

Université Pierre et Marie Curie
Paris VI
Laboratoire Jacques-Louis Lions
Master de Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques de la Modélisation
Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles
Année 2007/2008

**Fonctionnelle de Willmore et
reconstruction d'images**

par

Giacomo Nardi

Mémoire

Sous la direction de Simon Masnou

Paris, le 22 Juillet 2008

*A Liliana
et Daniele*

Table des matières

Introduction	2
Remerciements	6
1 Rappels de la théorie géométrique de la mesure	7
1.1 Variétés	7
1.1.1 Définitions	7
1.1.2 Courbure Moyenne	9
1.2 Varifolds	12
1.2.1 Définitions	12
1.2.2 Variation Première	15
1.3 Exemples et remarques	18
1.4 Courants Rectifiables	25
2 La fonctionnelle de Willmore	28
2.1 Introduction	28
2.2 Interpretation géométrique de F_p	30
2.3 Reconstruction d'images par lignes de niveau	33
2.4 Semicontinuité de \mathbf{F}_p dans $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{C}^2$	37
Bibliographie	41

Introduction

Un des problèmes les plus importants en théorie des images est celui de la reconstruction de parties manquantes. Les techniques développées pour ce problème ont de nombreuses applications par exemple dans la restauration de vieux films ou dans la retouche de photographies. Les premiers travaux autour de ces problématiques reposent sur les idées de la psychologie de la *Gestalt* et en particulier sur les idées de Gaetano Kanizsa. La psychologie de la *Gestalt* (le verbe *gestalten* en allemand signifie « donner une forme signifiante ») s'intéresse à l'étude de la perception humaine et à la façon avec laquelle on donne une forme, une signification aux images : l'un des principes fondamentaux de la *Gestalt* est notamment que la perception consiste en une distinction de la figure sur le fond.

En ce qui concerne le problème des occlusions de parties d'images les premiers modèles sont basés sur une remarque due à Gaetano Kanizsa selon laquelle notre système visuel perçoit des occlusions s'il aperçoit des *jonctions en T*, c'est-à-dire des points où les bords d'objets différents se croisent en formant une jonction dont la forme ressemble à la lettre « T » ; une fois les *jonctions en T* perçues notre cerveau crée une ligne continue qui joint deux *jonctions en T*. Le résultat de ce travail, fait par notre cerveau, est l'image que l'on imagine être sous l'occlusion. Les lois selon lesquelles notre cerveau choisit les *jonctions en T* à joindre et la façon de les joindre sont étudiées par la psychologie de la *Gestalt*.

Un des premiers modèles présentés pour le problème de la reconstruction de parties manquantes en dimension 2 est dû à D. Mumford, M. Nitzberg et T. Shiota [8] et on peut le résumer dans les grandes lignes de la façon suivante :

- (i) on choisit les *jonctions en T* à joindre en fonction de leur intensité : le long du bord d'un objet, l'intensité ne peut pas varier beaucoup ;
- (ii) soient p, q les *jonctions en T* à joindre et soient t_p, t_q les vecteurs tangents au bord de l'objet en p et q respectivement ; on cherche alors une courbe $c : [0, 1] \rightarrow A$ (A partie manquante) telle que

$$c(0) = p, \quad c(1) = q, \quad c'(0) = t_p, \quad c'(1) = t_q$$

et qui minimise la fonctionnelle

$$\int_c (\alpha + \beta k^2) d\mathcal{H}^1$$

où k est la courbure de c et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux constantes positives.

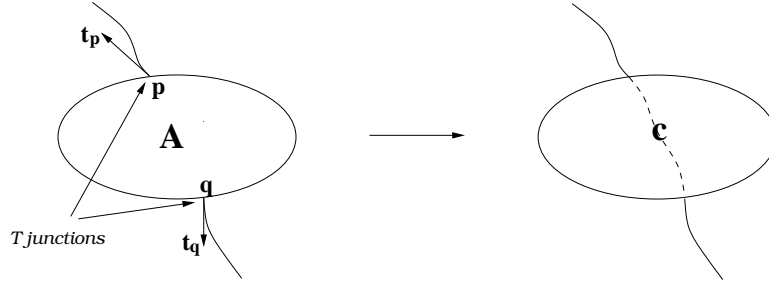


FIG. 1 – Reconstruction d'images

La difficulté dans cette méthode est de réussir à donner une définition rigoureuse du bord d'un objet et donc de jonction en T . Ce problème peut être résolu grâce à l'approche par *lignes de niveau* proposé par J. M. Morel et S. Masnou.

On considère une image dans le plan comme une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m = 2$ pour images en blanc et noir et $m = 3$ pour images en couleurs) et on suppose u être connue dans $\mathbb{R}^2 \setminus A$ où A est un ouvert borné et simplement connexe avec bord ∂A régulier. A est la partie manquante de l'image. On considère alors les ensembles de niveau $\partial E_\lambda = \partial\{u \geq \lambda\}$ de u et comme une fonction peut être reconstruite à partir de ses ensembles de niveau grâce à la formule

$$u(x) = \sup\{\lambda : x \in E_\lambda\}$$

on cherche alors de reconstruire les ensembles de niveau par un critère de minimisation pareil à celui présenté dans le modèle précédent. La puissance de cette approche est de pouvoir réécrire les critères de minimisation en fonction de l'image u .

Dans ce mémoire on s'intéresse en particulier à l'étude théorique du modèle proposé par L. Ambrosio et S. Masnou dans [2] pour le problème de la reconstruction d'images en dimension quelconque. On considère une image $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, Ω ouvert borné avec bord Lipschitz, et $A \subset\subset \Omega$ un ouvert connexe avec bord Lipschitz qui représente la partie manquante de l'image. On considère enfin \tilde{A} un ouvert $A \subset\subset \tilde{A} \subset \Omega$ et on appelle u_0 la partie connue de l'image, c'est-à-dire l'image dans $\Omega \setminus \overline{\tilde{A}}$. Le problème à résoudre est alors le suivant (α est une constante réelle et positive) :

$$(P) \quad \text{Inf}\{F_p(u, \tilde{A}) : u \in L^1(\Omega), u = u_0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\tilde{A}}\}$$

où

$$F_p(u, \tilde{A}) = \begin{cases} \int_{\tilde{A}} |\nabla u| \left(1 + \alpha \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) dx & , \text{ si } u \in C^2(\tilde{A}) \\ +\infty & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans [2] on étudie la résolubilité de (P) dans le cadre des fonctions BV et de plus on montre que la fonctionnelle $F_p(u, \tilde{A})$ est semicontinue inférieurement, par rapport à la topologie L^1 , sur $C^2(\tilde{A})$. Pour ceci la remarque fondamentale à la base de l'étude des auteurs est que si $u \in C^2(\tilde{A})$ alors

$$F_p(u, \tilde{A}) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda \cap \tilde{A}} (1 + |\mathbf{H}_{E_\lambda}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda \quad (1)$$

où \mathbf{H}_{E_λ} est la courbure moyenne de $\partial E_\lambda \cap \tilde{A}$.

(1) met d'abord en évidence, dans le cas $N = p = 2$, le lien entre l'approche par lignes de niveau et le modèle présenté précédemment (avec le choix $\alpha = \beta = 1$) mais surtout elle permet de mettre en relation la semicontinuité inférieure de $F_p(u, \tilde{A})$ avec celle de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_p(E) = \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1} \quad (2)$$

définie sur tout ensemble E ouvert régulier de \mathbb{R}^N .

En effet si $u_h \rightarrow u$ dans L^1 alors, modulo une sous-suite, pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $E_\lambda^h \rightarrow E_\lambda$ et donc si \mathcal{F}_p est semicontinu inférieurement alors, grâce au lemme de Fatou et à la semicontinuité du périmètre, F_p l'est également. Il résulte donc évident que si on s'intéresse à l'étude de la semicontinuité de F_p on est amené à étudier celle de la fonctionnelle \mathcal{F}_p . On verra, en particulier, que l'étude de la semicontinuité de la fonctionnelle \mathcal{F}_p est abordée à l'aide de la théorie des varifolds rectifiables qu'on peut voir comme une généralisation de la géométrie différentielle dans le cadre de la théorie de la mesure.

On remarque de plus que \mathcal{F}_p est une généralisation de la *fonctionnelle de Willmore* définie sur les surfaces S de \mathbb{R}^3 par

$$S \mapsto \int_S |\mathbf{H}_S|^2 d\sigma$$

où \mathbf{H}_S est la courbure moyenne de S . C'est pour ceci que l'on appelle F_p et \mathcal{F}_p *fonctionnelles de type Willmore* ou simplement *fonctionnelles de Willmore*.

Le mémoire est organisé de la manière suivante : dans le Chapitre 1 on rappelle quelques concepts fondamentaux de la théorie géométrique de la mesure, en particulier on rappelle la théorie des varifolds rectifiables.

Le Chapitre 2 est dédié à l'étude du problème de reconstruction d'images par des méthodes variationnelles et à la preuve de la semicontinuité inférieure de la fonctionnelle de

Willmore pour fonctions régulières (C^2).

Le long du mémoire on utilisera les références suivantes : pour la théorie de la mesure [5], [10], [1] et pour la théorie des fonctions BV [5], [1].

Remerciements

Je voudrais remercier d'abord Monsieur Simon Masnou pour son attention et son aide pour mon travail pendant tout mon stage.

Enfin un remerciement à Mademoiselle Daniella Lorté-Villarçon qui a patiemment corrigé l'orthographe française de ce travail.

Chapitre 1

Rappels de la théorie géométrique de la mesure

1.1 Variétés

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 On dit que $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ est une n -variété C^r ($n, r \geq 1, k \geq 0$), si pour tout $x \in M$ il existe deux ouverts $U, V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ tels que $x \in U, 0 \in V$ et il existe un C^r -difféomorphisme $\psi : U \rightarrow V$ tel que

$$\psi(x) = 0, \quad \psi(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^n.$$

Grâce au théorème de la fonction inverse on a donc une représentation locale de M :

$$\varphi : V \cap \mathbb{R}^n \rightarrow M \cap U, \quad \varphi(0) = x$$

où φ est une fonction C^r et les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(0)$$

sont linéairement indépendants dans \mathbb{R}^{n+k} .

On peut définir l'espace tangent à M en x , et on le note $T_x M$, de la façon suivante :

Définition 1.1.2 $T_x M$ est l'espace des $\tau \in \mathbb{R}^{n+k}$ tels que il existe une courbe C^1

$$\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}, \quad \gamma(-1, 1) \subseteq M, \quad \gamma(0) = x$$

telle que $\tau = \gamma'(0)$.

On rappelle de plus que, étant donné la représentation locale φ , $T_x M$ admet comme base :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(0).$$

Définition 1.1.3 L'espace normal à M en x , que l'on note $N_x M$, est défini comme $T_x M^\perp$ c'est-à-dire l'espace des vecteurs de \mathbb{R}^{n+k} orthogonaux à l'espace tangent.

On va maintenant généraliser la théorie de la dérivation dans \mathbb{R}^{n+k} aux variétés.

On considère une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) de classe C^m ($m \leq r$) sur M c'est-à-dire une fonction f qui est la restriction à M d'une fonction $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^N$, $M \subseteq W$, de classe $C^m(W)$ où W est un ouvert de \mathbb{R}^{n+k} . Si \tilde{f} est de classe $C_0^m(W)$ alors on dit que f est de classe C_0^m .

Soit $X = (X_1, \dots, X_{n+k}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ un champ vectoriel on dit que X est de classe $C^m(C_0^m)$ si chacune de ses composantes est de classe $C^m(C_0^m)$.

