

# Etude d'un problème de contrôle optimal en lien avec l'optimisation de la production microbienne<sup>1</sup>

**Mots-clefs** : Systèmes dynamiques, Contrôle optimal, Modélisation, Ecologie microbienne.

## 1 Présentation du sujet

Le stage de Master 2 porte sur les modèles de type ressource-consommateur qui décrivent les interactions entre espèces microbiennes en compétition pour un même substrat. Ces modèles sont couramment utilisés pour décrire l'évolution des concentrations de bactéries présentes dans les lagunes ou les lacs. Ils interviennent aussi en laboratoire (bioprocédés) et sont alors associés aux systèmes dit "chemostat" (voir [6,7]) qui permet de modéliser le fonctionnement d'un bioréacteur. Mathématiquement, l'interaction entre ces espèces est décrite à l'aide d'un système dynamique contrôlé décrivant les concentrations des espèces au cours du temps. Le contrôle qui entre en boucle ouverte dans le système représente généralement le taux de dilution ou la concentration en substrat entrant. Un des enjeux en pratique est de sélectionner optimalement une ou plusieurs espèces d'intérêt comme dans le cas de micro-algues (synthèse de bio-énergie). On cherche par exemple à minimiser le temps d'un tel procédé de sélection ou bien à maximiser la production d'espèces ou d'un co-produit sur une fenêtre de temps donnée (voir [1,2,5]).

## 2 Objectifs du stage

Le but du stage est d'étudier le problème de maximiser la production d'espèces microbiennes au sein d'un chemostat (bioréacteur opéré en continu). Pour ce qui est du modèle, on considérera le système chemostat avec mutation (voir [2,3,4]). L'objectif du stage est de conduire une analyse mathématique du problème de contrôle optimal ainsi défini. Nous nous intéresserons à des propriétés qualitatives du modèle et des contrôles optimaux. Pour cela, on s'appuiera sur la théorie du contrôle optimal (principe du maximum de Pontryagin). On effectuera l'analyse numérique du problème à l'aide de méthodes directes en contrôle optimal (discrétisation et optimisation). Le point central du stage portera sur l'étude de lois de commande sous-optimales pour ce problème définis par retour d'état (dont l'intérêt est qu'elles sont simples à mettre en oeuvre en pratique). Ces lois de commandes sous-optimales seront définis en étudiant le problème d'optimisation statique associé au problème de contrôle optimal (dynamique). Les étapes du stage seront donc les suivantes :

- 1) Etude de certaines propriétés qualitatives du modèle chemostat et étude du problème de contrôle optimal (principe de Pontryagin, arcs singuliers).
- 2) Simulations et calculs numériques de trajectoires optimales à l'aide de méthodes directes contrôle optimal.
- 3) Comparaison du critère à optimiser entre les trajectoires optimales et les trajectoires sous-optimales définies par retour d'état.

---

1. Stage de Master 2

### 3 Déroulement du stage

Le candidat doit avoir suivi un Master en Mathématiques Appliquées et avoir une formation solide en systèmes dynamiques, optimisation, et en contrôle optimal. Il est fondamental que le candidat ait par ailleurs une motivation pour les problèmes de modélisation biologique. Enfin, il est fortement souhaitable que le candidat ait suivi des cours d'analyse numérique de manière à mettre en oeuvre rapidement des simulations numériques par méthode directe ou indirecte de problèmes de contrôle optimal.

Le stage est d'une durée de 4 à 6 mois à définir et se déroulera entre mars et juillet environ à INRIA Sophia-Antipolis. Il sera rémunéré au taux usuel en vigueur. Le stagiaire sera encadré par Walid Djema (INRIA Sophia-Antipolis) et TERENCE Bayen (Université d'Avignon).

Pour tout renseignement et pour candidater, merci d'écrire aux adresses suivantes :

- `walid.djema@inria.fr`

- `terence.bayen@univ-avignon.fr`

### 4 Références

- [1] T. Bayen, F. Mairet, *Optimization of strain selection in evolutionary continuous culture*, International Journal of Control, vol. 90, issue 12, 2017, pp. 2748–2759.
- [2] T. Bayen, F. Mairet, *Optimization of the separation of two species in a chemostat*, Automatica, vol. 50, 4, April 2014, Pages 1243–1248.
- [3] T. Bayen, H. Cazenave-Lacroutz, J. Coville, *Stability of the chemostat system with a mutation factor*, <https://arxiv.org/abs/2110.09582>, 2021.
- [4] P. De Leenheer, J. Dockery, T. Gedeon, S. Pilyugin, *The chemostat with lateral gene transfer*, Journal of Biological Dynamics, vol. 4, 6, pp. 607–620, 2010.
- [5] W. Djema, O. Bernard, T. Bayen, *Optimal control separating two microalgae species competing in a chemostat*, 2020, 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2020, pp. 2368–2373.
- [6] J. Harmand, C. Lobry, A. Rapaport, T. Sari, *The Chemostat : Mathematical Theory of Microorganism Cultures*, Wiley-ISTE, 2017.
- [7] H.L. Smith, P. Waltman, *The theory of the chemostat, Dynamics of microbial competition*, Cambridge University Press, 1995.