

Les jeux de la Finance et du Hasard

Gilles Pagès

`gpa@ccr.jussieu.fr`

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires

UMR-CNRS 7599

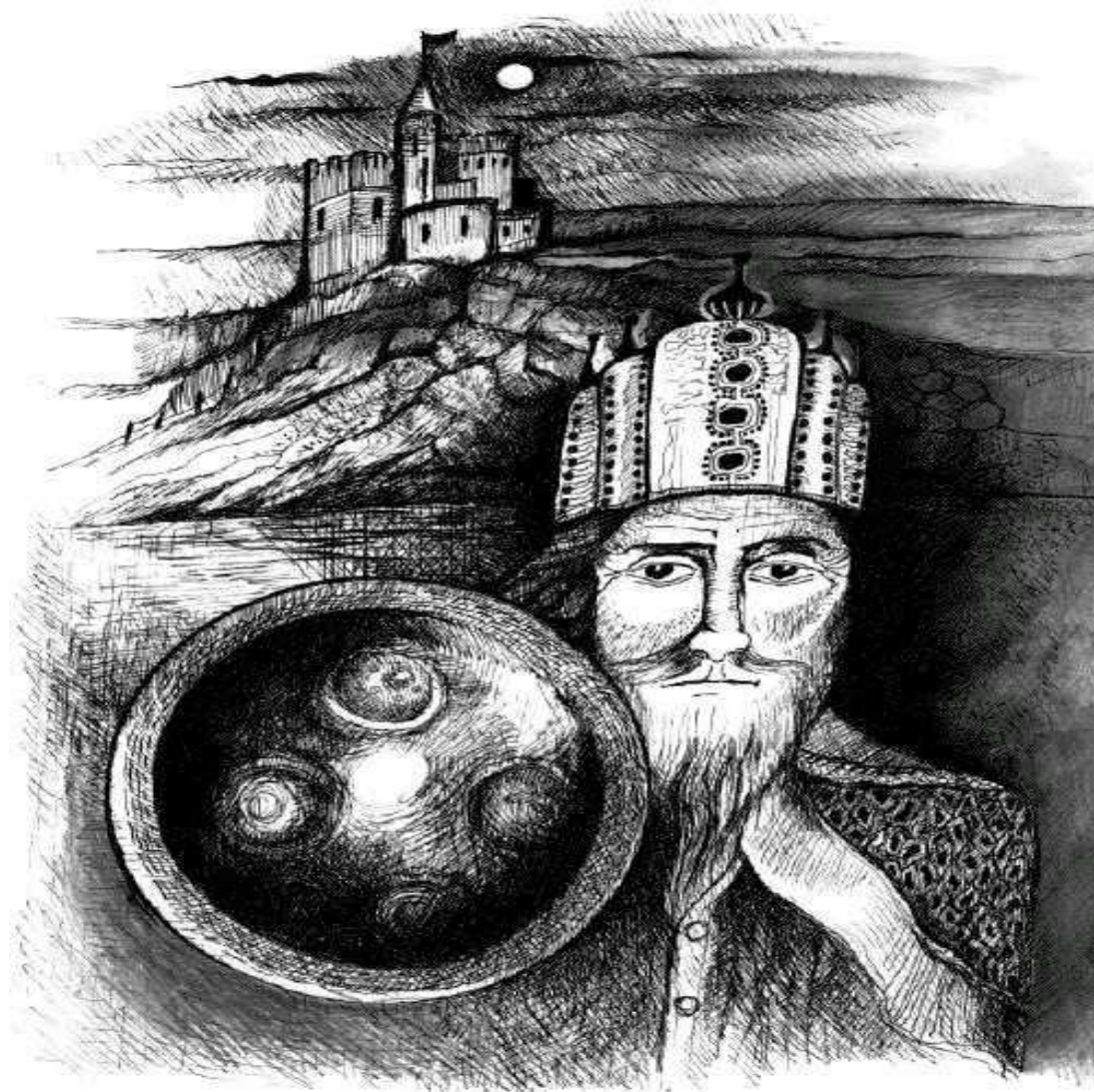
Université PARIS 6-Pierre & Marie Curie

Fondation Sciences Mathématiques de Paris

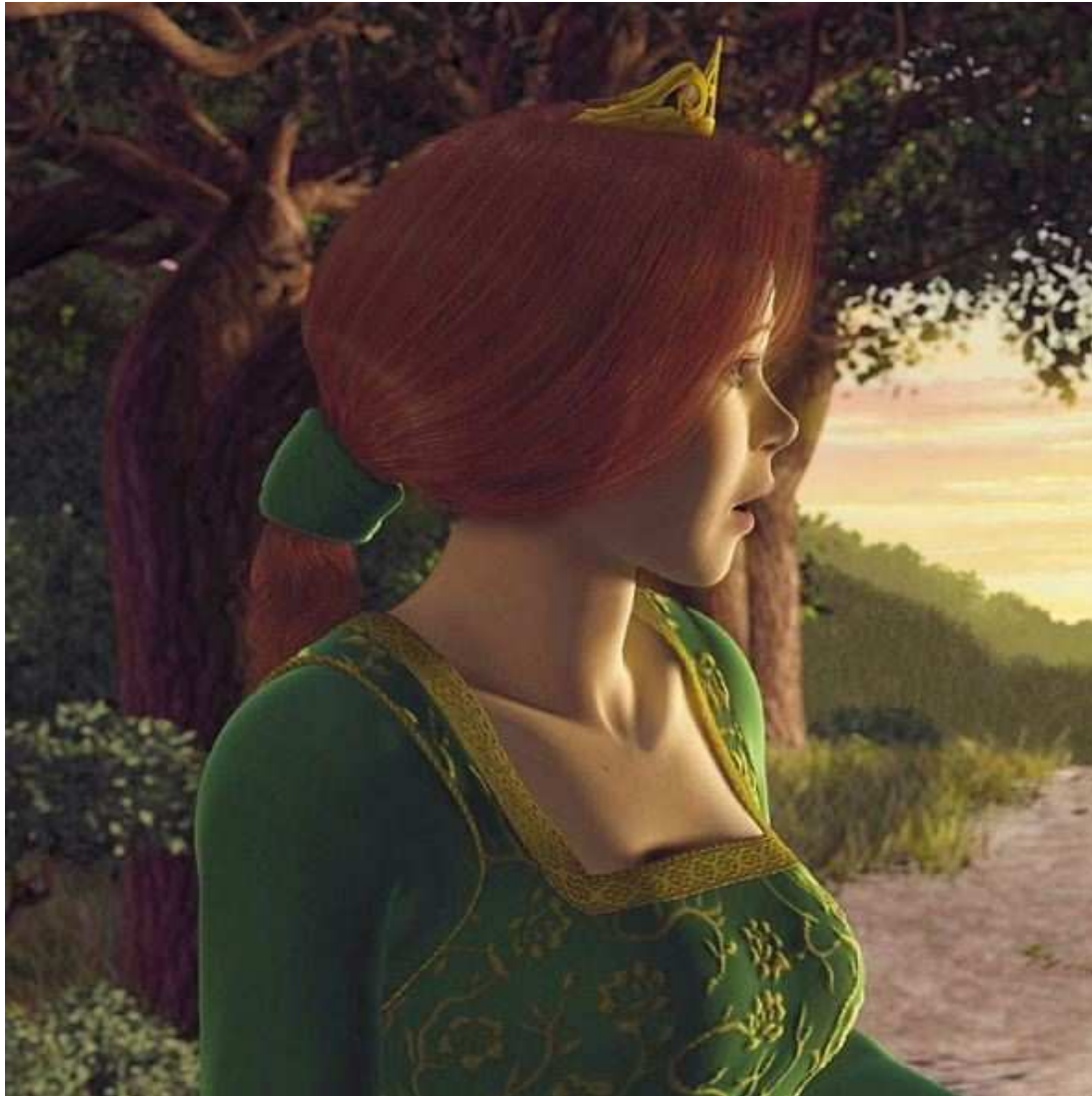
Collège de France

Les jeux de l'amour Il était une fois...

▷ ...un vieux roi fatigué qui voulait marier sa fille



▷ ...qui, **elle**, ne le souhaitait guère



Ils conclurent un contrat gré à gré...

▷ Le Roi et sa fille s'accordèrent sur le protocole suivant :

- La Princesse recevrait chaque jour l'un des N prétendants du royaume.
- Elle aurait une journée pour se faire une opinion par elle-même...

(Désolé, pas d'images ...)

Quoique...



- Puis **elle** devrait, soit épouser le prétendant, soit le récuser à jamais, ...



- Et si, au terme du N ème jour, aucun ne **lui** convenait ...**elle** épouserait le dernier.



▷ **La Princesse** a fait à Paris un

Master de mathématiques financières

(avec les vestales des marchés : N. El Karoui, L. Élie ou H. Geman ou ...)

▷ Elle y a appris comment

gérer ce contrat de façon optimale

▷ **MODÈLE (SIMPLISTE) DE PRÉTENDANTS** : Les prétendants du royaume sont *a priori* des êtres “*i.i.d.*” (indépendants, identiquement distribués) :

- “indépendants” les uns des autres
- mais “statistiquement analogues”.