Dérivée Directionnelle. Soit $\tau \in T_x M$ et soit $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$ une courbe C^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \tau$. On peut donc définir la dérivée directionnelle de f le long de la direction τ par :

$$D_\tau f(x) = \left. \frac{df(\gamma(s))}{ds} \right|_{s=0}.$$

Evidemment une telle définition est indépendante du choix de la courbe γ . On peut de plus définir la carte :

$$\begin{aligned} d_x f : T_x M &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ d_x f(\tau) &= D_\tau f(x). \end{aligned}$$

Gradient. On suppose ici $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ au moins de classe C^1 . Soit $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ une base orthonormée de $T_x M$. On définit alors le gradient de f sur M par

$$\nabla^M f(x) = \sum_{i=1}^n (D_{\tau_i} f(x)) \tau_i = \pi_M \nabla \tilde{f}(x), \quad x \in M,$$

où π_M est la projection de \mathbb{R}^{n+k} sur $T_x M$.

Divergence. On considère un champ vectoriel $X = (X_1, \dots, X_{n+k}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ de classe C^1 . Soit $\{e_1, \dots, e_{n+k}\}$ la base canonique dans \mathbb{R}^{n+k} . On définit alors la divergence de X sur M comme :

$$\operatorname{div}^M X = \sum_{i=1}^{n+k} \nabla_i^M X_i, \quad \text{où } \nabla_i^M X_i = \langle \nabla^M X_i, e_i \rangle.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M X &= \sum_{i=1}^{n+k} \langle e_i, \sum_{j=1}^n (D_{\tau_j} X_i) \tau_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle D_{\tau_j} \left(\sum_{i=1}^{n+k} X_i e_i \right), \tau_j \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \langle D_{\tau_j} X, \tau_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle d_x X(\tau_j), \tau_j \rangle. \end{aligned}$$

On rappelle enfin le théorème de la Divergence :

Théorème 1.1.4 (de la Divergence) . Soit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ une n -variété de classe C^1 avec bord ∂M de classe C^1 . Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ un champ tangent (i.e. pour tout $x \in M$, $X(x) \in T_x M$) de classe $C_0^1(\mathbb{R}^{n+k})$. On a alors :

$$\int_M \operatorname{div}^M X d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

où ν est la conormale interne à ∂M (i.e. $|\nu| = 1$, ν est tangent à M et normal à ∂M).

1.1.2 Courbure Moyenne

Dans cette section on suppose M une n -variété de régularité au moins C^2 .

Définition 1.1.5 On appelle deuxième forme fondamentale de M en x l'application

$$B_x : T_x M \times T_x M \rightarrow N_x M$$

$$(\tau, \eta) \mapsto - \sum_{i=1}^k \langle \eta, D_\tau v_i(x) \rangle v_i(x)$$

où $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une base orthonormée de $N_x M$.

Exemple 1.1.6 Soit $\tau \in T_x M, |\tau| = 1$ et soit $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$ une courbe de classe C^2 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \tau$. Pour tout $s \in (-1, 1)$ et pour $i = 1, \dots, k$ on a alors

$$\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)} M, \quad v_i(\gamma(s)) \in N_{\gamma(s)} M$$

et donc

$$\langle \gamma'(s), v_i(\gamma(s)) \rangle = 0.$$

Si l'on dérive cette relation et l'on calcule en $s = 0$ on obtient :

$$\langle \gamma''(0), v_i(x) \rangle + \langle \tau(x), D_\tau v_i(x) \rangle = 0$$

qui implique

$$\langle \tau(x), D_\tau v_i(x) \rangle = - \langle \gamma''(0), v_i(x) \rangle$$

et donc

$$B_x(\tau, \tau) = \sum_{i=1}^k \langle \gamma''(0), v_i(x) \rangle v_i(x).$$

Donc, en considérant γ comme une courbe dans \mathbb{R}^{n+k} , on obtient que la composante normale par rapport à M de la courbure de γ en 0 est représentée par $B_x(\tau, \tau)$. On peut alors dire que $B_x(\tau, \tau)$ mesure la courbure normale de M le long de la direction τ .

En s'inspirant de l'exemple précédent on peut facilement montrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.1.7 B_x est une forme bilinéaire et symétrique sur $T_x M$.

Démonstration : La forme B_x est évidemment bilinéaire et donc il suffit montrer la symétrie pour les vecteurs d'une base de l'espace tangent. On considère alors φ une représentation locale de classe C^2 de M dans un voisinage de x telle que

$$\begin{aligned} \varphi : 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ \varphi(0) = x, \quad \varphi(U) &\subseteq M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \tau_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \tau_j \end{aligned}$$

où τ_i, τ_j sont deux vecteurs d'une base de $T_x M$. Pour tout $v_h \in N_x M$ on a

$$\langle v_h, \tau_i \rangle = \langle v_h, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0) \rangle = 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à τ_j en 0 on obtient

$$\langle D_{\tau_j} v_h, \tau_i \rangle = - \langle v_h, D_{\tau_j} \tau_i \rangle = \langle v_h, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \rangle$$

et donc

$$B_x(\tau_j, \tau_i) = - \sum_{h=1}^k \langle \tau_i, D_{\tau_j} v_h(x) \rangle v_h(x) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)^\perp$$

et donc la preuve. \square

On peut donc donner la définition suivante :

Définition 1.1.8 On appelle courbure moyenne \mathbf{H} de M en x le vecteur

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{i=1}^n B_x(\tau_i, \tau_i) \in N_x M$$

où $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ est une base de $T_x M$.

On peut facilement écrire \mathbf{H} d'une manière plus simple :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \langle \tau_i, D_{\tau_i} v_j(x) \rangle v_j(x) = \\ &= - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \langle \tau_i, D_{\tau_i} v_j(x) \rangle \right) v_j(x) = - \sum_{j=1}^k (\operatorname{div}^M v_j(x)) v_j(x). \end{aligned}$$

Définition 1.1.9 Soit $v \in N_x M$. On appelle courbures principales le long la direction v les valeurs propres de la forme bilinéaire et symétrique suivante :

$$B_x^v : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\tau, \eta) \mapsto \langle B_x(\tau, \eta), v \rangle.$$

Remarque 1.1.10 Soit $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne s de façon que $\gamma'(s)$ soit le vecteur tangent $\tau(\gamma(s))$ et $\gamma''(s) = \kappa(\gamma(s))\nu(\gamma(s))$ où ν est la normale et κ la courbure. On a alors

$$\langle \tau(\gamma(s)), \nu(\gamma(s)) \rangle = 0$$

et en dérivant par rapport à s on a

$$\langle \tau(\gamma(s)), D_\tau \nu(\gamma(s)) \rangle = - \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle = -\kappa(\gamma(s))$$

et donc

$$|\mathbf{H}| = |\kappa|.$$

Remarque 1.1.11 (Courbure moyenne et opérateur de Weingarten) . Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière dont on note la normale par N . On peut alors considérer l'opérateur de Weingarten W défini par :

$$W : TM \rightarrow TM$$

$$W(\tau) = -D_\tau N.$$

D'après la géométrie différentielle classique on sait qu'il existe une base orthonormée de l'espace tangent $\{\tau_1, \tau_2\}$ et deux réels κ_1, κ_2 tels que

$$W(\tau_1) = \kappa_1 \tau_1, \quad W(\tau_2) = \kappa_2 \tau_2$$

et $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H$ où H est la courbure moyenne de S .

En outre on sait que le vecteur courbure moyenne est donné par $(-\text{div}N)N$. On alors

$$\begin{aligned} -\text{div}N &= - \sum_{i=1}^3 \langle e_i, \sum_{j=1}^2 (D_{\tau_j} N^i) \tau_j \rangle = - \sum_{i=1}^3 D_{\tau_1} N^i \tau_1^i + D_{\tau_2} N^i \tau_2^i \\ &= \sum_{i=1}^3 \kappa_1 (\tau_1^i)^2 + \kappa_2 (\tau_2^i)^2 = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H. \end{aligned}$$

On peut donc conclure $|\mathbf{H}| = 2|H|$.

Remarque 1.1.12 (Courbure moyenne et courbures principales) . Le lien entre courbure moyenne et courbures principales donné dans la remarque précédente dans le cas d'une surface peut être généralisé au cas d'une n -variété dans \mathbb{R}^{n+1} . En effet si M est une n -variété dans \mathbb{R}^{n+1} alors l'espace normal a dimension 1 et donc si on note $\nu(x)$ la normale à la variété en x on a

$$\langle \mathbf{H}(x), \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \langle B_x(\tau_i, \tau_i), \nu \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle B_x^\nu(\tau_i, \tau_i), \nu \rangle.$$

Donc si on note $\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x)$ les courbures principales de M en x le long ν on obtient

$$\langle \mathbf{H}(x), \nu \rangle = -(\kappa_1(x) + \dots + \kappa_n(x)).$$

Puisque $\mathbf{H}(x) \in N_x M$ on a alors

$$\mathbf{H}(x) = -(\kappa_1(x) + \dots + \kappa_n(x))\nu(x)$$

et donc

$$|\mathbf{H}(x)| = |\kappa_1(x) + \dots + \kappa_n(x)|.$$

Si on considère alors un champ vectoriel $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ (en général non tangent) sur M on peut l'écrire de la façon suivante :

$$X = X^T + X^\perp$$

où

$$X^T = \sum_{i=1}^n \langle X, \tau_i \rangle \tau_i, \quad X^\perp = \sum_{j=1}^k \langle X, \nu_j \rangle \nu_j.$$

Or

$$\operatorname{div}^M X^\perp = \sum_{j=1}^k \langle X, \nu_j \rangle \operatorname{div}^M \nu_j + \langle \nabla^M (\langle X, \nu_j \rangle), \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^k \langle X, \nu_j \rangle \operatorname{div}^M \nu_j$$

et donc on a

$$\operatorname{div}^M X^\perp = - \langle X, \mathbf{H} \rangle.$$

On obtient alors facilement le théorème suivant :

Théorème 1.1.13 Soit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ une n -variété de classe C^2 avec bord ∂M régulier. Soit $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ un champ de classe $C_0^1(\mathbb{R}^{n+k})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}^M X d\mathcal{H}^n &= \int_M \operatorname{div}^M X^T d\mathcal{H}^n + \int_M \operatorname{div}^M X^\perp d\mathcal{H}^n = \\ &= - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} - \int_M \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n \end{aligned}$$

où ν est la conormale intérieure à ∂M .

1.2 Varifolds

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 On dit que l'ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ est dénombrablement n -rectifiable si

$$M = M_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i \right)$$

où $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, les K_i sont deux à deux disjoints et pour tout $i \geq 1$ K_i est un sous-ensemble compact d'une n -variété C^1 de \mathbb{R}^{n+k} .

M est n -rectifiable si M est dénombrablement n -rectifiable et $\mathcal{H}^n(M) < +\infty$.

On dit que M est (dénombrablement) n -rectifiable dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ si $M \cap \Omega$ est (dénombrablement) n -rectifiable.

Si les variétés K_i ont régularité C^r ($r \geq 2$) on dit alors que M est (dénombrablement) C^r - n -rectifiable.

Une caractérisation importante des ensembles dénombrablement rectifiables est donnée par la lemme suivant :

Lemme 1.2.2 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ est dénombrablement n -rectifiable si et seulement si

$$M = M_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_j(A_j) \right)$$

où $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ et $F_j : A_j \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ sont des fonctions Lipschitz continues. (cf. : [10] lemme 11.1, p. 59)

Grâce à la théorie des variétés on peut alors définir l'espace tangent à M \mathcal{H}^n -p.p. en posant

$$T_x M = T_x K_i, \quad x \in K_i.$$

En outre si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^r ($r \geq 1$), c'est-à-dire que f est la restriction à M d'une fonction \tilde{f} de classe C^r sur un ouvert contenant M , on définit alors

$$\nabla^M f(x) = \nabla^{K_i} \tilde{f}(x), \quad x \in K_i.$$

De façon analogue on définit l'opérateur divergence pour un champ sur M .

