ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Topologie et cas limite des injections de Sobolev. Note de **Jean-Michel Coron**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Remise le 14 mai 1984.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'équation $-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}$, $u>0$ dans Ω, $u=0$ sur $\partial\Omega$. On montre que si Ω vérifie une certaine condition géométrique cette équation a au moins une solution.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Topology and Limit Case for Sobolev Imbeddings.

Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^n$. We study the equation $-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}$, $u>0$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$. Under a geometrical condition on Ω, we prove that this equation has at least one solution.

1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME. — Dans ce qui suit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On cherche une solution de :

$$-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, \qquad u>0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

On montre :

THÉORÈME 1. — *Il existe $\lambda>1$ tel que si Ω vérifie la condition suivante :* $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists R_1>0$, $\exists R_2>0$, *tels que :*

$$R_2 > \lambda R_1, \tag{2}$$

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid R_1 \leqq |x-x_0| \leqq R_2\} \subset \Omega, \tag{3}$$

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-x_0| < R_1\} \not\subset \bar{\Omega}, \tag{4}$$

alors (1) *a au moins une solution.*

Remarque 1. — (*a*) On sait, résultat dû à Pohozaev [1], que si Ω est un ouvert étoilé, (1) n'a pas de solution.

(*b*) Par contre si $\Omega = \{x \mid \rho < |x-x_0| < R\}$ avec $x_0\in\mathbb{R}^n$, $0<\rho<R$, alors (1) a une solution; pour le voir, il suffit de chercher un u « radial » : $u(x)=f(|x-x_0|)$. Pour des ouverts invariants par d'autres groupes d'isométries, voir P.-L. Lions [2].

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — On peut, bien sûr, supposer que $x_0=0$. Soit :

$$M = \left\{ v\in H_0^1 \,\middle|\, \int_\Omega |\nabla v|^2 = 1 \right\}$$

[on note H_0^1 pour $H_0^1(\Omega)$] et soit :

$$M^+ = \{v\in M \mid v \geqq 0\}.$$

On pose :

$$J(v) = \frac{1}{\left(\int_\Omega |v|^{2n/(n-2)}\right)^{(n-2)/2}} \qquad \text{pour} \quad v\in M. \tag{5}$$

$J\in C^1(M)$ et :

$$J'(v) = n\,J(v)\{v - J(v)^{2/(n-2)}(-\Delta)^{-1}(|v|^{4/(n-2)}v)\},$$

d'où, si $u=J(v)^{1/2}v$, on a $J'(v)=0$ si et seulement si :

$$-\Delta u = |u|^{4/(n-2)}u.$$

Donc, si $v>0$ dans Ω, u est la solution de (1) si et seulement si $J'(v)=0$. Soit :

$$S=\operatorname{Inf}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\Big|\, u\in H_0^1 \text{ et } \int_\Omega |u|^{2n/(n-2)}=1\right\}.$$

On pose :

$$\bar{S}=\operatorname*{Inf}_{M} J=S^{n/2}.$$

On sait (*voir* [3]) que $\bar{S}$ est indépendant de Ω et n'est jamais atteint. Le théorème suivant, dû à P.-L. Lions [2], précise le comportement des suites minimisantes.

THÉORÈME 2. — *Soit u_k une suite d'éléments de* M *telle que :*

$$J(u_k)=\bar{S}+o(1).$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe $x\in\bar{\Omega}$ telle que :

$$|\nabla u|_k^2 \to \delta_x \qquad (k\to+\infty),$$

où la convergence est la convergence vague des mesures sur $\bar{\Omega}$ et δ_x est la mesure de Dirac en x.

Soit F de M dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(u)=\int_\Omega x|\nabla u|^2.$$

On pose, pour $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$J^\lambda=\{u\in M,\ J(u)\leqq\lambda\}.$$ $J_+^\lambda = J^\lambda \cap M^+$

On déduit facilement du théorème 2 le :

LEMME 1. — *Soit* V *un voisinage de $\bar{\Omega}$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que :*

$$F(J^{\bar{S}+\varepsilon})\subset V.$$

Soit maintenant :

$$u_t^\sigma(x)=\left[\frac{1-t}{(1-t)^2+|x-t\sigma|^2}\right]^{(n-2)/2}, \quad \text{où } t\in[0,1[,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \sigma\in\Sigma^{n-1}=\{\sigma\in\mathbb{R}^n \mid |\sigma|=1\}.$$

