

**Proposition de stage de M2  
Année universitaire 2021-2022**

## **Problèmes de propagation d'ondes dans des matériaux avec défauts**

Nous étudions des approches possibles, dans différentes situations considérées comme "difficiles", pour l'approximation, à la fois à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique, de la solution d'une équation des ondes du type

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^\varepsilon - \operatorname{div} (a(x/\varepsilon) \nabla u^\varepsilon) = f, \quad (1)$$

munie de conditions initiales (et éventuellement de conditions au bord) appropriées. Le coefficient oscillant  $a(x/\varepsilon)$  encode la structure microscopique du matériau traversé. Il est par exemple une fonction périodique (voir [4]). Comme dans tout problème à plusieurs échelles, l'approximation numérique de la solution  $u^\varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  petit, requiert souvent des discrétisations trop coûteuses et il s'agit donc d'adopter d'autres approches.

Le stage se focalisera sur certains aspects théoriques liés précisément à la théorie dite de l'homogénéisation [1], dont les rudiments seront si besoin enseignés au début du stage, plus précisément quand la structure périodique mentionnée ci-dessus est perturbée par un défaut, voir [2, 3]. L'équation (1) ci-dessus étant intimement liée au problème aux valeurs propres

$$-\operatorname{div} (a(x/\varepsilon) \nabla \varphi) = \lambda \varphi, \quad (2)$$

cette seconde équation sera aussi étudiée en détail pour la même classe de coefficients  $a$ .

Le cadre de travail et la question posée seront précisés en fonction des connaissances et aspirations du candidat ou de la candidate. En particulier, l'accent peut aussi être mis, simultanément ou alternativement, sur l'**approximation numérique** des fonctions en jeu, et sur les informations qu'on peut tirer de ces simulations pour la convergence de la solution du problème (1) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Une bonne culture des notions de base d'analyse fonctionnelle et d'analyse des équations aux dérivées partielles sera utile.

Le stage se déroulera (à discuter) au laboratoire CERMICS-ENPC à Marne-La-Vallée, ou au Laboratoire Jacques-Louis Lions à Paris. Bien sûr, en fonction de la situation sanitaire dans la région parisienne, des aménagements de télétravail pourront être considérés. Le stage pourra éventuellement déboucher sur une thèse.

### **Encadrement scientifique :**

- Xavier BLANC (blanc@ann.jussieu.fr), Université de Paris et Laboratoire Jacques-Louis Lions, Bâtiment Sophie Germain, 5, rue Thomas Mann, Paris 13<sup>ème</sup> (Métro Bibliothèque François Mitterrand)
- Claude LE BRIS (claude.le-bris@enpc.fr), CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8, Avenue Blaise Pascal, Marne-La-Vallée (RER A, station Noisy-Champs) & INRIA, 2, rue Simone Iff, 75012 Paris (Métro Dugommier & RER A, station Gare de Lyon).

## **References**

- [1] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, **Asymptotic analysis for periodic structures**, Studies in Mathematics and its Applications, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects*, Milan Journal of Mathematics, Vol. 80 (2012) 351-367.
- [3] X. Blanc, C. Le Bris, *Homogénéisation en milieu périodique ... ou non : une introduction.*, livre en préparation, 2021.
- [4] J. Casado-Diaz et al., *A Corrector Result for the Wave Equation with High Oscillating Periodic coefficients in: Advances in differential equations and applications. Selected contributions given at the 23rd congress on differential equations and applications, CEDYA/13th congress of applied mathematics, CMA, September 9-13, 2013. Springer. 23-30*