On peut donc donner la définition de varifold rectifiable :

Définition 1.2.3 (Varifold Rectifiable) . Soit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ un ensemble dénombrablement n -rectifiable et soit θ une fonction positive et localement \mathcal{H}^n -intégrable sur M . On définit alors un varifold n -rectifiable $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ comme la classe d'équivalence des couples $(\tilde{M}, \tilde{\theta})$ tels que :

(i) $\mathcal{H}^n(M \Delta \tilde{M}) = 0$;

(ii) $\theta = \tilde{\theta} \mathcal{H}^n - p.p.$ dans $M \cap \tilde{M}$.

Si $\theta(x) \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour tout x dans M on appelle V un varifold entier. On appelle θ multiplicité du varifold. En posant $\theta \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^{n+k} \setminus M$ on peut associer au varifold V la mesure de Radon, appelée mesure poids du varifold, définie par :

$$\mu_V = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M.$$

Si A est μ_V -mesurable on a alors :

$$\mu_V(A) = \int_{M \cap A} \theta d\mathcal{H}^n.$$

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est μ_V -intégrable on pose alors par définition :

$$\int_{\Omega} f d\mu_V = \int_{\Omega \cap M} f \theta d\mathcal{H}^n.$$

On dit que $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ est un varifold n -rectifiable dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ si $V = \mathbf{v}(M \cap \Omega, \theta)$ est un varifold n -rectifiable.

Remarque 1.2.4 En choisissant $\theta \equiv 1$ on a en particulier que tout ensemble dénombrablement n -rectifiable est un varifold n -rectifiable.

Remarque 1.2.5 (Variétés, Ensembles Rectifiables et Varifolds) . L'introduction des ensembles rectifiables et des varifolds permet de travailler avec ensembles plus généraux par rapport aux variétés classiques.

1) L'ensemble en figure 1.1 n'est pas une variété puisque dans un voisinage des points **A** et **B** il n'est pas un graphe d'une fonction. Cependant cet ensemble est un ensemble

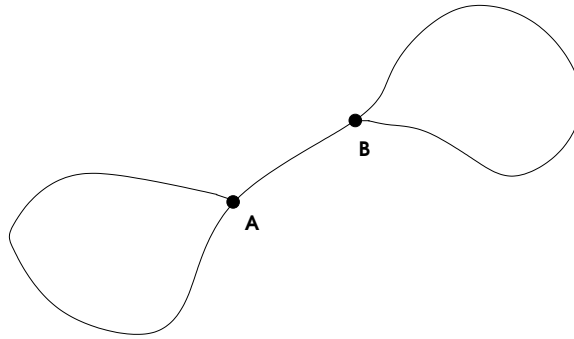


FIG. 1.1 – Un ensemble rectifiable qui n'est pas une variété

dénombrablement 1-rectifiable.

2) La fonction multiplicité θ de la définition de varifold permet de « donner un poids » différent à des morceaux différents d'un ensemble dénombrablement n -rectifiable. L'idée la plus simple d'un varifold entier est donc un ensemble rectifiable dont on compte plusieurs fois certains morceaux. La figure 1.2 montre comment en changeant les valeurs de θ sur quelques morceaux on peut changer la décomposition de l'ensemble rectifiable. Cet exemple justifie de plus le choix du nom multiplicité pour la fonction θ .

Remarque 1.2.6 La mesure μ_V joue un rôle très important dans la théorie des varifolds en permettant de généraliser à ceux-ci des concepts issus de la théorie des variétés,

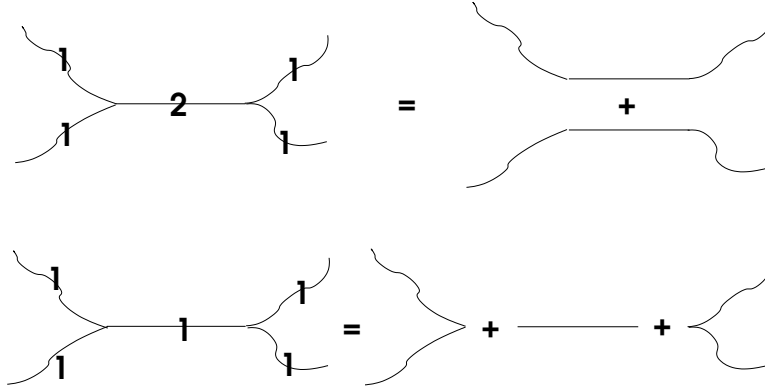


FIG. 1.2 – Multiplicité et décomposition

comme par exemple le notion de courbure moyenne, à l'aide d'arguments de la théorie de la mesure. C'est donc dans l'optique de travailler avec μ_V qu'il est utile de voir un varifold comme une classe d'équivalence. En effet deux couples $(M, \theta), (\tilde{M}, \tilde{\theta})$ satisfaisants les propriétés (i) et (ii) de la définition 2.6 conduiraient à la définition de la même mesure.

On conclut cette section avec une propriété importante de la multiplicité d'un varifold n -rectifiable V :

Lemme 1.2.7 Soit $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ un varifold n -rectifiable dans \mathbb{R}^{n+k} avec $\theta \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^n)$. On a alors :

$$\theta(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_V(B(x, r))}{\omega_n r^n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{B(x, r) \cap M} \theta d\mathcal{H}^n \quad \mathcal{H}^n\text{-p.p. sur } \mathbb{R}^{n+k}$$

où ω_n est la mesure de Lebesgue de $B(0, 1)$.

Démonstration : On considère la mesure de Radon $\beta = \mathcal{H}^n \llcorner M$. On a alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x, r) \cap M} \theta d\mathcal{H}^n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\beta(B(x, r))}{\omega_n r^n} \frac{1}{\beta(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \theta d\beta.$$

Puisque M est n -rectifiable dans $B(x, r)$ on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\beta(B(x, r))}{\omega_n r^n} = \begin{cases} 1 & , \mathcal{H}^n\text{-p.p. sur } M \\ 0 & , \mathcal{H}^n\text{-p.p. dans } \mathbb{R}^{n+k} \setminus M \end{cases}$$

et donc grâce au théorème de Lebesgue-Besicovitch et au fait que $\theta = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+k} \setminus M$ on a la preuve. \square

1.2.2 Variation Première

Soit V un varifold n -rectifiable et Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+k} . On appelle *variation première* de V dans Ω la fonctionnelle suivante :

$$\delta V : C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\delta V(X) = \int_{\Omega} \operatorname{div}^M X d\mu_V = \int_{M \cap \Omega} \operatorname{div}^M X \theta d\mathcal{H}^n.$$

Définition 1.2.8 On dit qu'un varifold n -rectifiable V est stationnaire dans Ω si $\delta V(X) = 0$ pour tout $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+k})$.

Définition 1.2.9 V est appelé varifold de Allard dans Ω si δV est localement borné, c'est-à-dire si pour tout $W \subset \subset \Omega$ il existe une constante C telle que

$$|\delta V(X)| \leq C \|X\|_{L^\infty(W)} \quad \forall X \in C_0^\infty(W, \mathbb{R}^{n+k}).$$

On rappelle de plus le théorème suivant :

Théorème 1.2.10 (de Riesz) . Soit $F : C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, tel que

$$\sup \{F(X) : X \in C_0^\infty(K, \mathbb{R}^{n+k}), \|X\|_{L^\infty} \leq 1\} < \infty$$

pour tout compact $K \subseteq \Omega$. Il existe alors une mesure de Radon δ sur Ω et une fonction δ -mesurable $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ telle que $|\nu(x)| = 1$ pour δ -p.p. $x \in \Omega$ et

$$F(X) = \int_{\Omega} \langle X, \nu \rangle d\delta \quad \forall X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+k}).$$

(cf : [10] : théorème 4.1, p.18)

Remarque 1.2.11 La mesure de Radon δ du théorème précédent est appelée mesure variation totale de F et elle est définie d'abord sur tout ouvert A par

$$\delta(A) = \sup \{F(X) : X \in C_0^\infty(A, \mathbb{R}^{n+k}), \|X\|_{L^\infty} \leq 1\}$$

et ensuite sur tout W sous-ensemble arbitraire de Ω par

$$\delta(W) = \inf \{\delta(A) : W \subseteq A, A \text{ ouvert}\}.$$

On remarque alors que la fonctionnelle F est localement bornée si et seulement si δ , la mesure variation totale de F , est une mesure de Radon dans Ω .

Si V est un varifold de Allard alors grâce au théorème de Riesz il existe une mesure de Radon $\|\delta V\|$, la mesure variation totale de δV , et une fonction ν $\|\delta V\|$ -mesurable avec $|\nu| = 1$ $\|\delta V\|$ -p.p. dans Ω telles que :

$$\delta V(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \nu \rangle d\|\delta V\|.$$

En posant $\mathbf{H}_V = \nu D_{\mu_V} \|\delta V\|$ (on remarque que cette dérivée existe μ_V -p.p. dans Ω) en vertu du théorème de décomposition de Lebesgue on obtient

$$\delta V(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \mathbf{H}_V \rangle d\mu_V - \int_{\Omega} \langle X, \nu \rangle d\sigma \quad (1.1)$$

où $\sigma = \|\delta V\| \llcorner \{x \in \Omega : D_{\mu_V} \|\delta V\| = +\infty\}$. (1.1) généralise aux varifolds rectifiables la formule donnée par le théorème (1.1.13).

Définition 1.2.12 On appelle \mathbf{H}_V , défini μ_V -p.p. dans Ω , la courbure moyenne généralisée de V . Dans (1.1) on appelle partie singulière de δV l'intégrale par rapport à la mesure σ et partie régulière l'autre intégrale.

Remarque 1.2.13 Si $\|\delta V\| \ll \mu_V$ alors la fonctionnelle variation première n'a pas de partie singulière, c'est-à-dire

$$\delta V(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \mathbf{H}_V \rangle d\mu_V.$$

Le théorème suivants sont deux résultats de localité de la courbure moyenne que l'on utilisera dans l'analyse de la fonctionnelle de Willmore :

Définition 1.2.14 On dit que le varifold V est à courbure moyenne dans L^p , $\mathbf{H}_V \in L^p(\mu_V)$, si $\|\delta V\| \ll \mu_V$ et la courbure moyenne est une fonction de $L^p(\mu_V)$.

Théorème 1.2.15 Soient $U = \mathbf{v}(M, \theta)$, $V = \mathbf{v}(M', \theta')$ deux varifolds n -rectifiables entiers dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Si $\mathbf{H}_U \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_U)$ et $\mathbf{H}_V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_V)$ pour $p > n - 1$, $p \geq 2$ alors :

$$\mathbf{H}_U = \mathbf{H}_V \quad \mathcal{H}^n\text{-p.p. dans } M \cap M'.$$

(cf. [2] : théorème 2).

