

PROPOSITION SUJETS DE THESES

CONTRATS DOCTORAUX 2021-2024

Appel ciblé (merci de cocher la case correspondante):

- Contrat doctoral établissement ED 536**
 - Contrat doctoral EUR Implantéus**
 - Contrat doctoral EUR Implantéus – co financement INRAE**
-

Directeur de thèse : TERENCE BAYEN (Université d'Avignon, LMA)

Co-directeur éventuel : Jérôme COVILLE (INRAE Avignon, équipe BIOSP)

Co-encadrant éventuel :

Titre en français : Etude asymptotique et contrôle de systèmes couplés EDO-EDP en écologie microbienne.

Titre en anglais : Asymptotical study and control of coupled ODE-PDE systems arising in microbial ecology

Mots-clés : systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, contrôle optimal, optimisation, écosystèmes microbiens, chemostat.

Domaine / Thématique : Mathématiques Appliquées

Co tutelle : Non

Opportunités de mobilité à l'international du doctorant dans le cadre de sa thèse : Courts séjours éventuels au Chili (deux semaines ou plus).

Profil du candidat : Le candidat doit impérativement avoir suivi un Master en Mathématiques Appliquées et avoir une formation solide en systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, et en contrôle optimal. Il est fondamental que le candidat ait par ailleurs une motivation pour les problèmes de modélisation biologique. Enfin, il est fortement souhaitable que le candidat ait suivi des cours d'analyse numérique de manière à mettre en œuvre de nouvelles approches pour la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal et d'optimisation issus de la modélisation biologique.

Présentation détaillée du sujet :

1) Contexte. Le sujet de thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation d'écosystèmes microbiens à l'aide de systèmes dynamiques de type ressource-consommateur (modèle dit du *chemostat*). Ces systèmes ont été introduits notamment par Monod dans les années 1950 (voir [9,11]) et sont aujourd'hui couramment utilisés en biotechnologie. D'un point de vue qualitatif, la théorie des systèmes dynamiques prévoit l'extinction des espèces les moins favorables dans le milieu (principe dit *d'exclusion compétitive*). Le sujet de thèse vise l'étude d'une extension de ces systèmes lorsqu'un *facteur de mutation* entre les espèces bactériennes est pris en compte, le but étant de poursuivre une étude commencée sur ce sujet par T. Bayen et J. Coville (voir [1]). La mutation entre espèces a diverses origines (génétique, mutation par éléments transposables,...) et intervient fréquemment dans les modèles qui décrivent le comportement des micro-algues où le nombre d'espèces est très élevé (voir [4]). Dans ce cadre, on est naturellement amené à considérer des problèmes d'optimisation, par exemple, pour la sélection des souches les plus favorables en vue de les exploiter pour la synthèse de bio-carburants. De telles expériences sur les micro-algues sont menées en laboratoire comme par exemple au LBE Narbonne (Laboratoire de Biotechnologie et Environnement, INRAE Narbonne).

2) Objectifs de la thèse. Durant cette thèse, on s'intéressera d'abord à l'étude du modèle *chemostat avec mutation* lorsque le nombre d'espèces est fini (voir [1,2]). On étudiera des propriétés de stabilité globale du système dynamique correspondant en considérant des extensions de [1] (par exemple lorsque les taux de conversion ne sont pas adimensionnés ou pour des taux de dilution quelconque). On pourra se baser sur [6,7] pour la construction de fonctions de Lyapunov adéquates. Nous envisagerons également l'étude de problèmes de contrôle optimal liés à la maximisation des espèces les plus favorables (optimisation par rapport au taux de dilution) à la fois pour le problème statique (voir [3]) et dynamique (voir [4]). Pour ce faire, nous étudierons l'existence de trajectoires optimales ayant la propriété *turnpike* (voir [12]). Cette propriété a été peu abordée dans la littérature pour des systèmes affines en la commande (généralement, les résultats reposent sur des hypothèses plus fortes de coercivité sur les données) et on pourra donc envisager son extension dans ce cadre. Dans un deuxième temps, nous envisagerons une extension des modèles étudiés dans [1] à l'aide d'un système d'équations aux dérivées partielles qui permet de prendre en compte la dispersion des espèces ainsi que des phénomènes de mutation (voir aussi [10]). La prise en compte de la dispersion pour les espèces est primordiale pour améliorer la précision du modèle et pose également de nouvelles questions méthodologiques sur l'optimisation de ces systèmes (voir par exemple la question des arcs singuliers en dimension quelconque [5]). Il est à noter que les propriétés qualitatives des modèles sous-jacent ont été peu étudiées dans la littérature. On s'intéressera dans ce cadre à l'étude de résultats d'existence de solutions,