Elle va les noter au fil des rencontres. Soit

X_k la note entre 0 et 20 du k ème prétendant.

▷ **LA FONCTION “BONHEUR ATTENDU”** (*expected happiness*) à la date k s’obtient par **arbitrage** entre le présent et ce que l’on sait du futur

$$B_k = \max \left(X_k, \underbrace{\text{Approximation de } B_{k+1} \text{ sachant l'histoire jusqu'en } k}_{\mathbb{E}(B_{k+1} \mid \text{histoire}_k)} \right)$$

$$B_k = \max (X_k, \mathbb{E}\text{spérance}(B_{k+1})) \quad \text{et} \quad B_N = X_N.$$

▷ **CALCUL DU BONHEUR MOYEN ATTENDU** : On procède de façon *rétrograde* (*backward*)

$$\mathbb{E}B_N = \mathbb{E}X_N = 10$$

et

$$\mathbb{E}B_k = \mathbb{E}(\max(X_k, \mathbb{E}(B_{k+1}))) = \int_0^{20} \max(x, \mathbb{E}(B_{k+1})) dx$$

et

$$\mathbb{E}B_k = 20 \times \rho_{N-k}, \quad \rho_k = \frac{1 + \rho_{k+1}^2}{2}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2}.$$

▷ **LA STRATÉGIE OPTIMALE** : Définir une *règle d'arrêt*

$$\theta = \min\{k : k < N \text{ et } X_k > \mathbb{E}B_{k+1}\} \quad \text{ou} \quad \theta = N \text{ (à défaut)}$$

i.e. on s'arrête dès qu'on a trouvé mieux que ce que l'on peut espérer en moyenne demain.