Théorème 1.2.16 Soient $V_1 = \mathbf{v}(M_1, \theta_1)$, $V_2 = \mathbf{v}(M_2, \theta_2)$ deux 1-varifolds entiers de Allard dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dont on note $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ les courbures moyennes. On a alors :

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \quad \mathcal{H}^1\text{-p.p. dans } M_1 \cap M_2.$$

(cf. : [6] : théorème 2.1, p. 6)

Théorème 1.2.17 Soient $V_1 = \mathbf{v}(M_1, \theta_1)$, $V_2 = \mathbf{v}(M_2, \theta_2)$ deux n -varifolds entiers dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ dont on note $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ les courbures moyennes. On suppose que V_1 soit un varifold d'Allard, M_1 soit C^2 - n -rectifiable, $\mathbf{H}_2 \in L^2(\mu_{V_2})$ et $\mu_{V_1} \leq \mu_{V_2}$. On a alors

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \quad \mu_{V_1}\text{-p.p. dans } M_1 \cap M_2.$$

(cf. : [9] corollaire 4.3, p.13)

On conclut cette section avec un théorème de compacité pour varifold

Définition 1.2.18 Soit V un varifold n -rectifiable dans \mathbb{R}^{n+k} et $\{V_h\}$ une suite de varifolds n -rectifiables dans \mathbb{R}^{n+k} . On dit que V_h converge vers V dans Ω ouvert de \mathbb{R}^{n+k} , et on note $V_h \rightarrow V$, si μ_{V_h} converge faiblement vers μ_V au sens des mesures de Radon dans Ω .

Théorème 1.2.19 (de compacité de Allard) . Soit $\{V_h\} = \{\mathbf{v}(M_j, \theta_j)\}$ une suite de varifolds n -rectifiables avec variation première localement bornée dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, $\theta_j \geq 1$ \mathcal{H}^n -p.p. dans M_j et tels que pour tout ouvert $W \subset\subset \Omega$

$$\sup_{h \geq 1} (\mu_{V_h}(W) + \|\delta V_h\|(W)) = c(W) < +\infty.$$

Il existe alors une sous-suite $\{V_{\sigma(h)}\}$ et un varifold n -rectifiable $V = \{\mathbf{v}(M, \theta)\}$ avec $\theta \geq 1$ \mathcal{H}^n -p.p. dans M à variation première localement bornée dans Ω tel que $V_{\sigma(h)} \rightarrow V$ dans Ω et

$$\|\delta V\|(W) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|\delta V_h\|(W)$$

pour tout ouvert $W \subset\subset \Omega$. De plus si les varifolds V_h sont entiers alors V est entier.
(cf : [10] : théorème 42.7, p. 247)

1.3 Exemples et remarques

Dans cette section on considère seulement des varifolds de Allard et on donne des exemples qui mettront en évidence leurs propriétés fondamentales.

Exemple 1.3.1 (Point Triple) . On considère le varifold $V = \mathbf{v}(M, 1)$ où M est l'ensemble dénombrablement 1-rectifiable représenté en Fig 1.3.

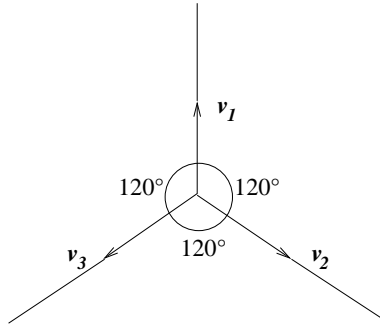


FIG. 1.3 – Varifold stationnaire dans \mathbb{R}^2

On va montrer que V a variation nulle dans \mathbb{R}^2 . Soit $X = (X_1, X_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et on considère

$$\delta V(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}^M X d\mu_V.$$

Si on considère par exemple la demi-droite

$$R_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$R_1(t) = tv_1 = (tv_1^1, tv_1^2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M(x, y) &= \nabla_1^M X_1 + \nabla_2^M X_2 = v_1^1 \langle \nabla X_1, v_1 \rangle + v_1^2 \langle \nabla X_2, v_1 \rangle = \\ &= v_1^1 \frac{\partial X_1}{\partial v_1} + v_1^2 \frac{\partial X_2}{\partial v_1} = v_1^1 \frac{d(X_1 \circ R_1)}{dt}(R_1^{-1}(x, y)) + v_1^2 \frac{d(X_2 \circ R_1)}{dt}(R_1^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \int_{R_1} \operatorname{div}^M X d\mathcal{H}^1 &= \int_0^\infty v_1^1 \frac{d(X_1 \circ R_1)}{dt} + v_1^2 \frac{d(X_2 \circ R_1)}{dt} dt = \\ &= -v_1^1 X_1(0) - v_1^2 X_2(0) = - \langle v_1, X(0) \rangle = - \int_{\mathbb{R}^2} \langle v_1, X \rangle d\delta_0 \end{aligned}$$

où δ_0 est la mesure Delta de Dirac

$$E \subseteq \mathbb{R}^2, \delta_0(E) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in E \\ 0, & \text{si } 0 \notin E \end{cases}.$$

En raisonnant de la même façon sur les autres deux demi-droites on obtient

$$\delta V(X) = \int_M \operatorname{div}^M X d\mu_V = - \int_{\mathbb{R}^2} \langle v_1 + v_2 + v_3, X \rangle d\delta_0 = - \langle v_1 + v_2 + v_3, X(0) \rangle = 0$$

et donc V est un varifold 1-rectifiable stationnaire dans \mathbb{R}^2 . Evidemment si $(v_1 + v_2 + v_3) \neq 0$ alors la variation première n'est pas nulle et le varifold a une partie singulière qui est représentée par la mesure $(v_1 + v_2 + v_3)\delta_0$.

Exemple 1.3.2 On considère le varifold $V = \mathbf{v}(M, 1)$ où M est le segment AB représenté en Fig. 1.3. On s'intéresse à la variation première dans \mathbb{R}^2 . On veut montrer que la me-

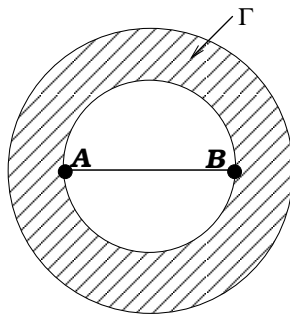


FIG. 1.4 – $\|\delta V\|$ n'est pas absolument continue par rapport à μ_V

sure variation totale n'est pas absolument continue par rapport à la mesure poids. On considère alors l'ensemble $W = \Gamma \cup \{A, B\}$. Evidemment

$$\mu_V(W) = \mathcal{H}^1(W \cap M) = 0$$

mais grâce aux calculs faits dans l'exemple précédent et à la remarque 1.2.11 on a

$$\|\delta V\|(W) = \inf \{ \|\delta V\|(A) : W \subseteq A, A \text{ ouvert} \} = 2$$

donc la preuve.

Exemple 1.3.3 (Multiplicité et singularité) . On considère le varifold entier $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ où θ est une fonction à préciser et M est le rectifiable représenté en Fig 1.4 où en O les morceaux C_1 et C_2 ont le même vecteur tangent. On s'intéresse à la variation première

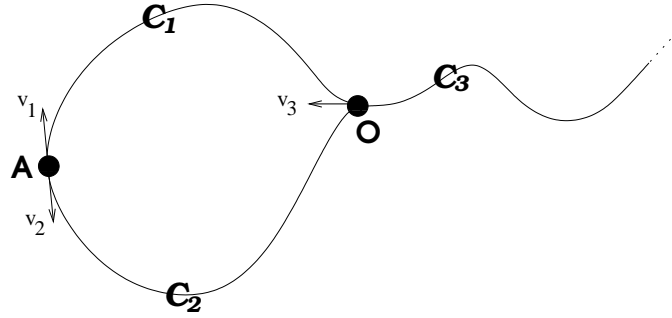


FIG. 1.5 – La singularité dépend de la multiplicité

dans \mathbb{R}^2 . On va montrer qu'en modifiant la multiplicité du varifold on peut « ajouter » ou enlever de la singularité.

Si on choisit

$$\theta(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in C_1 \cup C_2 \\ 2, & \text{si } p \in C_3 \end{cases}$$

pour tout $X \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ on a alors

$$\begin{aligned} \delta V(X) &= \int_{\mathbb{R}^2} \text{div}^M X d\mu_V = \int_{C_1 \cup C_3} \text{div}^M X d\mathcal{H}^1 + \int_{C_2 \cup C_3} \text{div}^M X d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_M \langle X, \mathbf{H} \rangle \theta d\mathcal{H}^1 - \langle v_1 + v_2, X(A) \rangle = \int_M \langle X, \mathbf{H} \rangle \theta d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

car $(v_1 + v_2) = 0$, et donc le varifold n'a pas de partie singulière.

En revanche si on choisit $\theta \equiv 1$ on a alors

$$\begin{aligned} \delta V(X) &= \int_{\mathbb{R}^2} \text{div}^M X d\mu_V = \int_{C_1 \cup C_3} \text{div}^M X d\mathcal{H}^1 + \int_{C_2} \text{div}^M X d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_M \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^1 - \langle v_1 + v_2, X(A) \rangle - \langle v_3, X(O) \rangle = \\ &= \int_M \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^1 - \langle v_3, X(O) \rangle \end{aligned}$$

car $(v_1 + v_2) = 0$ et donc le varifold a une singularité de type Dirac en O .

On rappelle en outre le théorème suivant qui met en évidence l'importance du choix de la multiplicité :

Théorème 1.3.4 *Soit V un varifold de Allard dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$. On suppose V entier. On a alors*

$$\mathbf{H}_V(x) \perp T_x V \quad \mathcal{H}^n - p.p. x \in \Omega.$$

(cf. : [3] : théorème 5.8, p.157)

Ce théorème, qui généralise aux varifolds entiers une des propriétés les plus importantes de la théorie des variétés, n'est pas valable pour des varifolds non-entiers. On peut facilement s'en convaincre grâce aux exemples suivants où on s'intéresse aux propriétés géométriques du vecteur courbure moyenne pour des varifolds rectifiables non-entiers.

On considère par exemple $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ où M est un ensemble dénombrablement C^2 - n -rectifiable et θ est une fonction de classe $C^1(M)$ et $\theta \geq \varepsilon > 0$. Pour tout $x \in M$ on peut alors considérer $X \in C_0^\infty(B(x, r), \mathbb{R}^{n+k})$ et on obtient

$$\begin{aligned} \delta V(X) &= \int_{B(x,r)} (\operatorname{div}^M X) \theta d\mathcal{H}^n = \\ &= \int_{B(x,r)} \operatorname{div}^M (X\theta) d\mathcal{H}^n - \int_{B(x,r)} \langle X, \nabla^M \theta \rangle d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

En choisissant r assez petit de façon que $M \cap B(x, r)$ soit une variété, grâce au théorème 1.1.12, on obtient

$$\delta V(X) = - \int_{B(x,r)} \mathbf{H}_M(X\theta) d\mathcal{H}^n - \int_{B(x,r)} \langle X, \frac{\nabla^M \theta}{\theta} \theta \rangle d\mathcal{H}^n$$

où \mathbf{H}_M est la courbure moyenne au sens classique des variétés. On a donc

$$\delta V(X) = - \int_{B(x,r)} \left\langle \left(\mathbf{H}_M + \frac{\nabla^M \theta}{\theta} \right), X \right\rangle \theta d\mathcal{H}^n \quad (1.2)$$

et donc localement le vecteur courbure moyenne s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{H}_V = \mathbf{H}_M + \frac{\nabla^M \theta}{\theta}. \quad (1.3)$$

Puisque $\mathbf{H}_M \perp T_x M$ et $\nabla^M \theta(x) \in T_x M$ en générale le théorème 1.3.4 n'est pas valable pour des varifolds non-entiers. Voyons quelques exemples :

Exemple 1.3.5 (Ajouter de la courbure à une droite) . On considère l'ensemble 1-rectifiable

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < A < +\infty, y = 0\}$$

et la fonction

$$\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + 1.$$

Si on considère alors le varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ et on considère un champ $X \in C_0^\infty(B((p, q), r), \mathbb{R}^2)$ ($(p, q) \in M, r < \min\{p, A - p\}$) on a alors :

$$\mathbf{H}_V(x, y) = \mathbf{H}_M(x, y) + \frac{\nabla^M \theta}{\theta}(x, y) = \left\langle \frac{\nabla \theta}{\theta}, (1, 0) \right\rangle (1, 0) = \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, 0 \right)$$

et donc

$$\mathbf{H}_V(x, y) = \left(\frac{1}{x+1}, 0 \right).$$

C'est-à-dire que la courbure moyenne au sens de Allard atteint son maximum en 0 et devient petite si x est assez grand.

