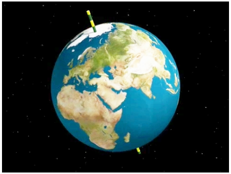
Mathématiques et océanographie

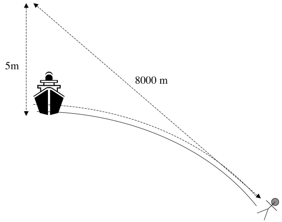
Isabelle Gallagher & Laure Saint-Raymond

Paris, le 28 septembre 2007



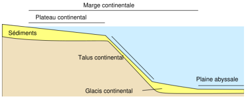
L'océan, un système complexe

- Par sa géométrie



Courbure terrestre

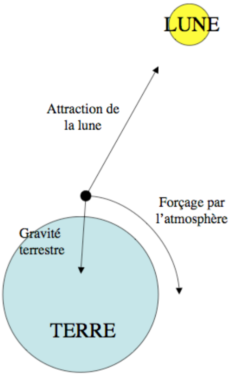
Découpe des côtes



Relief sous-marin

- Par ses couplages

  - Attraction de la lune
  - Gravité terrestre
  - Forçage par l'atmosphère



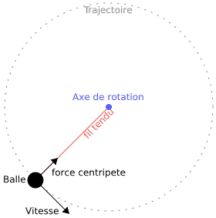
- Par la superposition de nombreux mouvements
  - Echelle planétaire : rotation de l'océan avec la Terre
  - Echelle $\sim$ 1000 km :
    grands courants (Gulf Stream, Kuroshio)
    phénomènes quasi périodiques (El Niño)
  - Echelle $\sim$ 10 km :
    marées, houle, déferlement des vagues
    phénomènes localisés en temps (raz de marée)

Modèles mathématiques

- Choix du repère

On s'intéresse au mouvement **relatif** par rapport à la Terre.

La rotation de la Terre (de vitesse $\overrightarrow{\Omega}$) produit deux effets supplémentaires :



Force centripète

Force de Coriolis

- Choix de l'échelle

On s'intéresse au mouvement des océans **à grande échelle** :

- échelle horizontale $\sim$ 1000 km
- échelle verticale $\sim$ 10 km

Dans ce cadre, il est pertinent - en première approximation -

- de considérer une géométrie simplifiée (bords réguliers) ;
- de négliger les couplages (hors gravité terrestre).

Résultats mathématiques

Équations de la mécanique des fluides

- Les inconnues :

  la vitesse $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ et la pression $p(t, \overrightarrow{x})$ de l'eau au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)*

- Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{cases}$$

établies par L. Euler en 1755 dans le cas d'un fluide non visqueux ($\overrightarrow{\nabla}$ *correspond à une dérivation par rapport aux variables* (x_1, x_2, x_3)).

Résultats mathématiques

Équations de la mécanique des fluides

- Les inconnues :

  la vitesse $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ et la pression $p(t, \overrightarrow{x})$ de l'eau au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)*

- Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{cases}$$

  établies par L. Euler en 1755 dans le cas d'un fluide non visqueux ($\overrightarrow{\nabla}$ *correspond à une dérivation par rapport aux variables* (x_1, x_2, x_3)).

Résultats mathématiques

- Équations de la mécanique des fluides

  - Les inconnues :

    la vitesse $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ et la pression $p(t, \overrightarrow{x})$ de l'eau au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)*

  - Les équations du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{array} \right.$$

établies par L. Euler en 1755 dans le cas d'un fluide non visqueux ($\overrightarrow{\nabla}$ *correspond à une dérivation par rapport aux variables* (x_1, x_2, x_3)).

Résultats mathématiques

▸ Équations de la mécanique des fluides

- Les inconnues :

  la vitesse $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ et la pression $p(t, \overrightarrow{x})$ de l'eau au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)*

- Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{cases}$$

établies par L. Euler en 1755 dans le cas d'un fluide non visqueux ($\overrightarrow{\nabla}$ *correspond à une dérivation par rapport aux variables* (x_1, x_2, x_3)).

Résultats mathématiques

▶ Équations de la mécanique des fluides

- Les inconnues :

  la vitesse $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ et la pression $p(t, \overrightarrow{x})$ de l'eau au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)*

- Les équations du mouvement :

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\substack{\text{pression et} \\ \text{force centripète}}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega}}_{\text{force de Coriolis}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} \quad , \end{array}\right.$$

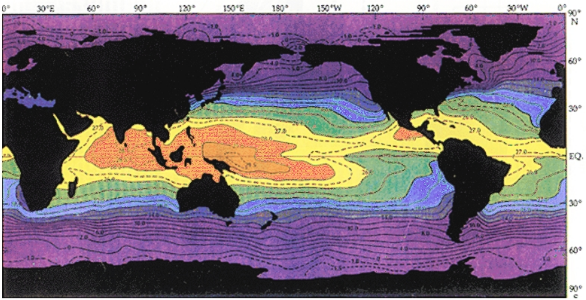
établies par L. Euler en 1755 dans le cas d'un fluide non visqueux ($\overrightarrow{\nabla}$ *correspond à une dérivation par rapport aux variables* (x_1, x_2, x_3)).

Résultats mathématiques

- Effet de la force de Coriolis (dominant aux grandes échelles)

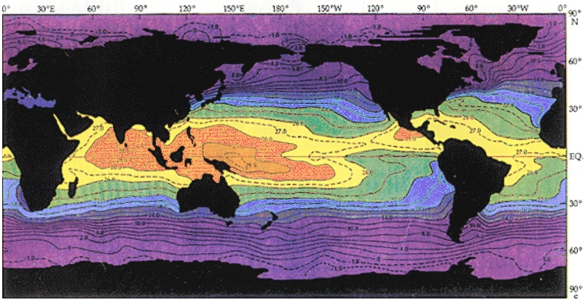
• Latitudes moyennes : Effet stabilisant lié à la présence d'ondes de Poincaré
(travaux des années '90)

• Zone équatoriale : Difficulté supplémentaire due au changement d'orientation de la force de Coriolis
(publication 2006)



Ondes piégées, de trois types (avec des temps de propagation très différents) : - Poincaré (rotation),

- Kelvin (gravité),
- Rossby (variations de $\overrightarrow{\Omega}$)



Ondes piégées, de trois types (avec des temps de propagation très différents) : - Poincaré (rotation),

- Kelvin (gravité),
- Rossby (variations de $\overrightarrow{\Omega}$)

Défis actuels

- Élaborer des modèles complexes
  - Couplage océan-atmosphère (vent, évaporation, ...)
  - Propriétés du fluide (salinité, température, ...)
- Comprendre des phénomènes exceptionnels
  - Introduction aux méthodes statistiques
  - Calcul du mouvement moyen (turbulence)
  - Calcul de la déviation

Sources

Page 2 :
http ://www.carphaz.com
http ://fr.wikipedia.org/wiki/Plaine abyssale

Page 5 :
http ://fr.wikipedia.org/wiki/Force de Coriolis

Page 9 :
http ://www.cnrs.fr/cw/dossiers/dosclim/rechfran/4theme/roledeLocean/gdimghtml/3fig2p26II.html