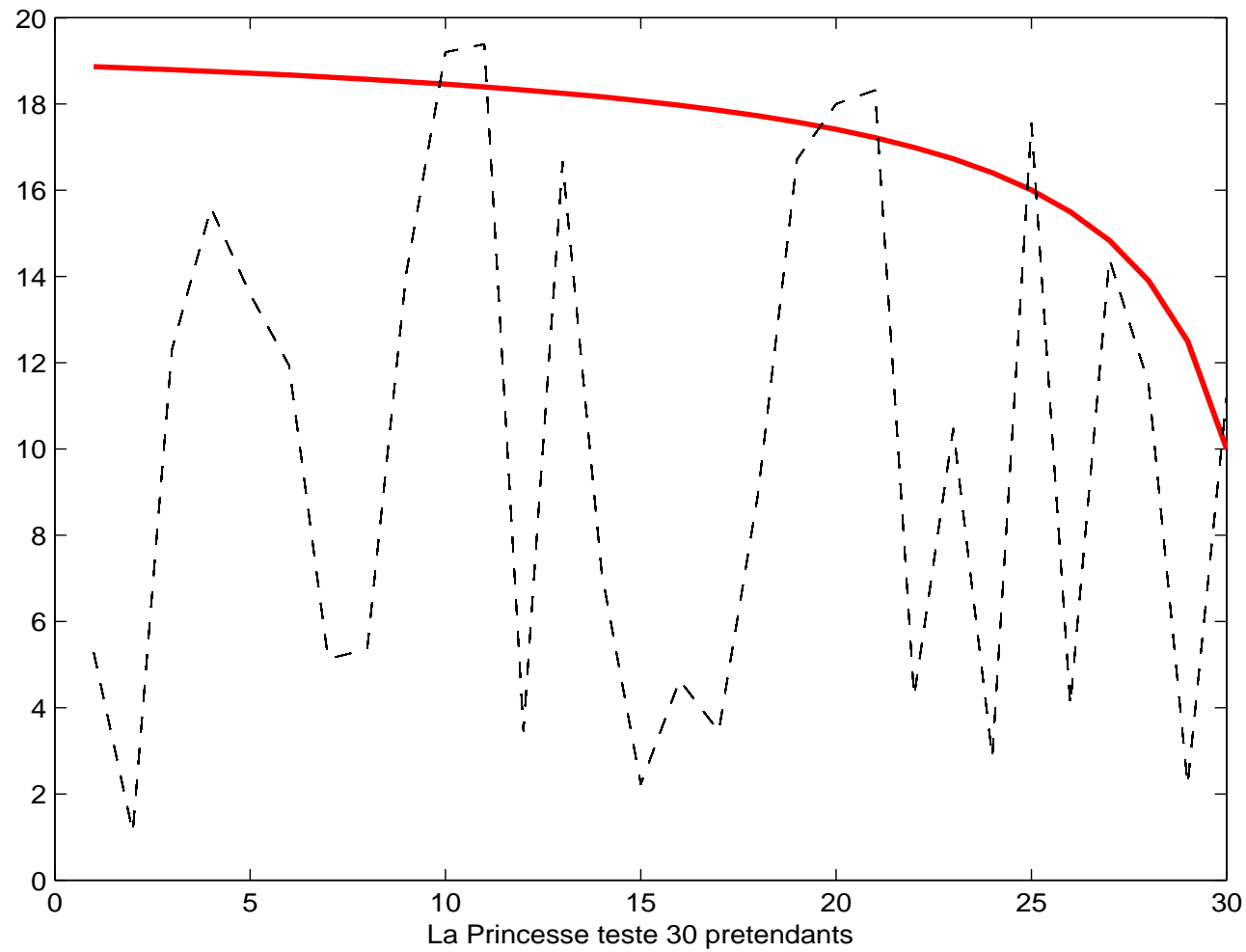


FIG. 1: Le prétendant n^o10 a gagné...



FIG. 2: Sans surprise...

Au fait

$$\mathbb{E}\text{spérance}(\theta) \approx \frac{N}{3}$$

La Princesse se marie, mais bientôt elle s'ennuie...

Elle voyage, se lasse, ...Elle s'intéresse aux marchés d'actions ...

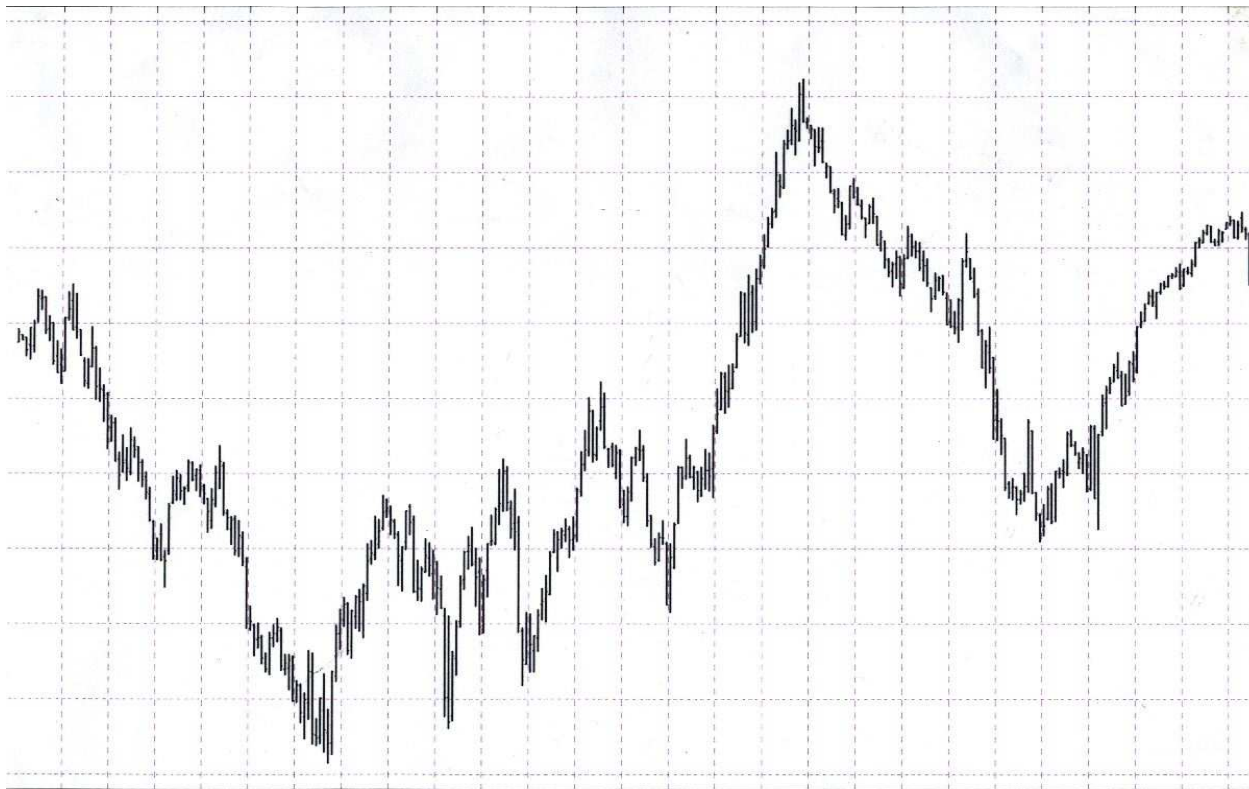


FIG. 3: Cours de l'action *Cogitel Finance*, $k = 0, \dots, N$

...et à leurs *dérivés*. Elle décide d'acheter une option pour protéger ses économies...