Exemple 1.3.6 (Droites et cercles) On considère dans cet exemple le varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ où

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < A < +\infty, y = 0\}$$

et $\theta(x) = e^x$. On considère alors $X \in C_0^\infty(B((p, q), r), \mathbb{R}^2)$ ($(p, q) \in M, r < \min\{p, A - p\}$) et on obtient :

$$\mathbf{H}_V(x, y) = \mathbf{H}_M(x, y) + \frac{\nabla^M \theta}{\theta}(x, y) = \left\langle \frac{\nabla \theta}{\theta}, (1, 0) \right\rangle (1, 0) = \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, 0 \right)$$

et donc

$$\mathbf{H}_V(x, y) = (1, 0).$$

On peut alors remarquer que localement le module de la courbure au sens de Allard du varifold V est égal au module de la courbure au sens classique d'un cercle de rayon 1.

Exemple 1.3.7 On considère le varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ où θ est une fonction que l'on précisera dans la suite et M est l'ensemble 1-rectifiable suivant

$$M(\alpha) = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

On s'intéresse à étudier localement, c'est-à-dire dans une boule B appropriée, sa courbure moyenne. Si on note $\{e_x, e_y\}$ et $\{e_r, e_\alpha\}$ les bases canoniques par rapport aux coordonnées cartésiennes et polaires respectivement ($\{e_r, e_\alpha\}$ représente la base mobile $\{e_r(\alpha), e_\alpha(\alpha)\}$) on a alors :

$$\begin{cases} e_x = \cos \alpha e_r - \sin \alpha e_\alpha \\ e_y = \sin \alpha e_r + \cos \alpha e_\alpha \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} e_r = \cos \alpha e_x + \sin \alpha e_y \\ e_\alpha = -\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_y \end{cases}.$$

On a alors

$$M(\alpha) = \cos \alpha e_x + \sin \alpha e_y = e_r(\alpha)$$

$$\mathbf{H}_M(r, \alpha) = -e_r(\alpha).$$

On considère alors une fonction $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta(x, y) = \tilde{\theta}(r, \alpha) = f(\alpha)$ où f est positive et telle que $f \geq \epsilon > 0$. On a alors :

$$\nabla_{r,\alpha}^M \theta(r, \alpha) = (0, f'(\alpha))$$

qui donne

$$\mathbf{H}_V(r, \alpha) = \left(-1, \frac{f'}{f}(\alpha) \right)$$

et en passant aux coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{H}_V(x, y) = -e_r + \frac{f'}{f}(\alpha) e_\alpha = \left(-\cos \alpha + \frac{f'}{f}(\alpha) \sin \alpha, -\sin \alpha + \frac{f'}{f}(\alpha) \cos \alpha \right).$$

Si on choisit par exemple le morceau de M paramétré par $\alpha \in [0, \pi - \epsilon]$ avec ϵ petit et $f(\alpha) = 1/(\pi - \alpha)$ on obtient :

$$\mathbf{H}_V(r, \alpha) = \left(-1, \frac{1}{\pi - \alpha} \right).$$

On a alors $\|\mathbf{H}\| \rightarrow \infty$ si $\alpha \rightarrow \pi$ et de plus la direction du vecteur courbure moyenne tend vers la direction tangente à M si $\alpha \rightarrow \pi$.

On obtient un autre exemple intéressant si on choisit le morceau de M paramétré par $\alpha \in [\epsilon, \pi - \epsilon]$ avec ϵ petit et $f(\alpha) = \sin \alpha$. On obtient alors

$$\mathbf{H}_B(r, \alpha) = \left(-1, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

et donc le vecteur courbure moyenne au sens des varifolds coïncide avec le vecteur courbure moyenne classique si $\alpha = \pi/2$ et il est donc orthogonal à M en ce point. De plus comme dans l'exemple précédent si $\alpha \rightarrow 0, \pi$ la direction du vecteur courbure moyenne tend vers la direction tangente à M (voir Fig 1.3).

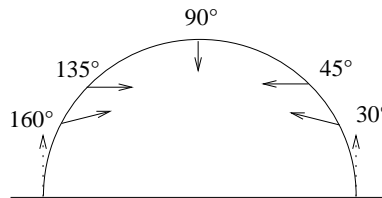


FIG. 1.6 – Courbure avec $f(\alpha) = \sin \alpha$

Exemple 1.3.8 (Spirales) . On considère le varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ où θ est une fonction que l'on précisera dans la suite et M est la spirale

$$M(\alpha) = \{r(\alpha)(\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, +\infty)\}.$$

On s'intéresse à étudier localement, c'est-à-dire dans une boule B appropriée, sa courbure moyenne et en particulier on veut donner des exemples de points où le vecteur courbure moyenne est normale à M et de points où sa direction tend vers la direction tangente à M . On étudie les cas suivants : $r = \alpha$ (spirale d'Archimède) et $r = e^\alpha$ (spirale logarithmique). Si on note $\{e_r(\alpha), e_\alpha(\alpha)\}$ la base mobile canonique par rapport aux coordonnées polaires on a donc

$$M'(\alpha) = r'(\alpha)e_r(\alpha) + r(\alpha)e_\alpha(\alpha)$$

et donc en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla_{r,\alpha}^M \theta(r, \alpha)}{\theta} = \\ = & \left\langle \frac{\nabla_{r,\alpha} \theta(r, \alpha)}{\theta}, \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \right) \right\rangle \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \right) = \\ & = \left(\frac{r' \frac{\partial \theta}{\partial r}}{\theta \sqrt{r^2 + (r')^2}} + \frac{\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}}{\theta \sqrt{r^2 + (r')^2}} \right) \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \right). \end{aligned}$$

On suppose de plus θ une fonction radiale $\theta(x, y) = \tilde{\theta}(r, \alpha) = f(\alpha)$ et on obtient

$$\frac{\nabla_{r,\alpha}^M \theta(r, \alpha)}{\theta} = \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha) \sqrt{r^2 + (r')^2}} \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \right).$$

Dans le cas d'une spirale d'Archimède, $r = \alpha$, la courbure moyenne au sens de Allard en coordonnées polaires est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_V(r, \alpha) &= \mathbf{H}_M(r, \alpha) + \frac{\nabla_{r,\alpha}^M \theta(r, \alpha)}{\theta} = \\ &= \mathbf{H}_V(r, \alpha) + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha) \sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \end{aligned}$$

et dans le cas d'une spirale logarithmique par

$$\mathbf{H}_V(r, \alpha) = \mathbf{H}_M(r, \alpha) + \frac{f'(\alpha)}{2e^\alpha f(\alpha)} (1, 1)$$

où \mathbf{H}_M représente la courbure moyenne classique. Si on choisit $f(\alpha) = \sin \alpha$ alors si $\alpha = k\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) on a $f'(\alpha) = 0$ et donc la courbure moyenne au sens de Allard des deux spirales coïncide avec la courbure moyenne classique et donc elle normale à M .

Par contre si on considère les morceaux de spirale paramétré par $\alpha \in [0, 5\pi - \varepsilon]$ avec ε petit et $f(\alpha) = \alpha - 5\pi$ alors si $\alpha \rightarrow 5\pi$ le vecteur courbure moyenne tend vers la direction tangente à M .

1.4 Courants Rectifiables

Soit $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n), \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace des k -covecteurs et k -vecteurs de \mathbb{R}^n ($1 \leq k \leq n$).

On rappelle alors que $v \in \bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ et $w \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ peuvent être représentés de la façon suivante :

$$v = \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha dx_\alpha, \quad w = \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega^\alpha dx^\alpha$$

où $\bigwedge_{n,k} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq n\}$.

On peut de plus définir un *produit de dualité* entre k -covecteurs et k -vecteurs par :

$$(v, w) \in \bigwedge_k(\mathbb{R}^n) \times \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \mapsto \langle v, w \rangle = \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha \omega^\alpha.$$

Définition 1.4.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $1 \leq k \leq n$. On appelle k -forme différentielle l'application définie par

$$\begin{aligned} \omega : A &\rightarrow \bigwedge_k(\mathbb{R}^n) \\ \omega(x) &= \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha(x) dx_\alpha. \end{aligned}$$

Les fonctions ω_α sont appelées *coefficients de la forme*. Si tout coefficient de ω est de classe $C^r(\Omega), C_0^r(\Omega)$ ($r = 1, \dots, \infty$) on dit que la forme est de classe $C^r(\Omega), C_0^r(\Omega)$.

On s'intéresse dans la suite aux k -formes différentielles de classe $C_0^\infty(\Omega)$ et on note cet espace par $\mathcal{D}_{n,k}$. Dans $\mathcal{D}_{n,k}$ on peut définir la topologie suivante :

$$\omega^h(x) = \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha^h(x) dx_\alpha \rightarrow \omega(x) = \sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha(x) dx_\alpha$$

s'il existe $K \subseteq \Omega$ tel que $\omega_\alpha^h \in C_0^\infty(K)$ pour tout $\alpha \in \bigwedge_{n,k}$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} D^\beta \omega_\alpha^h = D^\beta \omega_\alpha$ en norme C^0 pour tout $\alpha \in \bigwedge_{n,k}$ et pour tout multi-indice β .

On peut de plus définir la *norme* de ω par

$$|\omega| = \sup_{x \in \Omega} \sqrt{\sum_{\alpha \in \bigwedge_{n,k}} \omega_\alpha^2(x)}.$$

Définition 1.4.2 Un n -courant (où simplement courant) est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}_{n,k}$. On note l'espace des n -courants par $\mathcal{D}'_{n,k}(\Omega)$.

Un exemple important de courant est donné par les *courants rectifiables*. Pour ceci il convient de rappeler la notion de variété orientée :

Définition 1.4.3 Soit M une k -variété dans \mathbb{R}^n ($1 \leq k \leq n$) et soit $\{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)\}$ une base de l'espace $T_x M$. M est orientée si la fonction

$$\xi : M \rightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\xi(x) = \frac{\tau_1(x) \wedge \dots \wedge \tau_k(x)}{|\tau_1(x) \wedge \dots \wedge \tau_k(x)|}$$

(\wedge est le produit externe entre k -vecteurs) est continue. On appelle ξ orientation de M .

Exemple 1.4.4 1) **Courbes.** Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe simple et régulière et soit $M = \gamma([a, b])$ une 1-variété. L'orientation de M est alors $\xi = \gamma' / |\gamma'|$.

2) **Surfaces.** Soit $S : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière et soit $M = S(\Omega)$ une 2-variété. L'orientation ξ de M coïncide alors avec la normale à la surface.

On peut alors donner la définition des courants rectifiables :

Définition 1.4.5 (Courant Rectifiable) . Soit $M \subset \Omega$ une k -variété orientable avec mesure \mathcal{H}^k localement finie dans Ω et soit ξ une orientation pour M . On appelle k -courant rectifiable associé à M l'application $[M] \in \mathcal{D}'_{n,k}(\Omega)$ définie par

$$[M](\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle d\mathcal{H}^k, \quad \omega \in \mathcal{D}_{n,k}$$

où \langle, \rangle est le produit de dualité entre $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ et $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$.

