Projet Master 2, IMSP FreeFem++, 2018: Pollution du lac Nokoué

Frédéric Hecht

7 mai 2018

Table des matières

1 Généralités

Géométries On s'intéresse à la modélisation et la simulation de l'effet d'une rivière polluante sur le lac Nokoué. Les rivières ne sont pas dans le domaine de calcul, seules leurs embouchures dans le lac le sont ; la géométrie du problème est alors constituée d'un lac connecté à 3 rivières $\{\Gamma_i\}_{1,2,3}$; on suppose par exemple que l'eau entre dans le lac par Γ_1 et Γ_2 et sort par Γ_3. Comme nous faisons une approximation bidimensionnelle du problème le lac est modélisé par un domaine plan Ω de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où Γ_0 désigne les rives du lac (voir figure **??**).

L'eau L'écoulement dans le lac est supposé incompressible, non-visqueux et sans tourbillon (irrotationnel), ce qui permet l'existence d'une fonction

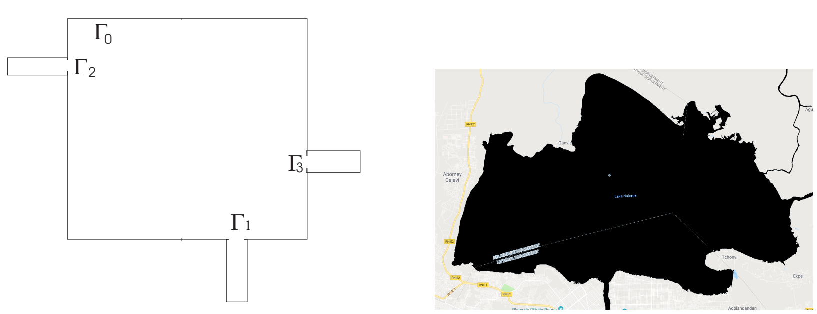

FIGURE 1 – Géométries pour les calculs.

potentiel d'écoulement ϕ telle que

$$u = \nabla\phi, \quad -\Delta\phi = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Gamma_i} = a_i, \; i > 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0 \tag{1}$$

où u est la vitesse et p la pression dans l'eau. Les constantes a_i sont des données déterminant la quantité d'eau qui entre/sort du lac par ces frontières.

Les pollutions solides Les pollutions solides (papiers, sacs plastiques, feuilles mortes...) sont modélisées par des particules ponctuelles de type "scalaires passifs", c'est à dire un ensemble de M points de R^2 convectés par l'eau. La position $X_j(t)$ au temps t d'une particule j qui était en X_j^0 à l'instant initial est donc donnée par

$$\dot{X}_j(t) = u(X_j(t)) \quad X_j(0) = X_j^0, \quad j = 1..M \tag{2}$$

On peut approcher ces équations par

$$X_j^{n+1} = X_j^n + u(X_j^n)\delta t, \quad X_j^0 \text{ donné.} \tag{3}$$

Si toutes les particules n'ont pas le même effet polluant (taille du sac plastique par exemple) il convient d'associer un poids w_j à la j-ème particule ; celui-ci reste constant dans le temps sauf si la pollution est bio-dégradable.

Densité de pollution Soit $\{X_j(t), w_j\}_1^M$ un ensemble de M particules ponctuelles de poids $\{w_j(t)\}_0^M$ convectées par l'eau mais aussi agités par un mouvement brownien (prise en compte de la turbulence dans l'eau du lac), alors

$$X_j^{n+1} = X_j^n + u(X_j^n)\delta t + \sqrt{2\sigma\delta t}\mathcal{N}_j^n, \quad X_j^0 \text{ donné.} \tag{4}$$

où $\mathcal{N}_j^n$ est une réalisation de $\mathcal{N}$ qui est une variable aléatoire gaussienne centrée en 0, de variance unité et à valeurs dans R^2. On suppose donnée la loi de variation des poids w :

$$\dot{w}_j = a(X_j(t))w_j(t) + b(X_j(t))$$

On pose

$$\rho(x,t) = \lim_{M\to\infty,\ \epsilon\to 0} \sum_{\{j\ :\ X_j(t)\in B(x)\}} w_j(t) \tag{5}$$

où $B(x)$ est un disque de centre x et de rayon ϵ petit. Dans la limite $M = O(\epsilon^{-2})$, $\epsilon \to 0$ et avec quelques hypothèses supplémentaires on peut montrer que

$$\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho - \sigma\Delta\rho = a\rho + b, \qquad \rho(x,0) = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j:X_j^0\in B(x)} w_j(0)$$