On voit facilement que $\int_{\mathbb{R}^n}|u_t^\sigma|^{2n/(n-2)}$ et $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t^\sigma|^2$ sont indépendants de $t\in[0, 1[$ et de $\sigma\in\Sigma^{n-1}$; de plus u_t^σ se « concentre » autour de σ quand t tend vers 1. On sait en outre (*voir* [4], [5] ou [3]) :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t^\sigma|^2=S\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_t^\sigma|^{2n/(n-2)}\right)^{(n-2)/n}.$$

Soit $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n;[0,1])$ telle que :

$$\varphi(x)=0 \ \text{ si } |x|\leqq\frac{1}{4},\qquad \varphi(x)=1 \ \text{ si } \frac{1}{2}\leqq|x|\leqq\frac{3}{2},\qquad \varphi(x)=0 \ \text{ si } 2\leqq|x|$$

et soit, pour $k\geqq1$, $\varphi_k\in C^\infty(\mathbb{R}^n;[0,1])$ définie par :

$$\varphi_k(x)=\varphi(kx) \ \text{ si } |x|\leqq\frac{1}{k},\qquad \varphi_k(x)=\varphi\left(\frac{x}{k}\right) \ \text{ si } k\leqq|x|,\qquad \varphi(x)=1 \ \text{ ailleurs.}$$

Soit P :

$$\mathrm{P}w=\frac{w}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w|^2\right)^{1/2}}\qquad\text{pour}\quad w\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\quad\text{avec}\ |\nabla w|\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

On pose :

$$v^\sigma_{k,t}=\mathrm{P}(\varphi_k u^\sigma_t),\qquad\text{et}\qquad \mathrm{J}(v^\sigma_{k,t})=\frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v^\sigma_{k,t}|^{2n/(n-2)}\right)^{(n-2)/2}}.$$

On a alors, à l'aide d'estimations faciles :

LEMME 2. — $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, *tel que :*

(6) $\quad(\eta\leqq t<1)\ \Rightarrow\ (\forall\sigma\in\Sigma^{n-1}$ *et* $k\geqq 1$, $\mathrm{J}(v^\sigma_{k,t})\leqq\bar{\mathrm{S}}+\varepsilon$ *et* $|\mathrm{F}(v^\sigma_{k,t})-\sigma|\leqq\varepsilon)$;

de plus $\forall\delta>0$, $\exists k_0\geqq 1$, *tel que :*

(7) $\quad(k\geqq k_0)\ \Rightarrow\ (\forall\sigma\in\Sigma^{n-1}$ *et* $\forall t\in[0,1[$, $\mathrm{J}(v^\sigma_{k,t})\leqq\bar{\mathrm{S}}+\delta)$.

Rappelons que l'on dit que J [défini en (5)] satisfait $(\mathrm{PS})_c$ sur M^+ si pour toute suite v_p d'éléments de M^+ avec $\mathrm{J}'(v_p)\to 0$ et $\mathrm{J}(v_p)\to c$, alors on peut extraire de la suite v_p une sous-suite convergente. On a alors le :

LEMME 3. — J *satisfait* $(\mathrm{PS})_c$ *sur* M^+ *pour tout* $c\in]\bar{\mathrm{S}}, 2\bar{\mathrm{S}}[$.

Idée de la démonstration. — Soit $u_p=\mathrm{J}(v_p)^{1/2}v_p$; appliquer la proposition 2.3 de Struwe [6] et remarquer que, avec les notations de [6], soit $u^0\neq 0$ et alors, quitte à extraire une sous-suite, $u_p\to u^0$ dans H^1_0, soit $u^0=0$, alors $k=1$ et $u^1\geqq 0$ et donc grâce à [7] $\mathrm{J}(v_p)\to\bar{\mathrm{S}}$; donc ce dernier cas est impossible.

Remarque 2. — On montre facilement que J′ est localement lipschitzien et que M^+ est invariant par le flot associé à J′.

Notons que si u est solution de (1) et si $v(.)=\lambda^{(n-2)/2}u(\lambda .)$, alors v est solution de (1) si on remplace Ω par Ω/λ. Donc on peut supposer que :

$$\mathrm{R}_1=\alpha^{-1},\qquad \mathrm{R}_2=\alpha$$

et il s'agit de montrer que si α est assez grand, alors (1) a au moins une solution. On prend, dans le lemme 2, $\delta=\bar{\mathrm{S}}/2$ (tout $\delta\in]0,\bar{\mathrm{S}}[$ conviendrait) et on pose :

$$v^\sigma_t=v^\sigma_{k_0,t}\big|_\Omega.$$

On va montrer que si $\alpha\geqq 4k_0$, alors (1) a au moins une solution. Notons que, quand $\alpha\geqq 4k_0$, ce que nous supposerons dans la suite, $v^\sigma_t\in\mathrm{M}^+$, $\forall t\in[0,1[$, $\forall\sigma\in\Sigma^{n-1}$. Soit V un voisinage compact de Ω tel que :