On peut de plus généraliser cette définition au cas des varifolds :

Définition 1.4.6 Soit M un ensemble k -rectifiable de \mathbb{R}^n . M est orienté s'il existe une fonction $\xi : M \rightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ \mathcal{H}^k -mesurable telle que pour \mathcal{H}^k -presque tout $x \in M$ on a

$$\xi(x) = \tau_1(x) \wedge \dots \wedge \tau_k(x)$$

(\wedge est le produit externe entre k -vecteurs) où $\{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)\}$ est une base orthonormée de l'espace tangent $T_x M$. ξ est appelée orientation de M .

Définition 1.4.7 (Courant Rectifiable Entier) . Soit M un ensemble k -rectifiable orienté et soit ξ une orientation pour M . Soit $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ un varifold k -rectifiable entier dans Ω . On appelle k -courant rectifiable entier associé à V l'application $T \in \mathcal{D}'_{n,k}(\Omega)$ définie par

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \theta(x) d\mathcal{H}^k, \quad \omega \in \mathcal{D}_{n,k}$$

où \langle, \rangle est le produit de dualité entre $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ et $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$.

En théorie géométrique de la mesure le concept de courant rectifiable (entier) est donc la généralisation naturelle du concept de variété orientable de la géométrie différentielle.

Exemple 1.4.8 On considère les varifolds $V_h = \mathbf{v}(M_h, 1)$, $V = \mathbf{v}(M, 1)$ où $\{M_h\}$ est la suite d'ensembles 1-rectifiables représentés en Fig 1.7. et $M_h \rightarrow M$ où $M = A \cup B \cup C$ est l'ensemble 1-rectifiable représenté e Fig. 1.7.

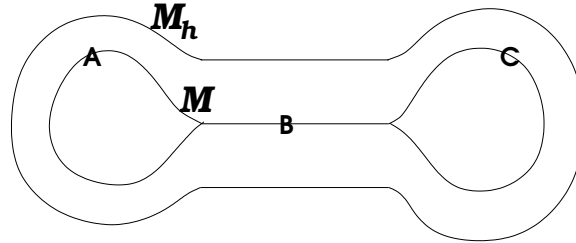


FIG. 1.7 – Courants rectifiables entiers

Pour tout h M_h est une courbe régulière dans \mathbb{R}^2 et donc, sauf normalisation, son orientation est donnée par son vecteur tangent. Si on considère alors le 1-courant entier associé à V_h on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} T_h(\omega) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{M_h} \langle \omega(x), \xi_h(x) \rangle d\mathcal{H}^1 = \int_{A \cup C} \langle \omega(x), \xi(x) \rangle d\mathcal{H}^1$$

où ξ_h est une orientation pour M_h et ξ une orientation pour M .

Chapitre 2

La fonctionnelle de Willmore

2.1 Introduction

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) et $\mathcal{O}(\Omega)$ la famille des sous-ensembles ouverts de Ω . Dans ce chapitre on s'intéresse à la fonctionnelle

$$F_p : L^1(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$$
$$F_p(u, B) = \begin{cases} \int_B |\nabla u| \left(1 + \alpha \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) dx & , \text{ si } u \in C^2(B) \\ +\infty & , \text{ sinon} \end{cases}$$

où on pose $|\nabla u| \left(1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) = 0$ si $|\nabla u| = 0$ et où α est une constante réelle positive. On étudiera en particulier un problème de minimisation, dans l'espace des fonctions à variation bornée, pour une telle fonctionnelle. Sans perte de généralité on pose de plus $\alpha = 1$.

Le point de départ de notre analyse est la réécriture de la fonctionnelle en utilisant les ensembles de niveau de la fonction u , ce qui permettra d'étudier la semicontinuité inférieure de F_p dans le cadre de la théorie des varifolds.

Il convient alors remarquer quelques propriétés des ensembles de niveau d'une fonction régulière. On commence par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 (Formule de Coaire) . Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, ($N \geq 2$), une fonction Lipschitzienne. Alors pour tout ensemble mesurable A on a :

$$\int_A |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(A \cap u^{-1}(t)) dt.$$

(cf : [5] : théorème 1, p.112).

On rappelle de plus

Théorème 2.1.2 (Formule de Coaire pour fonctions BV) . Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) et $u \in BV(\Omega)$. Alors pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $E_\lambda = \{x \in \Omega : u(x) > \lambda\}$ est de périmètre fini dans Ω et

$$\|Du\|(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} P(E_\lambda, \Omega) d\lambda.$$

De plus si $u \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\mathbb{R}} P(E_\lambda, \Omega) d\lambda < +\infty$$

alors $u \in BV(\Omega)$.

(cf : [5] : théorème 1, p.185).

Remarque 2.1.3 (Théorème de Morse-Sard et ensembles de niveau) . Si on applique la Formule de Coaire à l'ensemble $A = \{\nabla u = 0\}$ on obtient

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap u^{-1}(t)) = 0$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Ce résultat est un cas particulier du théorème de Morse-Sard.

Grâce au théorème de Morse-Sard on peut de plus obtenir un résultat de régularité sur les ensembles de niveau d'une fonction régulière. Soit $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, et on considère l'ensemble $\Gamma_\lambda = \{u = \lambda\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Grâce au théorème de Morse-Sard pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \Gamma_\lambda) = 0$ et donc en appliquant le théorème de la fonction implicite on obtient que pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble Γ_λ est régulier, en particulier C^2 .

Une autre propriété importante des ensembles de niveau est la suivante :

Lemme 2.1.4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N $\{u_h\} \subseteq L^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ une suite qui converge vers $u \in C^2(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite $\{u_{\sigma(h)}\}$ telle que pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $E_\lambda^h \rightarrow E_\lambda$ dans $L^1(\Omega)$ (i.e. $E_\lambda^h \Delta E_\lambda \rightarrow 0$).

Démonstration : Puisque $u_h \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} |u_h - u| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\Omega} |\mathbb{1}_{\{u_h \geq \lambda\}}(x) - \mathbb{1}_{\{u \geq \lambda\}}(x)| dx \right] d\lambda \rightarrow 0$$

et donc pour presque tous $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} |\mathbb{1}_{\{u_h \geq \lambda\}}(x) - \mathbb{1}_{\{u \geq \lambda\}}(x)| dx \rightarrow 0$$

et donc, quitte à prendre une sous-suite, pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\mathbb{1}_{\{u_h \geq \lambda\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{u \geq \lambda\}}$ dans $L^1(\Omega)$ et donc la preuve. \square

On rappelle en outre le théorème suivant :

Théorème 2.1.5 (Changement de variables) . Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne et $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sommable. Alors $g|_{u^{-1}(t)}$ est \mathcal{H}^{N-1} sommable pour presque tout t et

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{u^{-1}(t)} g d\mathcal{H}^{N-1} \right] dt.$$

(cf : [5] : théorème 2, p.117)

2.2 Interpretation géométrique de F_p

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et soit u une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$. On définit la surface régulière

$$\begin{aligned} S : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, u(x, y)) \end{aligned}$$

dont on considère pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$E_\lambda = \{ \underline{x} = (x, y) \in \Omega : u(\underline{x}) \geq \lambda \}.$$

On s'intéresse alors à la fonctionnelle

$$F_p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \left(1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) d\underline{x}$$

où on pose $|\nabla u| \left(1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) = 0$ si $|\nabla u| = 0$. On va donc montrer que :

$$F_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda \cap \Omega} (1 + |k|^p) d\mathcal{H} \right] d\lambda \quad (2.1)$$

où k est la courbure de $\partial E_\lambda \cap \Omega$.

En choisissant $g(x) = 1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p$ dans le théorème 2.1.5 on obtient

$$F_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda \cap \Omega} \left(1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) d\mathcal{H} \right] d\lambda.$$

On va donc montrer que en tout point où $|\nabla u| > 0$ on a

$$|k| = \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right| \quad (2.2)$$

On considère alors l'équation $u(x, y) - \lambda = 0$ dans un voisinage d'un point où $|\nabla u| > 0$. Grâce au théorème de la fonction implicite on peut définir une courbe régulière $\gamma(x) = (x, f(x))$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tel que $u(x, f(x)) = \lambda$ pour tout $x \in [a, b]$. En dérivant par rapport à x l'équation $u(\gamma(x)) = \lambda$ on obtient de plus que

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Evidemment la courbe γ paramètre localement ∂E_λ et on a

$$\gamma'(x) = \left(1, -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right), \gamma''(x) = (0, f''(x)), |\gamma'| = \frac{|\nabla u|}{|\partial u/\partial y|}.$$

Pour déterminer la normale à γ il faut alors normaliser le vecteur $\left(\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}, 1\right)$ et on obtient

$$n_\gamma = \text{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}.$$

On peut alors calculer la courbure k de γ grâce à la formule

$$k(x) = \frac{\gamma'_1 \gamma''_2 - \gamma'_2 \gamma''_1}{|\gamma'|^3}(x)$$

et on obtient

$$k = \frac{f''}{|\gamma'|^3} = \frac{|\partial u/\partial y|^3}{|\nabla u|^3} f''.$$

On peut alors calculer f'' grâce à l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2} [u(x, f(x)) - \lambda] = 0$$

qui donne

$$f'' = -\frac{1}{(\partial u/\partial y)^3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right].$$

On obtient alors

$$k = -\frac{\text{sign}(\partial u/\partial y)}{|\nabla u|^3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]$$

et puisque

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u/\partial x}{|\nabla u|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u/\partial y}{|\nabla u|} = \\ &= \frac{\Delta u}{|\nabla u|} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|}\right) = \\ &= \frac{1}{|\nabla u|^3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

on a

$$k = -\text{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

et donc (2.2).

On obtient alors (2.1) si pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $|\nabla u| > 0$ \mathcal{H}^{N-1} -p.p. sur $\partial E_\lambda \cap \Omega$. Ceci découle en fait de la remarque 2.1.3 et donc on obtient la preuve de (2.1).

En effet on peut donner une démonstration beaucoup plus simple de (2.1) qui est valable même en dimension supérieure. Soit donc u une fonction définie dans Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), $u \in C^2(\overline{\Omega})$, et on considère la surface définie par

$$S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N, u(x_1, \dots, x_N)).$$

Pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\partial E_\lambda = \{u = \lambda\}$ est une N -variété dans \mathbb{R}^{N+1} donc l'espace normale a dimension 1 et si on note n la normale à ∂E_λ on peut écrire le vecteur courbure moyenne de l'hypersurface $\partial E_\lambda \cap \Omega$ de la façon suivante :

$$\mathbf{H}_{E_\lambda} = -(\operatorname{div} n)n.$$

Si on considère alors la fonctionnelle $F_p(u)$ et on applique le théorème 2.1.5 on obtient

$$F_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda \cap \Omega} \left(1 + \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda.$$

Or si $|\nabla u| > 0$, grâce au théorème de la fonction implicite, l'équation $u(x_1, \dots, x_N) = \lambda$ définit implicitement une fonction $f : A \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\partial E_\lambda \cap \Omega$ est localement paramétré par $\Lambda(x_1, \dots, x_{N-1}) = (x_1, \dots, x_{N-1}, f(x_1, \dots, x_{N-1}))$. En dérivant alors l'égalité $u(\Lambda(x_1, \dots, x_{N-1})) = \lambda$ par rapport à x_i , $i = 1, \dots, N-1$, on obtient

$$\langle \nabla u, \partial \Lambda / \partial x_i \rangle = 0.$$

Le vecteur $\nabla u / |\nabla u|$ est donc normale à $\partial E_\lambda \cap \Omega$ et donc

$$|\mathbf{H}_{E_\lambda}| = |\operatorname{div} n| = \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|. \quad (2.3)$$

Grâce à la remarque 2.1.3 on peut donc conclure

$$F_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda \cap \Omega} (1 + |\mathbf{H}_{E_\lambda}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda. \quad (2.4)$$

De plus si on pose

$$\mathcal{F}_p(E) = \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1}$$

on peut alors écrire la fonctionnelle F_p de la façon suivante :

$$F_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[P(E_\lambda, \Omega) + \mathcal{F}_p(E) \right] d\lambda. \quad (2.5)$$

2.3 Reconstruction d'images par lignes de niveau

Soit $A \subset\subset \Omega$ ouvert, connexe, avec bord Lipschitz, $u_0 \in BV(\Omega \setminus \bar{A})$ et \tilde{A} ouvert tel que $A \subset \tilde{A} \subset\subset \Omega$.