Une option américaine ?

Contrat donnant à son détenteur le

Droit d'acheter l'action S au prix d'exercice K , une et une seule fois entre les dates 0 et N .

▷ LA VALEUR DU CONTRAT : Par arbitrage entre aujourd'hui et demain

$$V_k = \max(S_k - K, \mathbb{E}(V_{k+1} \mid \text{histoire jusqu'en } k)), \quad V_N = \max(S_N - K, 0).$$

▷ LA/UNE STRATÉGIE OPTIMALE :

$$\theta := \min \{k : S_k - K \geq \mathbb{E}(V_{k+1} \mid \text{histoire jusqu'en } k)\} \wedge N$$

Une option européenne ?

▷ Contrat donnant à son détenteur le

Droit d'acheter l'action S au prix d'exercice K , à la date N .

▷ Profit lié à la détention du contrat en N :

$$\left. \begin{array}{ll} S_N - K & \text{si } S_N > K \\ 0 & \text{si } S_N \leq K \end{array} \right\} = \max(S_N - K, 0).$$

$$V_k = \mathbb{E}(V_{k+1} \mid \text{histoire jusqu'en } k), \quad V_N = \max(S_N - K, 0).$$

– V_0 est la *prime de l'option* en 0 (prix déterministe payé par **la Princesse**).

Qui a vendu l'option à la Princesse ?

Son **banquier** (via les **analystes quantitatifs** qui travaillent pour lui) !

▷ Comment a-t-il calculé le prix de cette option ? En gérant un **portefeuille dupliquant** la prime de l'option sur le **marché de l'action sous-jacente** :

$$V_k - V_{k-1} = \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1})$$

où δ_{k-1} = quantité d'actions détenue au vu du marché jusqu'en $k - 1$.

$$\max(S_N - K, 0) = V_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1})$$

C'est l'idée de la *gestion* (ou “couverture”) *dynamique* de **Black & Scholes**.

▷ Si $(S_k)_{0 \leq k \leq N}$ est une **martingale** *i.e.* un **modèle de fortune** dans un jeu **équitable**

$$\mathbb{E}(S_k - S_{k-1} \mid \text{histoire jusqu'en } k-1) = 0$$

alors

$$\delta_{k-1} = \frac{\mathbb{E}_*((V_k - V_{k-1})(S_k - S_{k-1}) \mid \text{histoire jusqu'en } k)}{\mathbb{E}_*((S_k - S_{k-1})^2 \mid \text{histoire jusqu'en } k)}.$$

▷ IDÉE DE BLACK & SCHOLES :

Choisir une “probabilité-martingale” $\mathbb{P}^* \neq$ la “vraie” probabilité historique \mathbb{P} .

Un marché où cette probabilité existe et est unique est dit “complet”.

THÉORÈME. (Harrison, Kreps, Pliska) (a) *Dans un marché où il n’y a pas d’arbitrage possible, il existe une “probabilité-martingale” .*

(b) *Dans un marché complet où la “probabilité-martingale” est unique toutes les options peuvent être dupliquées avec l’actif risqué.*

On a alors sous cette **probabilité-martingale** (ou “**risque-neutre**”) en posant

$$V_k = \mathbb{E}_*(\max(S_N - K, 0) \mid \text{histoire jusqu'en } k),$$

une formule de **couverture exacte dite en δ -neutre** par régression

Et en temps continu...

▷ Le mouvement brownien ...géométrique entre 0 et T

$$dS_t = \sigma S_t dW_t \quad (\text{calcul stochastique d'Ito}) \quad \iff \quad S_t = s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}.$$

▷ Formule de Black & Scholes (1973)

$$\text{Prime}_0^{BS} = s_0 \mathcal{N} \left(\frac{\log(s_0/K) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K \mathcal{N} \left(\frac{\log(s_0/K) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

$$\text{Couverture en } t : \quad \delta_t^{BS} = \mathcal{N} \left(\frac{\log(S_t/K) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{fonction de répartition de la loi normale.}$$

Aux dernières nouvelles, la **Princesse**...

a trouvé un poste de **Quant** à la City (Londres).

Comme 60% de nos étudiants en Master de Mathématiques financières.

Elle espère ainsi gagner assez d'argent pour renflouer ...

son vieux pays en état de faillite.