Stabilisation rapide d'une équation Schrödinger

Ludovick Gagnon
Travail en collaboration avec Jean-Michel Coron et Morgan Morancey

Université Pierre et Marie Curie

20 juin 2016

Plan de la présentation

Équation de Schrödinger bilinéaire

Considérons, pour $T > 0$, l'équation de Schrödinger bilinéaire

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta\psi - u(t)\mu(x)\psi, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ \psi(t,0) = \psi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{S}$$

où $\psi_0 \in H^3_{(0)}(0,1)$, $\mu \in H^3(0,1)$ et $\psi \in C((0,T); H^3_{(0)}(0,1))$ (cf. K. Beauchard, C. Laurent, '10). Dans (S), ψ est la fonction d'onde d'une particule dans un puit de potentiel carré et où u est le contrôle agissant sur l'amplitude du champ électrique. L'espace $H^3_{(0)}(0,1)$ est défini par

$$H^3_{(0)} = D((-\Delta)^{3/2}) := \left\{ \phi \in H^3 \cap H^1_0 \,|\, \phi''(0) = \phi''(1) = 0 \right\}.$$

On s'intéresse à la stabilisation rapide locale autour du premier état propre : pour tout $\lambda > 0$, existe-t-il un feedback $u(t) = K(\psi(.,t))$ tel que pour $\|\psi_0 - \varphi_1\|_{H^3_{(0)}}$ suffisamment petit

$$\|\psi(.,t) - e^{-\lambda_1 t}\varphi_1\|_{H^3_{(0)}} \leq Ce^{-\lambda t}\|\psi_0 - \varphi_1\|_{H^3_{(0)}},$$

où $(\lambda_k, \varphi_k) = ((k\pi)^2, \sqrt{2}\sin(\lambda_k x))$.

Équation de Schrödinger bilinéaire

On s'intéresse à la stabilisation rapide autour du premier mode propre. On considère, par simplicité, au linéarisé autour de φ_1 (shift du spectre où $\lambda_1 = 0$)

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi = -\Delta\Psi - v(t)\mu(x)\varphi_1(x), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ \Psi(t,0) = \Psi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \Psi(0,x) = \Psi_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{Slin}$$

Théorème (K. Beauchard, C. Laurent, '10)

Soit $T > 0$ et supposons que $\mu \in H^3_{(0)}$ satisfait

Hypothèse (Hypothèse de contrôlabilité)

Il existe $C > 0$ tel que

$$|\langle \mu\varphi_1, \varphi_k\rangle| \geq \frac{C}{k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour tout $\Psi_0 \in H^3_{(0)}$ et $\Psi_T \in H^3_{(0)}$, il existe $v \in L^2((0,T);\mathbb{R})$ tel que la solution Ψ de (Slin) avec la condition initiale $\Psi(0,.) = \Psi_0$ satisfait $\Psi(T,.) = \Psi_T$.

Stabilisation rapide

En s'inspirant des méthodes de transformation linéaire en dimension finie et en supposant l'hypothèse de contrôlabilité, on montre la stabilisation rapide exponentielle du linéarisé

Théorème (J.-M. Coron, L. G., M. Morancey, '16)

Soit $T > 0$. Supposons que μ satisfait l'hypothèse de contrôlabilité. Alors, pour tout $\lambda > 0$, il existe $C > 0$ et un feedback $v(t) = K(\psi(t, \cdot))$ tel que pour tout $\Psi_0 \in H^3_{(0)}$ la solution de (Slin) satisfasse

$$\|\Psi(t, \cdot)\|_{H^3_{(0)}} \leq Ce^{-\lambda t}\|\Psi_0\|_{H^3_{(0)}}.$$

En utilisant une méthode similaire, la stabilisation rapide de l'équation de Korteweg-de Vries (J.-M. Coron, Q. Lü, '14), l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (J.-M. Coron, Q. Lü, '15) et des équations intégro-différentielles (J.-M. Coron, L. Hu, G. Olive, soumis). La différence principale avec ces travaux est la difficulté technique qu'entraîne le contrôle distribué.

Présentation de la preuve en dimension finie

Considérons

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{dimfinie}$$

où $A \in M_{n\times n}$ et $B \in M_{n\times 1}$. Supposons que (dimfinie) est contrôlable. Considérons le système cible

$$\begin{cases} z'(t) = (A - \lambda I)z(t), & t \in [0, T], \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

qui est stable exponentiellement rapidement pour tout $\lambda > \max(\Re(\lambda_i))$.
Considérons l'application linéaire

$$z = Tx,$$
$$u = Kx.$$

En utilisant les équations sur x et z, on obtient que (T, K) doivent satisfaire

$$AT - \lambda T = TA + BK, \tag{1}$$
$$TB = B. \tag{2}$$

Présentation de la preuve en dimension finie

On a le résultat suivant

Théorème (J. M. Coron, '16)

Supposons que (dimfinie) *est contrôlable. Alors il existe une unique transformation* $(T, K) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{1\times n}$ *satisfaisant* (1)-(2).