On considère alors le problème de minimisation suivant :

$$\text{Inf}\{F_p(u, \tilde{A}) : u \in L^1(\Omega), u = u_0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{A}\}.$$

Pour montrer l'existence d'un minimum par les méthodes directes du Calcul des Variations on devrait considérer une suite minimisante, extraire une sous-suite convergente grâce à un argument de compacité et conclure avec la semicontinuité de la fonctionnelle. Malheureusement F_p n'est pas semicontinue inférieurement (sci) par rapport à la topologie L^1 .

En rappelant (2.5) on va montrer avec les deux exemples suivants que ni F_p ni \mathcal{F}_p ne sont sci. En particulier on peut donner un premier exemple qui contredit la semicontinuité de F_p mais pas celle de \mathcal{F}_p et un deuxième exemple qui est un contreexemple soit pour la semicontinuité de F_p soit pour celle de \mathcal{F}_p .

Exemple 2.3.1 On considère $N = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = B(0, 2)$, $\tilde{A} = B(0, 3)$, $u_0 = 0$ et $u = \mathbb{1}_{B(0,1)}$. On peut alors approcher u dans la topologie L^1 par une suite $\{u_k\} \in L^1(\Omega) \cap C_0^2(\tilde{A})$ de fonctions radiales. Pour ceci il suffit de considérer la suite qui approche la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ représentée en Fig 2.1 et de faire une rotation par rapport à l'axe z .

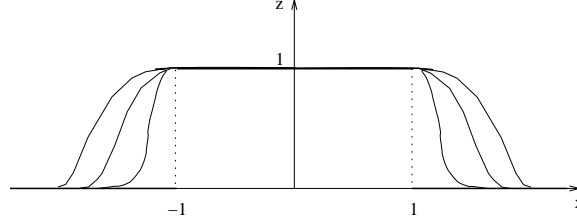


FIG. 2.1 – Approximation par fonctions régulières

Grâce à (2.3) on a

$$F_p(u_k, \tilde{A}) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda^k \cap \tilde{A}} (1 + |\mathbf{H}_{E_\lambda^k}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda = \int_0^1 \left[\int_{\partial E_\lambda^k \cap \tilde{A}} 2d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda$$

et donc

$$\sup_{k \geq 1} F_p(u_k, \tilde{A}) < +\infty.$$

On a donc

$$u_k \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega), u_k = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{A}$$

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} F_p(u_k, \tilde{A}) < +\infty$$

mais puisque $u \notin C^2(\tilde{A})$ par définition de la fonctionnelle on a

$$F_p(u, \tilde{A}) = +\infty.$$

Donc la fonctionnelle n'est pas semicontinue inférieurement par rapport à la topologie L^1 .

Cependant si on considère les ensembles de niveau de u et u_h , que l'on note respectivement E_λ et E_λ^h , grâce au lemme 2.1.4 on a (quitte à extraire une sous-suite) que $E_\lambda^h \rightarrow E_\lambda$ dans $L^1(\tilde{A})$. De plus, puisque pour tout $\lambda \in [0, 1]$ les ensembles de niveau de u et u_h sont des cercles, on a :

$$\mathcal{F}_p(E_\lambda) = P(E_\lambda, \tilde{A}) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} P(E_\lambda^h, \tilde{A}) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_p(E_\lambda^h).$$

Exemple 2.3.2 Soit $N = 2$ et E l'ensemble en Fig 2.2. On considère $\Omega = \mathbb{R}^2$, A et \tilde{A} deux boules assez grandes, $u_0 = 0$ et $u = \mathbb{1}_E$. On peut alors approcher u dans la topologie

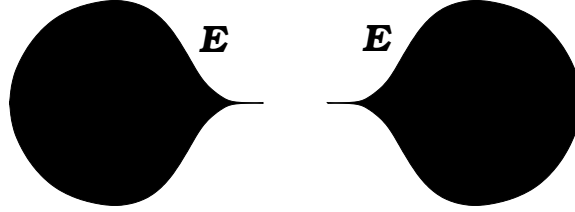


FIG. 2.2 – Ensemble non regulier

L^1 par une suite de fonctions $\{u_k\} \in L^1(\Omega) \cap C_0^2(\tilde{A})$, $0 \leq u \leq 1$ telles que les ensembles $E_\lambda^h = \{u_h \geq \lambda\}$ sont représentés en Fig 2.3. Grâce au lemme 2.1.4 pour presque tout $\lambda \in [0, 1]$, quitte à extraire une sous-suite, $E_\lambda^h \rightarrow E_\lambda$ dans L^1 et de plus

$$\mathcal{F}_p(E_\lambda) = +\infty, \quad \sup_h \mathcal{F}_p(E_\lambda^h) < +\infty.$$

Ceci prouve que la fonctionnelle \mathcal{F}_p n'est pas sci.

Comme dans l'exemple précédent grâce à (2.3) on a

$$F_p(u_k, \tilde{A}) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\partial E_\lambda^k \cap \tilde{A}} (1 + |\mathbf{H}_{E_\lambda^k}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \right] d\lambda$$

et donc

$$\sup_{k \geq 1} F_p(u_k, \tilde{A}) < +\infty.$$

On a donc

$$u_k \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega), \quad u_k = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{A}$$

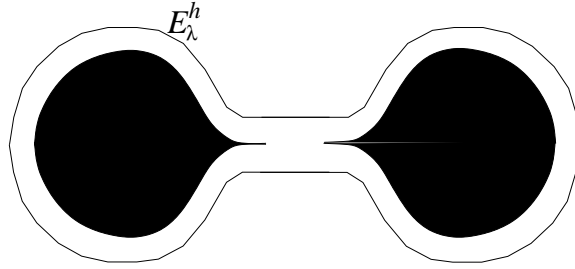


FIG. 2.3 – Approximation par fonctions régulières

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} F_p(u_k, \tilde{A}) < +\infty$$

mais puisque $u \notin C^2(\tilde{A})$ par définition de la fonctionnelle on a

$$F_p(u, \tilde{A}) = +\infty.$$

Donc la fonctionnelle F_p n'est pas semicontinue inférieurement par rapport à la topologie L^1 .

On considère alors la fonctionnelle relaxée de F_p définie par

$$\overline{F}_p(u, \tilde{A}) = \sup_{G \in \mathcal{G}} G(u)$$

où

$$\mathcal{G} = \left\{ G : L^1(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{R} : G \text{ sci}, G(u) \leq F_p(u, \tilde{A}) \forall u \in L^1(\tilde{A}) \right\}.$$

On peut dire que $\overline{F}_p(u, \tilde{A})$ est la plus grande fonctionnelle sci qui minore $F_p(u, \tilde{A})$. On peut donner une définition équivalente de fonctionnelle relaxée de la façon suivante :

$$\overline{F}_p(u, \tilde{A}) = \inf \left\{ \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_p(u_h, \tilde{A}) : u_h \rightarrow u \text{ dans } L^1 \tilde{A} \right\}.$$

Remarque 2.3.3 Si $u \in C^2(B)$ on a alors

$$F_p(u, B) \geq \int_B |\nabla u| = |Du|(B). \quad (2.6)$$

L'inégalité (2.6) se généralise d'ailleurs au cas $u \in L^1(B)$ puisque si $u \notin C^2(B)$ on a $F_p(u, B) = +\infty$. Or la variation totale est sci pour la topologie L^1 et donc on a

$$\overline{F}_p(u, B) \geq |Du|(B), \quad \forall u \in L^1(\Omega).$$

On suppose alors qu'il existe $u \in L^1(\Omega)$ tel que $u = u_0$ dans $\Omega \setminus \tilde{A}$ et $\overline{F}_p(u, \tilde{A}) < +\infty$, ce qui assure que $\overline{F}_p(u, \tilde{A}) \neq +\infty$.

On peut donc montrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.4 *Le problème*

$$(P) \quad M = \text{Inf} \{ \overline{F}_p(u, \tilde{A}) : u \in L^1(\Omega), u = u_0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{A} \}.$$

admet au moins une solution $u \in BV(\Omega)$.

Démonstration La fonctionnelle nulle est sci et elle minore F_p et donc on a $\overline{F}_p \geq 0$.
On a alors

$$0 \leq M < +\infty.$$

Soit alors $\{u_h\} \subseteq L^1(\Omega)$ une suite minimisante, i.e. $\overline{F}_p(u_h, \tilde{A}) \rightarrow M$ si $h \rightarrow +\infty$. On peut en outre supposer (quitte à considérer la suite pour $h \geq \bar{h} > 0$) que $\sup_h \overline{F}_p(u_h, \tilde{A}) < +\infty$ qui, grâce à la remarque 2.3.3, donne

$$\sup_h |Du_h|(\tilde{A}) \leq \sup_h \overline{F}_p(u_h, \tilde{A}) < +\infty.$$

Or $\Omega \subseteq \tilde{A} \cup (\Omega \setminus \overline{A})$ et $u_h = u_0$ dans $\Omega \setminus \overline{A}$ et donc $u_h \in BV(\Omega \setminus \overline{A})$. On a alors

$$|Du_h|(\Omega) \leq |Du_h|(\tilde{A}) + |Du_0|(\Omega \setminus \overline{A}) < +\infty$$

et donc

$$\sup_h |Du_h|(\Omega) < +\infty. \quad (2.7)$$

On a alors $\{u_h\} \subseteq BV(\Omega)$. En outre si on considère l'opérateur $T \in [BV(\Omega)]'$ défini par

$$T(v) = \int_{\tilde{A} \setminus A} v$$

on a

$$T(u_h) = \int_{\tilde{A} \setminus A} u_0$$

et grâce à l'inégalité de Poincaré (cf : [11] théorème 5.11.1, p.261) on obtient

$$\|u_h - T(u_h)\|_{L^1(\Omega)} \leq |Du_h|(\Omega)$$

qui avec (2.7) donne

$$\sup_h \|u_h\|_{L^1(\Omega)} < +\infty. \quad (2.8)$$

Grâce à (2.7) et (2.8) on obtient

$$\sup_h \|u_h\|_{BV(\Omega)} < +\infty$$

et donc on peut extraire une sous-suite $\{u_{\sigma(h)}\}$ qui converge à une fonction $u \in BV(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. On a en particulier $u_{\sigma(h)} \rightarrow u \in BV(\tilde{A})$ dans $L^1(\tilde{A})$ et donc par semicontinuité inférieure de la fonctionnelle relaxée on a

$$\overline{F}_p(u, \tilde{A}) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \overline{F}_p(u_{\sigma(h)}, \tilde{A}) = M.$$

Evidemment $u = u_0$ dans $\Omega \setminus \overline{A}$ et donc u est solution du problème (P). \square

2.4 Semicontinuité de F_p dans $L^1 \cap C^2$

Le but de cette section consiste à démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit $B \subset \Omega$ un ouvert et on suppose $N = 2, p \geq 1$ ou $N \geq 3, p \geq 2$. La fonctionnelle $F_p(\cdot, B)$ est alors sci dans $L^1(\Omega) \cap C^2(B)$ par rapport à la topologie L^1 . En particulier on a alors*

$$F_p(u, B) = \overline{F}_p(u, B) \quad \forall u \in C^2(B)$$

Pour le démontrer, en vertu de (2.4), il est utile d'étudier la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_p(E) = \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1}$$

où \mathbf{H}_E est la courbure de $\partial E \cap \Omega$. On rappelle d'abord un lemme de théorie de la mesure qu'on utilisera dans la suite :

