

## Sujet de stage : Etude de la méthode de Galerkin discontinue pour les équations de Navier-Stokes

**Durée** : 6 mois

**Démarrage** : en 2022

**Lieu** : CEA-Saclay, site de Saclay

**Laboratoire d'accueil** : DES/ISAS/DM2S/STMF/LMSF

**Futurs encadrants ou contacts**

Erell Jamelot, STMF/LMSF (mail : [erell.jamelot@cea.fr](mailto:erell.jamelot@cea.fr), tél. : 01-69-08-44-25)

Patrick Ciarlet, ENSTA IP Paris

**Diplôme préparé** : Bac+5 – Master 2 / Diplôme École d'ingénieurs

**Possibilité de poursuite en thèse** : oui

### Contexte

Le stage est proposé aux étudiants préparant un diplôme de niveau Master 2 en mathématiques appliquées (analyse numérique et/ou calcul scientifique). Il se déroulera au CEA Saclay dans le Laboratoire de Modélisation et de Simulation à l'échelle Système (LMSF), au sein du Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides (STMF) de la Direction des Énergies (DES).

Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides newtoniens. Dans le cas stationnaire, on résout le problème de Stokes. En notant  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2,3\}$  le domaine physique, ce problème s'écrit :

Trouver le champ de vitesse  $\vec{u}$  et le champ de pression  $p$  du fluide tels que :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{cases}$$

La première de ces deux équations n'est autre que la loi de Newton, tandis que la seconde découle de la conservation de la masse dans le cas d'un fluide incompressible. Le paramètre  $\nu$  représente la viscosité dynamique, et le champ vectoriel  $\vec{f}$  représente la résultante des forces extérieures agissant sur le fluide. A ces équations s'ajoutent des conditions aux limites adéquates.

Le logiciel du CEA TrioCFD [1], développé au LMSF, permet de modéliser les écoulements de fluides. La méthode de discrétisation de TrioCFD est basée sur la méthode des éléments finis mixtes non-conformes de Crouzeix-Raviart [2] : la vitesse est approchée par des fonctions affines, continues par morceaux sur un maillage de triangles ou de tétraèdres.

### Objectifs

Des études sont en cours pour monter en ordre et utiliser des maillages généraux, à l'aide de la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus [3]. L'une des difficultés repose sur la preuve de bonne position du problème discret. Le but de ce stage est d'analyser, pour le problème de Stokes, la condition inf-sup discrète à la lumière de la théorie de la T-coercivité (cf. [4], voir [5] pour la diffusion

neutronique). Le but de ce stage est d'analyser, pour le problème de Stokes, la condition inf-sup discrète à la lumière de la théorie de la T-coercivité (cf. [4], voir [5] pour la diffusion neutronique). Il s'agit d'étudier différentes paires d'éléments finis de Galerkin discontinus : trouver des représentants explicites qui vérifient la condition inf-sup discrète et réaliser des expériences numériques de validation sur une maquette. Cette démarche aide à la construction d'éléments finis mixtes précis pour le problème de Stokes. On pourra s'inspirer des techniques de projection décrites dans [6].

## Bibliographie

[1] <http://trioefd.cea.fr/>

[2] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*. RAIRO, Sér. Anal. Numer., 33 (1973).

[3] V. Girault, B. Rivière, M. F. Wheeler, *A splitting method using discontinuous Galerkin for the transient incompressible Navier-Stokes equations*, ESAIM: M2AN, 39 (2005).

[4] P. Ciarlet, Jr., *T-coercivity: application to the discretization of Helmholtz-like problems*, Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012).

[5] L. Giret, *Numerical Analysis of a Non-Conforming Domain Decomposition for the Multigroup SPN Equations*, thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay (2018).

[6] C. Kreuzer, R. Verfürth, P. Zanotti, *Quasi-Optimal and Pressure Robust Discretizations of the Stokes Equations by Moment- and Divergence-Preserving Operators*. Comput. Methods Appl. Math., 2 (2021).

## Profil recherché

Master 2 en mathématiques appliquées (analyse numérique et/ou calcul scientifique)