Pour que le problème soit bien posé il faut se donner ρ ou $\partial_n\rho$ sur les bords. Si on suppose que les polluants rentrent par $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, sortent par Γ_3 et glissent sur les bords du lac alors on prendra

$$\rho = \rho_\Gamma \text{ sur } \Gamma_i \ , i = 0,1,2 \quad \partial_n\rho = 0 \text{ sur } \Gamma_3$$

avec ρ_Γ donné mais nul sur Γ_0.

Polluants liquides La pollution liquide consiste en général soit de produits chimiques dissous dans de l'eau (ex : sels), soit de polluants liquides non miscibles à l'eau (ex : mazout). Chacun est modélisé par une concentration $\{\rho_i\}_1^I$ dans l'eau du lac et en l'absence de réaction chimique on peut calculer les ρ_i par

$$\partial_t\rho_i + u\cdot\nabla\rho_i - \sigma_i\Delta\rho_i = 0, \qquad \rho(x,0) = \rho_i^0|_\Gamma, \quad \rho_i|_\Gamma \text{ ou } \partial_n\rho_i \text{ donnés} \quad (6)$$

où σ_i est le coefficient de diffusion de l'espèce i.

La chimie Prenons le cas de la décomposition d'un détergent chloré, le chlorure d'hydrogène qui se combine avec un hydrochlorure de sodium pour donner du sel et de l'eau.

$$\mathtt{HCl} + \mathtt{NaOH} \to \mathtt{NaCl} + \mathtt{H_2O} \quad (7)$$

Nous avons à gérer 3 espèces dissoutes dans l'eau, chacune ayant sa concentration, ρ_H, ρ_N, ρ_S pour `HCl,NaOH,NaCl`. On suppose que le taux de réaction est proportionnel aux densités des composants ; par ailleurs la concentration en sel ne nous intéresse pas. On aura donc pour les deux autres espèces

$$\begin{aligned} \partial_t\rho_H + u\cdot\nabla\rho_H - \sigma_H\Delta\rho_H &= -\alpha\rho_H\rho_N \\ \partial_t\rho_N + u\cdot\nabla\rho_N - \sigma_N\Delta\rho_N &= -\alpha\rho_N\rho_H \end{aligned} \quad (8)$$

En effet la réaction (**??**) nous dit qu'il faut une quantité égale des deux espèces pour les faire disparaître. S'il n'y avait pas de courant ni de diffusion on aurait simplement

$$\dot\rho_H(t) = -\alpha\rho_H(t)\rho_N(t), \qquad \dot\rho_N(t) = -\alpha\rho_N(t)\rho_H(t)$$

2 Le projet

On s'intéresse maintenant à l'évolution d'un polluant de densité $\rho_1(x,t)$ dans le lac Noukoué représenté par le domaine Ω.

2.1 Calcul de l'écoulement fluide

Nous rappelons que l'écoulement dans le lac est supposé incompressible, non-visqueux et sans tourbillon (irrotationnel). Il existe donc une fonction potentiel d'écoulement ϕ telle que

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \tag{9}$$

où $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ est la vitesse. La conservation de la masse s'écrivant pour le fluide incompressible

$$\nabla.\mathbf{u} = 0, \tag{10}$$

nous obtenons de (**??**) l'EDP suivante pour le potentiel ϕ :

$$-\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{11}$$

avec des conditions aux limites qui seront précisées plus bas.

L'écoulement fluide peut-être décrit également en introduisant la fonction de courant ψ par

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{12}$$

La conservation de la masse (**??**) est ainsi satisfaite. L'écoulement étant considéré sans rotationnel (sans tourbillon), on peut écrire :

$$0 = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{13}$$

et finalement, en utilisant (**??**), l'équation pour ψ :

$$-\Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{14}$$

Considérons pour commencer le domaine de calcul Ω représenté sur la figure **??**. La frontière du domaine est

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \tag{15}$$

où Γ_1 et Γ_2 modélisent la section transversale de deux rivières se jetant dans le lac (fluide entrant) et Γ_3 est la frontière par laquelle le fluide sort du domaine (fluide sortant). Les autres frontières représentent les berges.

