## Stratégie de splitting

Méthode volumes finis basée sur un splitting : transport + termes sources.

- ▶ un schéma **TVD** pour le **transport** ;
- ▶ pour la partie **relaxation** → **pénalisation** de l'opérateur :

$$\partial_t v = - \underbrace{\frac{\mathcal{R}(u, v) - L(u, v)}{\varepsilon}}_{\text{partie non dissipative}} - \underbrace{\frac{L(u, v)}{\varepsilon}}_{\text{partie dissipative}},$$

où l'opérateur  $L(u, v)$  vérifie :

- **conservation de l'état stationnaire**  $v = A(u)$ ,
- opérateur linéaire en  $v$  (**facile à inverser**).

Puisque

$$\mathcal{R}(u, v) = \underbrace{\mathcal{R}(u, A(u))}_{=0} + \partial_v \mathcal{R}(u, A(u)) [v - A(u)] + O(\|v - A(u)\|^2),$$

un choix possible est  $L(u, v) := \beta [v - A(u)]$  avec  $\beta > 0$ .



## Le schéma de splitting

Étape 1 :

$$\begin{cases} u_j^{\varepsilon, n+1/2} = u_j^{\varepsilon, n} - \Delta t D_h v_j^{\varepsilon, n}, \\ v_j^{\varepsilon, n+1/2} = v_j^{\varepsilon, n} - \Delta t a D_h u_j^{\varepsilon, n}. \end{cases} \quad (\text{E1})$$

Étape 2 :

$$\begin{cases} u_j^{\varepsilon, n+1} = u_j^{\varepsilon, n+1/2}, \\ v_j^{\varepsilon, n+1} = v_j^{\varepsilon, n+1/2} - \left( v_j^{\varepsilon, n+1/2} - A(u_j^{\varepsilon, n+1/2}) \right) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{\beta \Delta t}{\varepsilon}} \right] \\ \quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon} e^{-\frac{\beta \Delta t}{\varepsilon}} \mathcal{R} \left( u_j^{\varepsilon, n+1/2}, v_j^{\varepsilon, n+1/2} \right). \end{cases} \quad (\text{E2})$$



Dimarco, Pareschi (2011) (schémas exponentiels)

## Les résultats de convergences

(i) Contrôle de la déviation par rapport à l'équilibre :

$$\begin{cases} \|\delta^{\varepsilon,n}\|_1 \leq C\varepsilon + \|\delta^{\varepsilon,0}\|_1 e^{-\beta_0 t^n/\varepsilon} & \forall n \geq 0, \varepsilon > 0, \\ \|\delta^{\varepsilon,n}\|_1 \leq e^{-\beta_0 t^n/\varepsilon} \|\delta^{\varepsilon,0}\|_1 + C\Delta t e^{-\beta_0 \Delta t/\varepsilon} & \text{si } \varepsilon < \Delta t. \end{cases}$$

(ii) Convergence du schéma (non uniforme en  $\varepsilon$ ) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_h^\varepsilon(t, x) - u^\varepsilon(t, x)| + |v_h^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(t, x)| dx \\ \leq \frac{C}{\varepsilon} \left( \Delta t \left( \frac{\|\delta^{\varepsilon,0}\|_{L^1}}{\varepsilon} + 1 \right) + \Delta x^{1/2} \right). \end{aligned}$$

(iii) Asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ 

$$\|u_h^\varepsilon(t) - u_h(t)\|_1 + \|v_h^\varepsilon(t) - v_h(t)\|_1 \leq C_t e^{-\beta_0 \Delta t/\varepsilon} [1 + \|\delta^{0,0}\|_1].$$



## Éléments de preuve

Diagonalisation :  $w = -v - \sqrt{a} u$ ,  $z = +v - \sqrt{a} u$ ,

$$G(w, z) := \mathcal{R}(u, v) \rightarrow \begin{cases} \partial_t w^\varepsilon + \sqrt{a} \partial_x w^\varepsilon = +G(w^\varepsilon, z^\varepsilon)/\varepsilon, \\ \partial_t z^\varepsilon - \sqrt{a} \partial_x z^\varepsilon = -G(w^\varepsilon, z^\varepsilon)/\varepsilon. \end{cases}$$