au comportement asymptotique, à la stabilisation par contrôle feedback, et à la contrôlabilité de ces systèmes intégro-différentiels qui couplent une équation aux dérivées partielles (pour les espèces microbiennes) et une équation différentielle (pour le substrat).

La thèse vise donc les trois axes suivants :

1. Etude des propriétés qualitatives des systèmes ressource-consommateur avec mutation en dimension finie : comportement asymptotique (stabilité globale), stabilisation, optimisation de la production d'espèces (étude de problèmes de contrôle optimal liés à l'optimisation de ces modèles par le principe de Pontryagin).
2. Propriétés qualitatives des solutions du système ressource-consommateur avec dispersion (infinité d'espèces) : existence de solutions, comportement asymptotique, étude qualitative des solutions à taux de dilution petit, contrôlabilité, stabilisation.
3. Contrôle optimal et optimisation de systèmes d'équations aux dérivées partielles de type intégro-différentiel. Extension des conditions d'optimalité type Pontryagin dans ce cadre.

Les axes 1 et 2 sont liés et pourront être abordés dès le début de la thèse avant d'aborder le point 3 qui requiert une étude bibliographique dans le cas avec semi-groupe uniquement. En ce qui concerne le point 1, on pourra s'appuyer notamment sur les articles [1,2,6,7] pour ce qui est des propriétés qualitatives des systèmes dynamiques mis en jeux et sur [2,3,4] pour l'étude des problèmes de contrôle optimal. On pourra également se référer à [5,8] pour le développement des conditions nécessaires d'optimalité des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (point 3).

Références bibliographiques :

- [1] T. Bayen, H. Cazenave-Lacrouz, J. Coville, *Stability of the chemostat system with a mutation factor*, soumis, <https://arxiv.org/abs/2110.09582>, 2021.
- [2] T. Bayen, H. Cazenave-Lacrouz, J. Coville, F. Mairet, *Dynamics and optimization of microbial growth in the chemostat system with mutations*, soumis, 2021.
- [3] T. Bayen, P. Gajardo, *On the steady state optimization of the biogas production in a two-stage anaerobic digestion model*, J. Math. Biol., 2019, Vol. 78, 4, pp. 1067--1087.
- [4] T. Bayen, F. Mairet, *Optimization of strain selection in evolution experiments in chemostat*, Internat. J. Control, vol. 90, 12, pp. 2748--2759, 2017.
- [5] F. Bonnans, *Optimal control of a semilinear parabolic equation with singular arcs*, Optimization, Methods and Software, vol. 29, 5, pp. 964—978, 2014.

- [6] J. Coville, *Convergence to equilibrium for positive solutions of some mutation-selection model*, <https://arxiv.org/abs/1308.6471>, 2013.
- [7] J. Coville, F. Fabre, *Convergence to the equilibrium in a Lotka-Volterra ODE competition system with mutations preprint*, <https://arxiv.org/abs/1301.6237>, 2013.
- [8] O. Fatorini, *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*, Cambridge University Press, 2010.
- [9] J. Harmand, C. Lobry, A. Rapaport, T. Sari, *The Chemostat : Mathematical Theory of Microorganism Cultures*, Wiley-ISTE, 2017.
- [10] B. Perthame, *Transport equations in biology*, Birkhauser Verlag, Berlin, 2007.
- [11] H.L. Smith, P. Waltman, *The theory of the chemostat*, Cambridge University Press, 1995.
- [12] E. Trelat, E. Zuazua, *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control*, *Journal of Differential Equations*, vol. 258, pp. 81—114, 2015.