Q1 Construire avec FreeFem++ le maillage représenté sur la figure **??**. On gardera comme paramètres les longueurs des segments définissant les frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ qu'on va noter par ℓ_1, ℓ_2 (largeurs des rivières) et ℓ_3 (largeur du canal de sortie). Prendre comme valeurs par défaut :

$$\ell_1 = \ell_2 = 5, \quad \ell_3 = 10$$

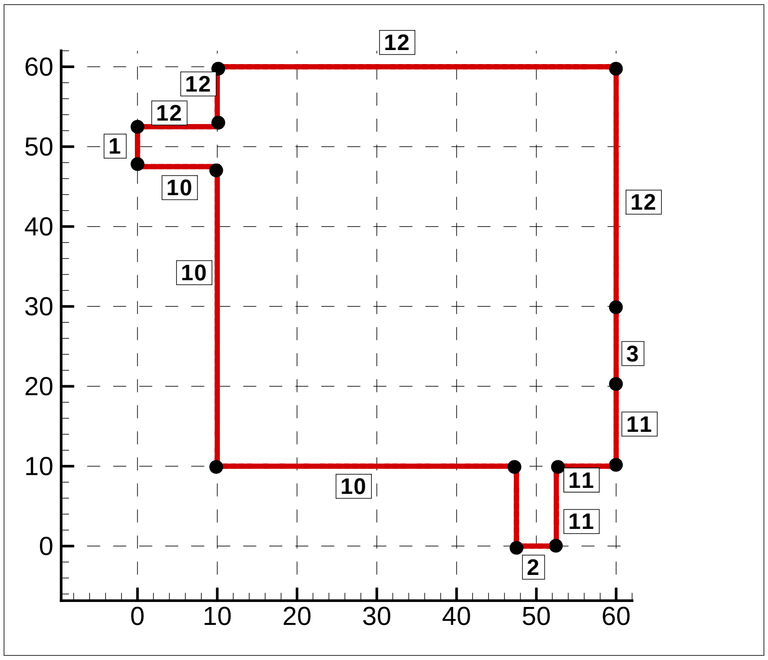

FIGURE 2 – Domaine de calcul Ω.

Q2 Les conditions aux limites du problème seront imposées par rapport au champ de vitesses : la composante normale est nulle sur les berges

$$\mathbf{u}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}, \tag{16}$$

et le fluide entrant est modélisé par une vitesse normale constante sur chaque section

$$\mathbf{u}.\mathbf{n} = -U_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \mathbf{u}.\mathbf{n} = -U_2 \text{ sur } \Gamma_2, \tag{17}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale vers l'extérieur du domaine.

1. À partir de la conservation de la masse (**??**) déduire la relation de compatibilité qui permet de calculer la vitesse normale à travers la section de sortie Γ_3.
2. Déduire les conditions aux limites pour l'équation (**??**) du potentiel ϕ.
3. En utilisant ces conditions aux limites, écrire la formulation variationnelle de (**??**).

Q3 Écrire un programme FreeFem++ pour résoudre l'équation (**??**) pour ϕ en utilisant la méthode des éléments finis P^1. Utiliser comme valeurs :

$$U_1 = 2, \quad U_2 = 1.$$

Visualiser les lignes de niveau de ϕ.
Calculer les deux composantes de la vitesse et visualiser le champ de vecteurs (utiliser la commande `plot(phi, [ux,uy], wait=1)`).
Commenter les résultats obtenus pour

$$U_1 = 1, \quad U_2 = 10.$$

Q4 Écrire les conditions aux limites et la formulation variationnelle pour la fonction de courant ψ. (Indication : utiliser la définition (**??**) et les conditions sur les vitesses – en déduire que $\psi = const$ sur les frontières modélisant les berges.)

Q5 Écrire un programme FreeFem++ pour résoudre l'équation (**??**) pour ψ. Pour simplifier le problème, on considère :

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0. \tag{18}$$

Visualiser les lignes de niveau de ψ. Commenter.

Q6 Résoudre les même problèmes (calcul de ϕ et de ψ) sur le maillage du lac Noukoué (voir figure **??**). Ce maillage est stocké dans le fichier `lac-noukoue.msh` qui sera lu par le script FreeFem++.

'La frontière Γ_1 représente l'embouchure du fleuve Ouémé , Γ_2 l'embouchure de la lagune de Porto-Novo, Γ_3 le canal vers la mer (on négligera les effets dus aux marées), el les autres frontières sont defini comme suit :

Γ_4 est comprise entre la lagune et le canal vers la mer

Γ_5 est comprise entre le canal vers la mer et et l'embouchure du fleuve dans le lac.