Au niveau discret, la première étape (E1) donne un schéma **upwind**, tandis que (E2) devient :

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^{n+1/2} + G_{\varepsilon, \Delta t} \left( w_j^{n+1/2}, z_j^{n+1/2} \right), \\ z_j^{n+1} = z_j^{n+1/2} - G_{\varepsilon, \Delta t} \left( w_j^{n+1/2}, z_j^{n+1/2} \right), \end{cases} \quad (\mathcal{E}2)$$

où l'opérateur discret  $G_{\varepsilon, \Delta t}$  a de bonnes propriétés de **monotonie** :

$$G_{\varepsilon, s}(w, z) = \left( \frac{z-w}{2} - A \left( -\frac{w+z}{2\sqrt{a}} \right) \right) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\beta s}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{\beta s}{\varepsilon}} \right] + \frac{s}{\varepsilon} e^{-\frac{\beta s}{\varepsilon}} G(w, z).$$

Propriétés de monotonie de l'opérateur  $G_{\varepsilon, s}$ 

- (i) Pour  $i = 1, 2$ , soient  $(w_i^{n+1}, z_i^{n+1})$  deux solutions de  $(\mathcal{E}2)$  correspondant à deux conditions initiales  $(w_i^{n+1/2}, z_i^{n+1/2})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^{n+1} - w_2^{n+1} = (w_1^{n+1/2} - w_2^{n+1/2}) (1 + \partial_w G_{\varepsilon, s}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (z_1^{n+1/2} - z_2^{n+1/2}) \partial_z G_{\varepsilon, s}, \\ z_1^{n+1} - z_2^{n+1} = (z_1^{n+1/2} - z_2^{n+1/2}) (1 - \partial_z G_{\varepsilon, s}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (w_1^{n+1/2} - w_2^{n+1/2}) \partial_w G_{\varepsilon, s}. \end{array} \right.$$

- (ii) Pour tous  $\varepsilon, s > 0$ , pour tout  $(w, z)$  dans un compact :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \partial_w G_{\varepsilon, s}(w, z) \leq 0, \\ 0 \leq \partial_z G_{\varepsilon, s}(w, z) \leq 1. \end{array} \right.$$



- Estimations *a priori* : grâce aux propriétés de monotonie de l'opérateur  $G_{\varepsilon,s}$  on montre que, si la condition initiale est bornée dans  $BV$  (indépendamment de  $\varepsilon$ ), alors :

- Bornes  $L^\infty$  et  $BV$  uniformes en  $\varepsilon$  de la solution numérique  $(u_h^\varepsilon, v_h^\varepsilon)$ , et condition sous-caractéristique toujours vérifiée.

- Analyse des erreurs de consistance.

- Régularisation de la solution continue par convolution, formule des caractéristiques.

$$w_\delta(t, x) = w \star \rho_\delta(t, x), \quad z_\delta(t, x) = z \star \rho_\delta(t, x), \quad \mathcal{R}_\delta = \mathcal{R} \star \rho_\delta.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\delta(t^{n+1}, x) = w_\delta(t^n, x - \sqrt{a}\Delta t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Delta t} \mathcal{R}_\delta(u, v)(t^n + s, x - \sqrt{a}(\Delta t - s)) ds, \\ z_\delta(t^{n+1}, x) = z_\delta(t^n, x + \sqrt{a}\Delta t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Delta t} \mathcal{R}_\delta(u, v)(t^n + s, x + \sqrt{a}(\Delta t - s)) ds. \end{array} \right.$$

- Distinction des erreurs des deux étapes, propriétés de  $G_{\varepsilon,s}$ .

