

ESTIMATIONS D'ERREUR A POSTERIORI, CRITERES D'ARRET ET IMPLEMENTATIONS PEU COUTEUSES

pour contrôle d'erreur et efficacité dans des simulations numériques

Résumé

Cette habilitation porte sur des algorithmes numériques pour la discrétisation des équations elliptiques et paraboliques de convection–diffusion–réaction linéaires et non linéaires, des équations de Stokes et d'une inégalité variationnelle modèle. L'attention principale est sur le développement d'algorithmes qui permettent d'atteindre une précision donnée par l'utilisateur. Le calcul devrait en plus être efficace dans le sens où la quantité de travail nécessaire est la plus petite possible.

Notre instrument de base sont les estimations d'erreur a posteriori. Nous les développons pour plusieurs méthodes numériques classiques, volumes finis, éléments finis, éléments finis mixtes ou la méthode de Galerkin discontinue. Nous proposons plusieurs cadres unifiés, embrassant toutes ces méthodes. Nous nous concentrons sur des estimations optimales, à savoir des estimations : i) garanties dans le sens où une borne supérieure d'erreur entre la solution exacte inconnue et la solution approchée connue, entièrement calculable, est donnée ; ii) efficaces localement dans le sens où elles donnent une borne inférieure locale à l'erreur ; iii) asymptotiquement exactes, c'est-à-dire telles que l'index d'efficacité (le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur actuelle) tend vers 1 en augmentant le coût du calcul ; iv) robustes dans le sens où que les trois propriétés précédentes sont valables indépendamment des paramètres et de leur variation ; et v) pouvant être évaluées pour un coût négligeable.

Nos estimations permettent de distinguer, d'estimer séparément et de comparer les différentes composantes de l'erreur. On peut par la suite arrêter les différents algorithmes itératifs (solveurs itératifs linéaires, solveurs itératifs non linéaires) au moment où les erreurs subsidiaires correspondantes diminuent en deçà du niveau où elles n'affectent plus l'erreur totale. On peut aussi ajuster les paramètres du calcul (par exemple les maillages en espace ou les pas de temps) de telle sorte que les erreurs substantielles (l'erreur de discrétisation en espace, l'erreur de discrétisation en temps) soient distribuées de façon équilibrée et de grandeurs comparables. A l'aide d'une telle adaptativité, l'efficacité des simulations numériques et le contrôle de l'erreur peut être atteinte.

La dernière partie de cette habilitation est dédiée aux implémentations peu coûteuses et les relations entre différentes méthodes numériques, ce qui en particulier permet de développer des cadres unifiés. Nous montrons également comment obtenir des approximations améliorées par le post-traitement local et présentons des analyses a priori non traditionnelles.

Tous les articles de cette habilitation contiennent des résultats théoriques. Certains décrivent aussi des implémentations d'algorithmes adaptatifs dans des codes de calcul et la plupart sont étroitement liés aux applications telles que l'écoulement et transport de contaminants en milieu poreux, les écoulements diphasiques ou des problèmes de contact unilatéral.

Mots clés : problème de convection–diffusion–réaction du second degré, problème de Stokes, problème monotone non linéaire, problème parabolique dégénéré, inégalités variationnelles, méthode des volumes finis, méthode des éléments finis, méthode des éléments finis mixtes, méthode de Galerkin discontinue, maillages non coïncidants, multi-échelles, multi-numérique, technique des joints, existence et unicité, convergence, estimation d'erreur a priori, estimation d'erreur a posteriori, méthodes itératives pour des systèmes linéaires algébriques, linéarisation itérative, critères d'arrêt, équilibrage des composantes d'erreur, raffinement du maillage adaptatif, calcul efficace, contrôle de l'erreur, relations entre différentes méthodes, expressions locales des flux, post-traitement local, cadre unifié, robustesse, écoulement et transport de contaminants, écoulement diphasique, milieu poreux, contact unilatéral, membranes élastiques

AMS subject classifications : 35J20, 35K65, 46E35, 65M12, 65M15, 65M60, 65N15, 65N30, 74K15, 74M15, 76M10, 76M12, 76S05