Γ_6 est comprise entre l'embouchure du fleuve dans le lac. et la lagune de Proto-Novo.

Le débit du fleuve Ouémé est de $170m^3/s$ pendant le saison des pluies (moment de l'étude), le fleuve Ouémé se sépare en deux branches que l'on supposera de même débit qui se jetent respectivement dans le lac et dans la lagune de Porto-Novo. Nous négligerons tous les autres l'apport en eau pour fermer le modèle et nous supposerons que la profondeur du lac constante et égale à $1m$.

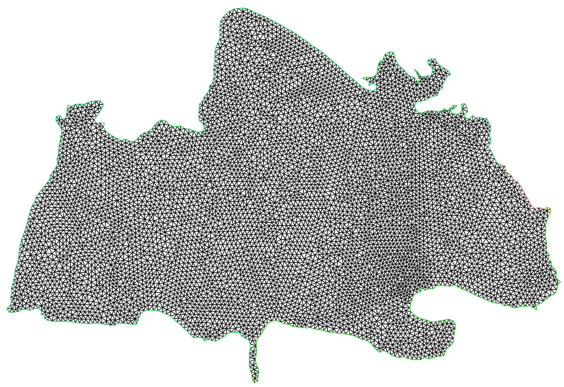

FIGURE 3 – Maillage du lac Noukoué.

2.2 Évolution du polluant

Nous allons supposer que le polluant ρ_1 est de type liquide et miscible et que son évolution est d'écrite par l'equation (**??**). Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'une pollution provenant de la lagune de Porto-Novo et de tracer cette courbe de pollution dans l'année suivant le début de celle ci. On négligera les apports en eau des affluent, on suppose que le lac à une profondeur constante de 1 m. Donc, les conditions aux limites du polluant ρ_1 sont sur sur Γ_1 et sur Γ_2 où les fonctions g_1, g_2 vont modéliser respectivement le flux de polluant provenant du fleuve Ouémé et la lagune de Porto-Novo entrant dans le lac par jour .. C'est à dire que les conditions aux limites du polluant seront respectivement sur Γ_4 ,Γ_5 ,Γ_6 : $\partial\rho_1/\partial\mathbf{n} = \mathbf{0}$, sur Γ_1 : $\rho_1 = g_1$, sur Γ_2 : $\rho_1 = g_2$ et sur Γ_3 : $\partial\rho_1/\partial\mathbf{n} = \mathbf{0}$,(sortie libre).

De plus le polluant rentre avec le debit de l'eau (nous allons supposer que la pollution est équi répatie dans le fleuve et la lagune) donc g_1 égale g_2 et sont des constantes en espace. La quantité de polluant entrant par unite de temps est donné par $Q = \int_{\Gamma_1} g_1\, \partial\phi/\partial\boldsymbol{n} + \int_{\Gamma_1} g_2\, \partial\phi/\partial\boldsymbol{n}$ ce qui permet de calculer $g = g_1 = g_2$ connaissant Q.

Q7 Ecrire le schéma aux différences finies implicite en temps pour la résolution de l'équation (**??**), puis écrire la formulation variationnelle en espace. Ecrire le schéma final correspondant la discrétisation en espace-temps (différences finies en temps et éléments finis en espace).

Q8 Calculer les valeurs des constantes pour imposer les conditions aux limites pour le potentiel de vitesses ϕ et pour le polluant ρ_1. On supposera que l'épisode de pollution dure 3 jours et a un débit de $Q = 500 tonnes/jour$.

Q9 Pour un coefficient de diffusion bidimensionnel $\sigma_1 = 0.1km^2/jours$, calculer avec Freefem++, la courbe du polluant sortant à la mer et entrant de la lagune de Porto-Novo. c'est-'a-dire tracé les deux courbes $\int_{\Gamma_2} \rho_1 \, \partial\phi/\partial\boldsymbol{n}$ et $\int_{\Gamma_3} \rho_1 \, \partial\phi/\partial\boldsymbol{n}$.

Q10 (Question subsidiaire) Comment faire pour prendre en compte la variation du debit du fleuve au cours des 4 saisons ainsi que l'évaporation.(voir le document Hydrologie de L'Ouémé).