## Outline

- 1 Analyse d'un schéma AP pour un modèle cinétique à deux vitesses
  - Présentation du modèle
  - Présentation du schéma
  - Les résultats de convergences
- 2 Application au système de Broadwell
  - Le modèle de Broadwell et ses propriétés
  - Simulations numériques
  - Quelques propriétés du schéma AP

## Le modèle de Broadwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_+ + \partial_x f_+ = \frac{1}{\varepsilon} Q_+, \\ \partial_t f_0 = \frac{1}{\varepsilon} Q_0, \\ \partial_t f_- - \partial_x f_- = \frac{1}{\varepsilon} Q_-, \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}^\varepsilon)$$

où

$$Q_+ = Q_- = -Q_0 = f_0^2 - f_+ f_-.$$

$$\text{Deux lois de conservation associées : } \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x z = 0. \end{array} \right. \quad (\text{CL})$$

avec :

$$\rho = f_+ + 2f_0 + f_-, \quad m = \rho u = f_+ - f_-, \quad z = f_+ + f_-.$$

## Propriétés

- Les équilibres locaux :

$$Q(f) = 0 \Leftrightarrow f = \mathcal{M} \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{M}_+ = \frac{\rho}{4} (1 + u)^2, \\ \mathcal{M}_0 = \frac{\rho}{4} (1 - u^2), \\ \mathcal{M}_- = \frac{\rho}{4} (1 - u)^2. \end{cases}$$

- Fonctionnelle d'entropie :  $\mathcal{H}(f) := \sum_v f_v \ln f_v$ , et  $H(f) = \int \mathcal{H}(f) dx$ .

## Théorème H

Pour un domaine spatial périodique :  $\frac{d}{dt} H(f) = -\frac{1}{\varepsilon} D(f) \leq 0$ , où :

$$D(f) = \int (f_0^2 - f_+ f_-) \ln \left( \frac{f_0^2}{f_+ f_-} \right) dx.$$

De plus, le minimum de l'entropie est atteint en les Maxwelliennes locales :

$$\frac{d}{dt} H(f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ est un équilibre local } \mathcal{M}.$$

## Résultats d'existence et limite hydrodynamique

La condition de **stabilité** est immédiate grâce à la positivité des fonctions distribution de particules :

$$|u| := \left| \frac{m}{\rho} \right| = \left| \frac{f_+ - f_-}{f_+ + 2f_0 + f_-} \right| \leq 1.$$

$$\text{Problème limite : } \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) & = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x \left( \frac{1}{2} (\rho + \rho u^2) \right) & = 0. \end{cases} \quad (\mathcal{P}^0)$$



Arkeryd, Broadwell, Levermore, Wagner, Nishida, Inoue ...



Illner, Patlowski,

Discrete velocity models of the Boltzmann equation : a survey of the Mathematical aspects of the theory (1989)



Caflish, Jin, Russo,

Uniformly accurate schemes for hyperbolic systems with relaxation (1997)

## Le schéma AP (version cinétique)

Étape 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{+j}^{n+1/2} = f_{+j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{+j}^n - f_{+j-1}^n) , \\ f_{0,j}^{n+1/2} = f_{0,j}^n , \\ f_{-j}^{n+1/2} = f_{-j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{-j+1}^n - f_{-j}^n) . \end{array} \right. \quad (\mathcal{E}1)$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} f_{v,j}^{n+1} &= e^{-\beta \Delta t / \varepsilon} f_{v,j}^{n+1/2} + \beta \frac{\Delta t}{\varepsilon} e^{-\beta \Delta t / \varepsilon} \left( \frac{1}{\beta} Q_{v,j}^{n+1/2} + f_{v,j}^{n+1/2} \right) \\ &+ \left[ 1 - \left( 1 + \beta \frac{\Delta t}{\varepsilon} \right) e^{-\beta \Delta t / \varepsilon} \right] \mathcal{M}_{v,j}^{n+1} . \end{aligned} \quad (\mathcal{E}2)$$

Pas de propriété de monotonie !!