L'inversibilité de T permet de montrer que la stabilisation exponentiellement rapidement de x :

$$\|x(t)\| \leq \|T^{-1}z(t)\| \leq \|T^{-1}\|e^{(\|A\|-\lambda)t}\|z_0\| \leq \|T^{-1}\|\|T\|e^{(\|A\|-\lambda)t}\|x_0\|$$

La démonstration de ce théorème repose sur la matrice compagnon. Présentons une preuve différente de ce théorème qui est plus proche du cadre qui nous intéresse.

Présentation de la preuve en dimension finie

Soit $\{\lambda_i, e_i\}_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres (supposées simple) et les vecteurs propres de A. En appliquant e_i à (1)-(2), on obtient

$$(\lambda_i+\lambda-A)Te_i = -BKe_i, \tag{3}$$
$$TBe_i = Be_i. \tag{4}$$

Supposons que $\lambda > 0$ est telle que $(\lambda_i+\lambda-A)$ est inversible. Montrons que $\{\widetilde{T}e_i\}_{1\leq i\leq n}$, solution de

$$(\lambda_i+\lambda-A)\widetilde{T}e_i = -B \tag{5}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. Si $\{\widetilde{T}e_i\}$ est une base, alors (4) permet de définir (T,K).

$$\begin{aligned} & TB = B \\ \iff \quad & T\sum_{i=1}^n b_i e_i = B \\ \iff \quad & \sum_{i=1}^n b_i Ke_i \widetilde{T}e_i = B. \end{aligned} \tag{6}$$

Comme $\{\widetilde{T}e_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base, alors il existe des coefficients Ke_i tels que la dernière relation est satisfaite.

Existence d'une base

Procédons par contradiction : supposons qu'il existe $\{a_i\}_{1\leq i\leq n} \neq 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{T} e_i = 0.$$

En appliquant p fois A à (5), on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i+\lambda)^p \widetilde{T} = -\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i+\lambda)^{p-k}\right) A^{k-1}B, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Supposons qu'un des coefficients

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i+\lambda)^j$$

est non nul. De (7), on a $\{A^{k-1}B\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathrm{vect}\{\widetilde{T}e_i\}$. Or, la condition de contrôlabilité implique $\mathrm{vect}\left\{\{A^{k-1}B\}_{k\in\mathbb{N}^*}\right\} = \mathbb{R}^n$, ce qui est une contradiction. Ainsi ces coefficients doivent tous être nuls ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i+\lambda)^j = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Existence d'une base et inversibilité

Considérons alors la fonction entière

$$G : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e^{(\lambda_i+\lambda)z}.$$

De (8), on obtient pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$G^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i + \lambda)^j = 0.$$

ce qui implique que $a_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
On montre finalement l'inversibilité de T en montrant que $\mathrm{Ker}\ T^* = \{0\}$.
Supposons $x \in \mathrm{Ker}\ T^*$ non nul. Alors,

$$T^*A^*x = A^*T^*x + K^*B^*T^*x + \lambda T^*x = 0.$$

Ainsi, $A^*x \in \mathrm{Ker}\ T^*$. En itérant le même argument, on obtient que $(A^*)^{k+1}x \in \mathrm{Ker}\ T^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$B^*(A^*)^k x = B^*T^*(A^*)^k x = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

qui, par l'observabilité du système adjoint, implique $x = 0$.

Application à l'équation de Schrödinger

Le feedback devant être à valeur réelle, on écrit $\Psi^1 + i\Psi^2 = \Psi$.

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu\varphi_1)(x) \end{pmatrix}, & (t,x) \in (0,1) \times (0,T), \\ \Psi^1(t,0) = \Psi^1(t,1) = 0, \quad \Psi^2(t,0) = \Psi^2(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \Psi^1(0,x) = \Psi^1_0(x), \quad \Psi^2(0,x) = \Psi^2_0(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

On définit la transformation $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} := T \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix}$ où ξ est solution du système cible

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, & (t,x) \in (0,1) \times (0,T), \\ \xi^1(t,0) = \xi^1(t,1) = 0, \quad \xi^2(t,0) = \xi^2(t,1) = 0, & t \in \times(0,T), \\ \xi^1(0,x) = \xi^1_0(x), \quad \xi^2(0,x) = \xi^2_0(x), & x \in \times(0,1), \end{cases}$$

avec $\begin{pmatrix} \xi^1_0 \\ \xi^2_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \Psi^1_0 \\ \Psi^2_0 \end{pmatrix}$.

