

## Problèmes de défauts dans certaines équations de Hamilton-Jacobi

Le stage a pour but d'étudier certains **aspects théoriques** liés à la théorie dite de l'homogénéisation [2], dont les bases seront si besoin enseignées au début du stage, pour des équations de type Hamilton-Jacobi comme par exemple

$$u_\varepsilon(x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon(x)\right) = 0, \quad (1)$$

dans  $\mathbb{R}^d$ , pour des Hamiltoniens  $H(y, p)$  qui sont originellement des fonctions périodiques de leur premier argument, mais qui sont perturbés par un "défaut" brisant cette périodicité. On pense par exemple à des fonctions du type  $H(y, p) = |p| - V_{per}(y) - \tilde{V}(y)$ , avec  $V_{per}$  périodique et  $\tilde{V}$  à support compact, comme dans [6]. On pense aussi à des fonctions  $H(y, p)$  différentes selon que  $y$  appartient à un demi-espace ou un autre, les deux étant séparés par une interface originellement périodique (voir [1]) mais comportant maintenant des défauts ponctuels (comme dans [3]). On pense enfin à des combinaisons de ces situations, à certaines situations aléatoires, ou à des équations comme (1) mais avec un terme diffusif ou un degré de dérivation supplémentaire de la fonction  $u_\varepsilon$ .

Le cadre de travail et la question posée seront précisés en fonction des connaissances et aspirations du candidat ou de la candidate. En particulier, l'accent peut aussi être mis, simultanément ou alternativement, sur l'**approximation numérique** des fonctions en jeu, et sur les informations qu'on peut tirer de ces simulations pour la convergence de la solution du problème (1) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Une bonne culture des notions de base d'analyse fonctionnelle et d'analyse des équations aux dérivées partielles sera utile. Connaître des rudiments de la théorie de l'homogénéisation [2, 5] et/ou de l'analyse des équations de Hamilton-Jacobi et de leurs solutions de viscosité [4] pourra être un plus.

Le stage se déroulera (à discuter) au laboratoire CERMICS-ENPC à Marne-La-Vallée, à Inria Paris, ou au Laboratoire Jacques-Louis Lions à Paris. Bien sûr, en fonction de la situation sanitaire dans la région parisienne, des aménagements de télétravail pourront être considérés. Le stage pourra éventuellement déboucher sur une thèse.

### Encadrement scientifique :

- Yves ACHDOU (achdou@ljl.univ-paris-diderot.fr), Université de Paris et Laboratoire Jacques-Louis Lions, Bâtiment Sophie Germain, 5, rue Thomas Mann, Paris 13<sup>ème</sup> (Métro Bibliothèque François Mitterrand)
- Claude LE BRIS (claude.le-bris@enpc.fr), CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8, Avenue Blaise Pascal, Marne-La-Vallée (RER A, station Noisy-Champs) & INRIA, 2, rue Simone Iff, 75012 Paris (Métro Dugommier & RER A, station Gare de Lyon).

## References

- [1] Y. Achdou, S. Oudet, N. Tchou, *Effective transmission conditions for Hamilton-Jacobi equations defined on two domains separated by an oscillatory interface*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 106(6), pp.1091-1121.
- [2] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, **Asymptotic analysis for periodic structures**, Studies in Mathematics and its Applications, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects*, Milan Journal of Mathematics, Vol. 80 (2012) 351-367.
- [4] L.C. Evans, The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 111,1989, 3-4, 359-375.
- [5] P.L. Lions, G. Papanicolaou, and SRS. Varadhan, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, preprint (1986).
- [6] P.L. Lions, Cours au Collège de France, 2013-2014, voir aussi PL. Lions & P. Souganidis, travaux en cours.