## Le schéma AP (version macroscopique)

Étape 1 :

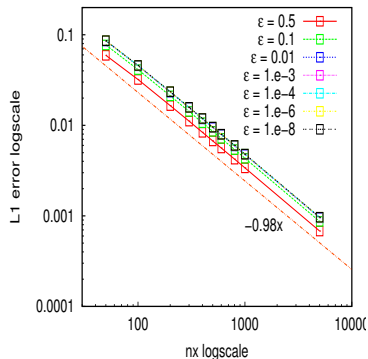
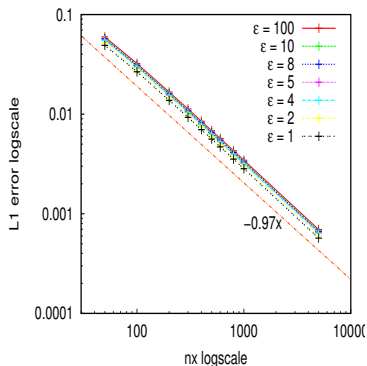
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1/2} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ (m_{j+1}^n - m_{j-1}^n) - (z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n) \right], \\ m_j^{n+1/2} = m_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ (z_{j+1}^n - z_{j-1}^n) - (m_{j+1}^n - 2m_j^n + m_{j-1}^n) \right], \\ z_j^{n+1/2} = z_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ (m_{j+1}^n - m_{j-1}^n) - (z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n) \right]. \end{array} \right. \quad (E1)$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} z_j^{n+1} &= z_j^{n+1/2} + \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{\beta \Delta t}{\varepsilon}} \right] \left( A_j^{n+1} - z_j^{n+1/2} \right) \\ &+ 2 \frac{\Delta t}{\varepsilon} e^{-\frac{\beta \Delta t}{\varepsilon}} Q_{+j}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (E2)$$



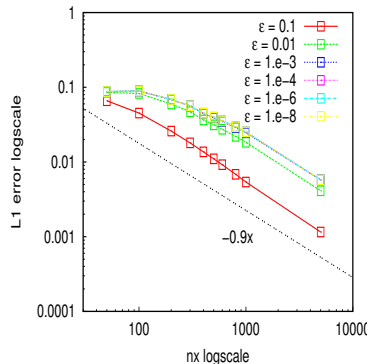
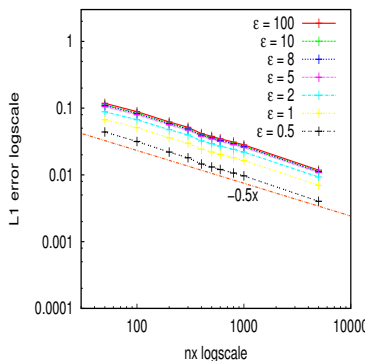
## Test numérique : précision uniforme par rapport à $\varepsilon > 0$



Estimation de la norme  $L^1$  de l'erreur au temps  $t = 1$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et une donnée initiale régulière.



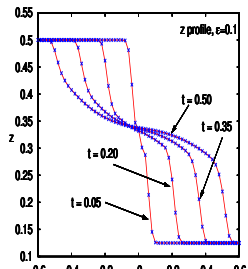
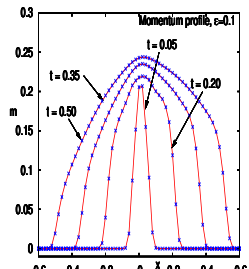
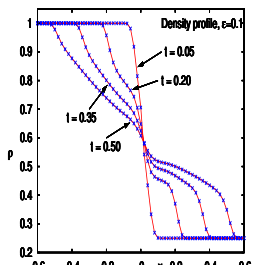
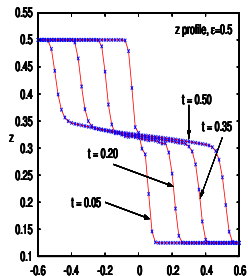
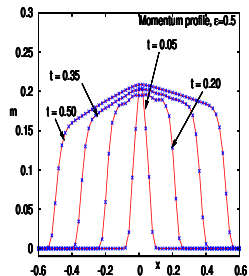
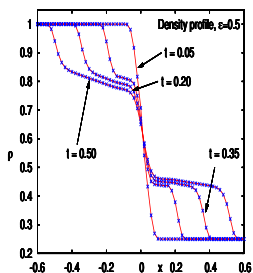
## Test numérique : précision uniforme par rapport à $\varepsilon > 0$