(8) $$\{x\,|\,|x|<\alpha^{-1}\}\not\subset\mathrm{V}.$$

On applique alors le lemme 1 : il existe $\varepsilon>0$ tel que :

(9) $$\mathrm{F}(\mathrm{J}^{\bar{\mathrm{S}}+\varepsilon})\subset\mathrm{V}.$$

On utilise maintenant le lemme 2 (6) : il existe $t_0\in]0,1[$ tel que si $f(\sigma)=v^\sigma_{t_0}$ et $\theta(\sigma)=\mathrm{F}(f(\sigma))$, alors :

(10) $$f(\sigma)\in\mathrm{J}^{\bar{\mathrm{S}}+\varepsilon},\qquad\forall\sigma\in\Sigma^{n-1}$$

et

(11) $$|\theta(\sigma)-\sigma|\leqq\frac{1}{2},\qquad\forall\sigma\in\Sigma^{n-1}.$$

Notons que $f \in C^0(\Sigma^{n-1}; J^{\bar{S}+\varepsilon})$. Il résulte de (11), (8) et (9) que :

(12) f n'est pas homotope à une application constante dans $C^0(\Sigma^{n-1}, J^{\bar{S}+\varepsilon})$.

Soit $\gamma [0, t_0] \to C^0(\Sigma^{n-1}, M^+)$:

$$[\gamma(t)](\sigma) = v_t^\sigma.$$

γ est continue $\gamma(t_0) = f$, et, comme v_0^σ est indépendant de σ, $\gamma(0)$ est une application constante. Il résulte de (7) que :

$$\gamma \in C^0([0, t_0]; C^0(\Sigma^{n-1}; J^{3\bar{S}/2} \cap M^+)).$$

Donc :

(13) f est homotope à une application constante dans $C^0(\Sigma^{n-1}; J^{3\bar{S}/2} \cap M^+)$.

De (12), (13), du lemme 3 et de la remarque 2, on déduit qu'il existe $v \in M^+$ tel que $J'(v) = 0$ et $\bar{S} < J(v) \leqq 3\bar{S}/2$. D'où le théorème.

Remarque 3. — (*a*) Si Ω est un ouvert borné régulier, en utilisant F on montre facilement qu'il existe pour ε assez petit une injection des groupes d'homotopie de Ω dans ceux de $J_+^{\bar{S}+\varepsilon}$. Plus précisément, on peut en fait construire $G \in C^0(\Omega, J_+^{\bar{S}+\varepsilon})$ et $H \in C^0(J_+^{\bar{S}+\varepsilon}, \Omega)$ tels que $H \circ G$ est homotope à l'identité.

(*b*) La méthode ci-dessus peut s'appliquer à d'autres cas limites des injections de Sobolev : applications harmoniques en dimension 2, équations de Yang-Mills en dimension 4, H-systèmes, conjecture de Yamabe, etc. Pour l'analogue du lemme 3 pour les équations de Yang-Mills (resp. les H-systèmes), *voir* [8], prop. 4.4 (resp. [9]).

PROBLÈME OUVERT. — Peut-on supprimer l'hypothèse 2 et, d'une façon plus générale, l'hypothèse « Ω n'est pas contractile dans lui-même » suffit-elle à assurer l'existence d'une solution pour (1) ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. I. POHOZAEV, *Soviet Math. Doklady*, 6, 1965, p. 1408-1411 (traduit de *Russian Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 165, 1965, p. 353-372).

[2] P.-L. LIONS, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 645-648 et The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations, the Limit Case, *Riv. Iberoamericana* (à paraître).

[3] H. BRÉZIS et L. NIRENBERG, *Comm. Pure App. Math.*, 36, 1983, p. 437-477.

[4] Th. AUBIN, *J. Math. pures et appl.*, 55, 1976, p. 269-293.

[5] G. TALENTI, *Annali di Mat.*, 110, 1976, p. 353-372.

[6] M. STRUWE, *A Global Existence Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities* (à paraître).

[7] B. GIDAS, W. M. NI et L. NIRENBERG, *Comm. Math. Phys.*, 68, 1979, p. 209-243.

[8] C. H. TAUBES, Path Connected Yang-Mills Moduli Spaces, *J. Diff. Geometry* (à paraître).

[9] J.-M. CORON et H. BRÉZIS, *Convergence of Solutions of* H-*Systems or How to Blow Bubbles* (à paraître) et *Comptes rendus*, 298, série I, 1984, p. 389-392.

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*