

Modèles réduits pour des équations fortement oscillantes

Contact: Sever Hirstoaga (sever.hirstoaga@inria.fr),
Julien Salomon (julien.salomon@inria.fr).

La réduction de modèle est un ensemble de techniques visant à décrire les solutions d'équations aux dérivées partielles par un petit nombre de paramètres. Le but de ce stage est d'étudier des modèles réduits basés sur une moyenne en temps, pour approcher des équations différentielles raides, *i.e.*, dont les solutions comportent deux échelles distinctes en temps. L'approche qui nous intéresse consiste précisément à déterminer des estimations de l'approximation d'un modèle raide par un modèle réduit. Le plan de travail est le suivant. Dans un premier temps, on considérera un système d'équations du type

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon}L\mathbf{u} + N\mathbf{u} = 0, \quad \text{avec } \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad (1)$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ est le vecteur des inconnues, L est une matrice dont les valeurs propres sont imaginaires pures et N est un opérateur non-linéaire. La solution d'un tel système comporte des oscillations en temps de l'ordre de ε . On peut déterminer, *via* un changement de variable, un modèle réduit des solutions de l'équation (1) et obtenir une estimation d'erreur de l'approximation correspondante (voir [1]). Ce résultat est basé sur des lemmes de moyennisation périodique développées dans [3].

On étudiera ensuite la méthode de développement asymptotique décrite dans [2]. Elle sera utilisée pour obtenir un modèle réduit associé à un autre type d'équation, dite singulière, similaire à (1), mais où L est remplacé par un champ de vecteurs \mathbf{b} dont les courbes intégrales sont supposées périodiques. L'idée est alors d'étudier la convergence de la solution d'une telle équation singulière vers la solution du modèle limite développé dans [2].

À terme, ce projet permettra de construire une approximation peu coûteuse qui pourra être combinée avec des méthodes très précises mais parallélisables. De cette manière, nous obtiendrons une méthode à la fois précise et rapide en profitant des avantages d'une réduction de modèle et d'une décomposition du domaine de résolution. Une analyse complémentaire permettra d'obtenir une estimation d'erreur globale de cette méthode.

Références:

1. Peddle, A. G. and Haut, T. and Wingate, B., *Parareal convergence for oscillatory PDEs with finite time-scale separation*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 41 (6), A3476–A3497, 2019.
2. Frénod, E. *Application of the averaging method to the gyrokinetic plasma*, Asymptotic Analysis, vol. 46 (1), 1–28, 2006.
3. Sanders, J. A. and Verhulst, F. and Murdock, J. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, 59, 2007, Springer.