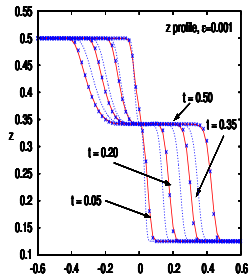
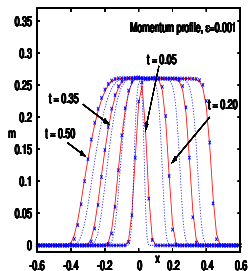
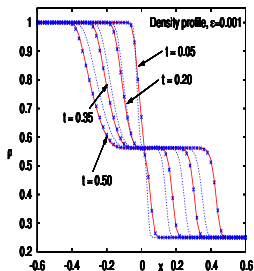
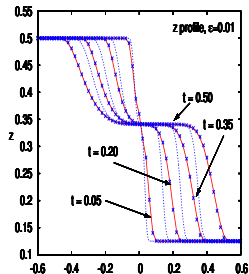
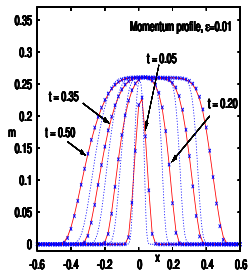
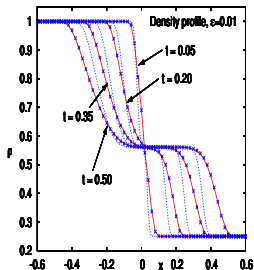


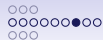
Estimation de la norme  $L^1$  de l'erreur au temps  $t = 1$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et une donnée initiale peu régulière.



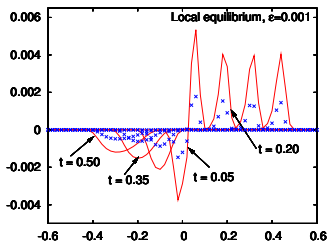
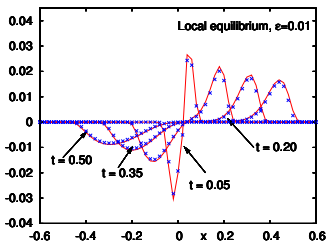
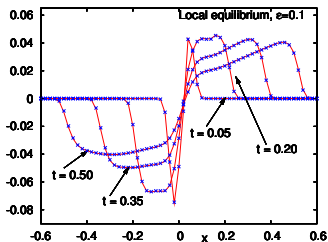
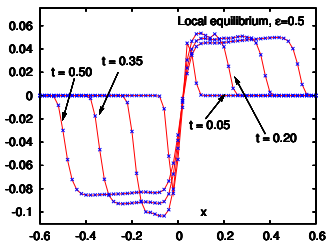
## Evolution de la solution numérique







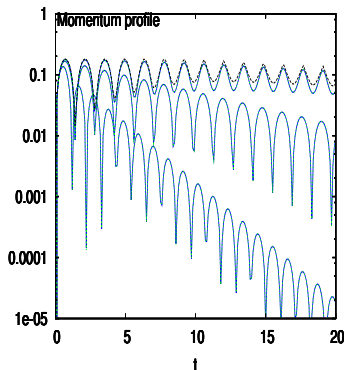
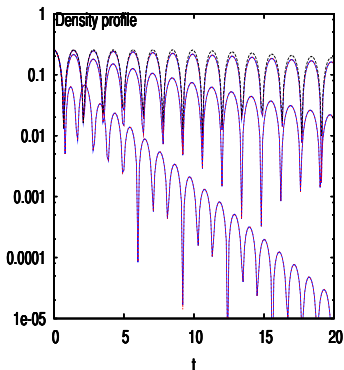
## Evolution de la déviation par rapport à l'équilibre





## Test numérique : comportement en temps long

Pour une donnée initiale régulière.