La transformation et base de Riesz

On considère T et K comme des transformations noyaux

$$
\begin{aligned}
T : H^3_{(0)} \times H^3_{(0)} &\longrightarrow H^3_{(0)} \times H^3_{(0)} \\
\begin{pmatrix} \Psi^1(t,\cdot) \\ \Psi^2(t,\cdot) \end{pmatrix} &\longmapsto \int_0^1 \begin{pmatrix} k_{11}(x,y) & k_{12}(x,y) \\ k_{21}(x,y) & k_{22}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1(t,y) \\ \Psi^2(t,y) \end{pmatrix} dy, \\
K : H^3_{(0)} \times H^3_{(0)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\begin{pmatrix} \Psi^1(t,\cdot) \\ \Psi^2(t,\cdot) \end{pmatrix} &\longmapsto \int_0^1 \alpha^1(y)\Psi^1(t,y) + \alpha^2(y)\Psi^2(t,y)dy.
\end{aligned}
$$

En écrivant la relation $TA + BK = AT - \lambda T$ pour cette transformation, on montre

Proposition

En supposant l'hypothèse de contrôlabilité, l'ensemble

$$\left\{ \widetilde{T} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{T} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est une base de Riesz de $(H^3_{(0)})^2$.

Existence de la transformation

On cherche alors à utiliser la condition $TB = B$ afin de définir T et K. Or, l'hypothèse de contrôlabilité implique

$$\mu\varphi_1 \in (H^3 \cap H^1_0) \setminus H^3_{(0)}$$

ce qui empêche de décomposer directement

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\varphi_1 \end{pmatrix}$$

dans la base de $(H^3_{(0)})^2$. Or, par un argument perturbatif, on montre, en notant α_n^i les coefficients de Fourier des noyaux de K

Proposition

Les suites $(\alpha_n^1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfont

$$\left(\frac{\alpha_n^1}{n^3}\right) \in \ell^2(\mathbb{R}), \quad \left(\frac{\alpha_n^2}{n^3}\right) \notin \ell^2(\mathbb{R}), \quad \alpha_n^2 \sim n^3.$$

Régularité de la transformation T et K

Les coefficients α_n^i permettent de définir T et leur régularité implique

Proposition

La transformation T est linéaire continue de $(H^3_{(0)})^2$ dans lui-même.

Par contre, l'application linéaire K est non borné de $(H^3_{(0)})^2$. En effet, si cela était vrai,

$$\left|K\begin{pmatrix}0\\ \psi^2\end{pmatrix}\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\alpha_n^2\langle\psi^2,\varphi_n\rangle\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha_n^2}{n^3}(n^3\langle\psi^2,\varphi_n\rangle)\right| < +\infty.$$

ce qui impliquerait que $\left(\dfrac{\alpha_n^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{R})$. Notons que le caractère singulier des coefficients α_n^2 est nécessaire puisque $\left(\dfrac{\alpha_n^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{R})$ impliquerait que T est compact.

Inversibilité de T

En dépit du caractère non borné de K, on donne un sens à l'équation $TA + BK = AT - \lambda T$ en utilisant $TB = B$

$$T(A + BK) = AT - \lambda T$$

On montre que cette équation est bien posée dans

$$\begin{aligned} D(A+BK) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \in X^3_{(0)} \,;\, (A+BK) \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \in X^3_{(0)} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \in (H^5 \cap H^3_{(0)}) \times H^5_{(0)} \,;\, -\Delta \Psi^1 + K \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \mu \varphi_1 \in H^3_{(0)} \right\} \end{aligned}$$

qui est dense dans $(H^3_{(0)})^2$. L'équation sur les transformations étant bien posé, on montre l'inversibilité de T en utilisant des techniques similaires à ce qui a été présenté en dimension finie.

Système bouclé bien posé

On montre avec les techniques classiques de semi-groupes que $(A + BK)$ est un générateur infinitésimal de semi-groupe sur $(H^3_{(0)})^2$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix}_t = (A + BK) \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix}$$

est bien posée. Avec l'inversibilité de T, on obtient la stabilisation rapide exponentielle.

Conclusion

La difficulté pour passer au non linéaire est la dépendance du domaine de définition $D(A + BK)$ par rapport au potentiel. En effet,

$$\begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \in D(A+BK) \Leftrightarrow -\Delta^2 \Psi^1(x) + K \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \Delta(\mu\varphi_1)(x) = 0, \quad x = 0, 1.$$

Une voie envisageable est de faire dépendre la transformation de μa où a est une fonction près de φ_1.