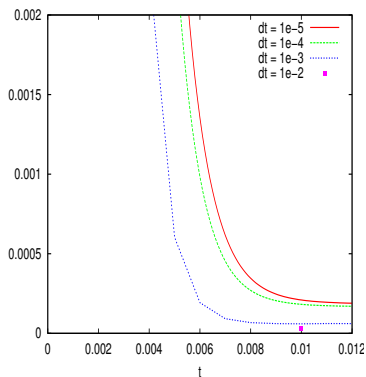
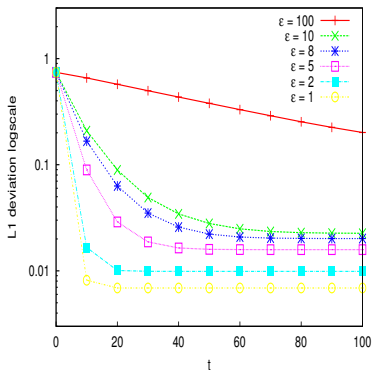


Evolution en temps de la norme  $L^1$  de la solution numérique pour différentes valeurs de  $\epsilon$  (0.5, 0.05, 0.005) et comparaison avec la solution du problème limite.



## Test numérique : condition initiale en dehors de l'équilibre

Déviaton par rapport à l'équilibre  $v - A(\mathbf{u})$  en norme  $L^1$ . (à gauche,  $n_x = 800$ ,  $dt = 0.001$  fixés ; à droite  $\varepsilon = 0.001$ ,  $n_x = 200$ )





Estimation  $L^\infty$  et conservation de la masse

## Proposition

Si  $f_{v,j}^0 \geq 0$ , pour tous  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $v \in \{+, 0, -\}$ . Si de plus

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^0 > 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_j^0 = \beta_1. \end{array} \right.$$

Alors, avec  $\beta > \beta_1$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $v \in \{+, 0, -\}$  :

$$|u_j^n| = \left| \frac{m_j^n}{\rho_j^n} \right| \leq 1.$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f_{v,j}^n \leq \beta_1, \quad 0 < \rho_j^n \leq \beta_1, \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_j^n = \beta_1. \end{array} \right.$$

## Déviation par rapport à l'équilibre et estimation BV

Si de plus on a pour tout  $n \geq 0$  :

$$0 < \beta_0 \leq \|\rho^n\|_{L^\infty} < \beta,$$

où  $\beta_0$  est indépendante de  $n$ ,  $\varepsilon$  et  $h$ , alors, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\|\delta^n\|_{L^1} \leq C_T(\varepsilon) \left( e^{-\frac{\beta_0 \Delta t}{\varepsilon}} \|\delta^0\|_{L^1} + 1 \right).$$

Par ailleurs :

$$TV(f^{n+1}) \leq (1 + \alpha(\varepsilon) \Delta t) TV(f^n),$$

où la variation totale de  $f = (f_+, f_0, f_-)^T$  est définie par :

$$TV(f) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_v |f_{v,j+1} - f_{v,j}|.$$

## Inégalité d'entropie

## Proposition

Sous les mêmes hypothèses, on a pour tout  $n \geq 0$  :

$$H^{n+1} - H^n \leq -\lambda D(f_h^{n+1}) \leq 0,$$

avec :

$$D(f_h^{n+1}) = \sum_j \Delta x \left( (f_{0j}^{n+1})^2 - f_{+j}^{n+1} f_{-j}^{n+1} \right) \ln \left( \frac{(f_{0j}^{n+1})^2}{f_{+j}^{n+1} f_{-j}^{n+1}} \right),$$

et le coefficient  $\lambda \geq 0$  défini par :

$$\lambda = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{\alpha} [1 - \alpha],$$

où

$$\alpha = \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right) \frac{\beta \Delta t}{\varepsilon} \right] \leq e^{-\frac{\beta_0 \Delta t}{\varepsilon}}.$$