Lemme 2.4.2 *Soit $p > 1$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , ($N \geq 2$). Soient δ_h, δ deux mesures de Radon vectorielles et μ_h, μ deux mesures positives de Radon telles que $\delta_h \rightarrow \delta$ et $\mu_h \rightarrow \mu$ dans Ω . Si $\delta_h \ll \mu_h$ et $\sup_h \int_{\Omega} |D_{\mu_h} \delta_h|^p d\mu_h < \infty$ alors $\delta \ll \mu$ et*

$$\int_{\Omega} |D_{\mu} \delta|^p d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D_{\mu_h} \delta_h|^p d\mu_h.$$

(cf. : [1] : théorème 2.34 p.65 et exemple 2.36 p.67)

Le théorème suivant montre, dans le cas $N \geq 3$ et $p \geq 2$, que la fonctionnelle \mathcal{F}_p est sci pour la topologie L^1 dans la classe des ouverts bornés de \mathbb{R}^N qui sont de classe C^2 dans Ω :

Théorème 2.4.3 (Semicontinuité inférieure de la norme L^p de la courbure moyenne)
. Soit $p \geq 2$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , ($N \geq 3$). Soit $\{E_h\}$ une suite d'ensembles tels que $\partial E_h \cap \Omega \in C^2$ qui converge dans $L^1(\Omega)$ vers E tel que $\partial E \cap \Omega \in C^2$. On a alors

$$\mathcal{F}_p(E) = \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}|^p d\mathcal{H}^{N-1} = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_p(E_h).$$

Démonstration : On peut supposer que $\liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_p(E_h) < +\infty$ (dans le cas contraire le résultat est trivial) et de plus (quitte à prendre une sous-suite) on peut supposer

$$\sup_h \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}|^p d\mathcal{H}^{N-1} < C_1 < +\infty, \quad (2.9)$$

$$\sup_h \mathcal{H}^{N-1}(\partial E_h \cap \Omega) < C_2 < +\infty. \quad (2.10)$$

On considère alors la suite des varifolds $(N - 1)$ -rectifiables et entiers $V_h = \mathbf{v}(\partial E_h \cap \Omega, 1)$ avec mesures poids associées $\mu_{V_h} = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E_h \cap \Omega)$. Puisque $\partial E_h \cap \Omega$ sont des variétés régulières si on considère les variations premières des varifolds V_h dans Ω on obtient

$$\delta V_h(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \mathbf{H}_{E_h} \rangle d\mu_{V_h} \quad \forall X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

De plus, grâce à (2.9) et (2.10), pour tout $W \subset\subset \Omega$ et pour tout $X \in C_0^\infty(W, \mathbb{R}^N)$ on a :

$$|\delta V_h(X)| \leq \int_{\Omega} |\langle X, \mathbf{H}_{E_h} \rangle| d\mu_{V_h} \leq C_0 \|\mathbf{H}_{E_h}\|_{L^p(\Omega, \mu_{V_h})} \|X\|_{L^\infty(W, \mu_{V_h})} \leq C_1^{1/p} \|X\|_{L^\infty(W, \mu_{V_h})}$$

et

$$\sup_h (\mu_{V_h}(W) + \|\delta V_h\|(W)) = \sup_h (\mathcal{H}^{N-1}(\partial E_h \cap W) + \|\delta V_h\|(W)) < C_2 + C_0 C_1^{1/p} < +\infty.$$

En vertu du théorème de compacité de Allard 1.2.19, quitte à extraire une sous-suite, il existe un varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$, $\theta \geq 1$ \mathcal{H}^{N-1} -p.p. dans M , $(N - 1)$ -rectifiable et entier tel que $V_h \rightarrow V$. On a alors $\mu_{V_h} \rightarrow \mu_V$ et $\delta V_h \xrightarrow{*} \delta V$ dans $C_0^\infty(W, \mathbb{R}^N)$ pour tout ouvert $W \subset\subset \Omega$. Donc si on applique le résultat de semicontinuité énoncé dans le lemme 2.4.2 on a $\mathbf{H}_V \in L^p(\Omega, \mu_V)$ et

$$\delta V(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \mathbf{H}_V \rangle d\mu_V$$

et

$$\int_M |\mathbf{H}_V|^p \theta d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}|^p d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (2.11)$$

Il faut donc montrer que \mathcal{H}^{N-1} -presque tout point de $\partial E \cap \Omega$ appartient à M et que $\mathbf{H}_V = \mathbf{H}_E$ \mathcal{H}^{N-1} -p.p. sur $\partial E \cap \Omega$.

Soit $x \in \partial E \cap \Omega$. Puisque M est rectifiable dans Ω et puisque $\mu_V(\partial B(x, r))$ est une fonction localement monotone et donc BV par rapport à r elle admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités et donc pour tout $r > 0$, sauf au plus un ensemble dénombrable, on a $\mu_V(\partial B(x, r)) = 0$ et donc

$$\mu_V(B(x, r)) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \mu_{V_h}(B(x, r)) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{N-1}(B(x, r) \cap \partial E_h \cap \Omega).$$

Par la semicontinuité du périmètre de E dans Ω on obtient :

$$\mu_V(B(x, r)) \geq \mathcal{H}^{N-1}(B(x, r) \cap \partial E \cap \Omega) > 0 \quad (2.12)$$

et donc

$$\frac{1}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \int_{B(x, r) \cap M} \theta d\mathcal{H}^{N-1} \geq \frac{\mathcal{H}^{N-1}(B(x, r) \cap \partial E \cap \Omega)}{\omega_{N-1} r^{N-1}} > 0.$$

Or \mathcal{H}^{N-1} -presque tout point de $\partial E \cap \Omega$ a densité 1 pour $\partial E \cap \Omega$ et donc grâce au lemme 1.2.7 \mathcal{H}^{N-1} -presque tout point de $\partial E \cap \Omega$ appartient à M .

Soit $U = \mathbf{v}(\partial E \cap \Omega, 1)$. Puisque $\partial E \cap \Omega \in C^2$ on a

$$\mathbf{H}_U(x) = \mathbf{H}_E(x)$$

\mathcal{H}^{N-1} -p.p. sur $\partial E \cap \Omega$ et de plus $\mathbf{H}_U \in L^p_{loc}(\partial E \cap \Omega, \mathcal{H}^{N-1})$ car \mathbf{H}_U est continu sur $\partial E \cap \Omega$. Par le théorème 1.2.17 on a alors

$$\mathbf{H}_E(x) = \mathbf{H}_U(x) = \mathbf{H}_V(x)$$

pour \mathcal{H}^{N-1} -p.p. $x \in M \cap \partial E \cap \Omega$ et donc \mathcal{H}^{N-1} -p.p. $x \in \partial E \cap \Omega$. Grâce à (2.11) et du fait que $\theta \geq 1$ \mathcal{H}^{N-1} -p.p. dans M on obtient

$$\int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_V|^p \theta d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}|^p d\mathcal{H}^{N-1}.$$

□

Ce théorème donne le résultat de semicontinuité dans le cas $N \geq 3$ et $p \geq 2$. On peut de plus montrer le résultat dans le cas $N = 2$ et $p \geq 1$:

Théorème 2.4.4 (Semicontinuité inférieure de la norme L^p de la courbure moyenne)

. Soit $p \geq 1$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Soit $\{E_h\}$ une suite d'ensembles tels que $\partial E_h \cap \Omega \in C^2$ qui converge dans $L^1(\Omega)$ vers E tel que $\partial E \cap \Omega \in C^2$. On a alors

$$\mathcal{F}_p(E) = \int_{\partial E \cap \Omega} |\mathbf{H}_E|^p d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}|^p d\mathcal{H}^{N-1} = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_p(E_h).$$

Démonstration : On considère les variforlds $V_h = \mathbf{v}(\partial E_h \cap \Omega \cap \Omega, 1)$ et la démonstration suit le même schéma de la démonstration précédente (pour les détails voir théorème 4.1 p.18 dans [6]) sauf en deux points :

1) dans le cas $p = 1$ on ne peut pas appliquer le lemme 2.4.2 et donc pour montrer (2.11) on remarque que par le théorème de Allard

$$\|\delta V\|(\Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|\delta V_h\|(\Omega)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_M |\mathbf{H}_V| \theta d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \|\delta V\|(\Omega) \leq \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \|\delta V_h\|(\Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial E_h \cap \Omega} |\mathbf{H}_{E_h}| d\mathcal{H}^{N-1}; \end{aligned}$$

2) pour montrer $H_E = H_V$ \mathcal{H}^{N-1} -p.p. sur $\partial E \cap \Omega$ on utilise le théorème 1.2.16 à la place du théorème 1.2.17. □

On peut donc donner la démonstration du théorème 2.4.1 :

Démonstration du théorème 2.4.1 : Soit $\{u_h\} \subseteq L^1(\Omega) \cap C^2(B)$ une suite qui converge à $u \in C^2(B)$ dans $L^1(B)$. On peut alors supposer que $\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_p(u_h, B) < +\infty$ sinon la

preuve est triviale ; de plus, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $u_h \rightarrow u$ p.p. dans B et que la lim inf soit une limite.

Or puisque $u_h \rightarrow u$ dans $L^1(B)$ grâce au lemme 2.1.4, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que pour presque tous $\lambda \in \mathbb{R}$ $\mathbb{1}_{\{u_h \geq \lambda\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{u \geq \lambda\}}$ dans $L^1(B)$. En outre pour presque tous $\lambda \in \mathbb{R}$ le bord des ensembles $\{u_h \geq \lambda\}, \{u \geq \lambda\}$ est régulier (voir remarque 2.1.3) et donc grâce à la semicontinuité du périmètre et en appliquant le théorème 2.4.4 pour le cas $N = 2, p \geq 1$ et le théorème 2.4.3 pour le cas $N \geq 3, p \geq 2$ on obtient

$$\int_{\partial\{u \geq \lambda\} \cap B} (1 + |\mathbf{H}_{\partial\{u \geq \lambda\} \cap B}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\partial\{u_h \geq \lambda\} \cap B} (1 + |\mathbf{H}_{\partial\{u_h \geq \lambda\} \cap B}|^p) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

En intégrant sur \mathbb{R} et par le lemme de Fatou on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\{u \geq \lambda\} \cap B} (1 + |\mathbf{H}_{\partial\{u \geq \lambda\} \cap B}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\{u_h \geq \lambda\} \cap B} (1 + |\mathbf{H}_{\partial\{u_h \geq \lambda\} \cap B}|^p) d\mathcal{H}^{N-1}$$

qui grâce à (2.4) donne

$$F_p(u, B) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_p(u_h, B).$$

□

Remarque 2.4.5 Dans [4] on montre qu'en dimension $N = 2$ le résultat de semicontinuité du théorème 2.4.4 est valable pour tout $p > 1$. La démonstration est basée sur des techniques de paramétrisation locale qui ne font pas appel aux outils de la théorie des varifolds.

Bibliographie

- [1] AMBROSIO L., FUSCO N., PALLARA D., *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000.
- [2] AMBROSIO L., MASNOU S., *A direct variational approach to a problem arising in image reconstruction*. Interfaces et Free Boundaries 5 (2003), 63-81.
- [3] BRAKKE K.A., *The motion of a surface by its mean curvature*. Mathematical notes, Princeton University Press, 1978.
- [4] BELLETTINI G., DAL MASO G., PAOLINI M. *Semicontinuity and Relaxation Properties of a Curvature Depending Functional in 2D* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. Sci. (4) 20 (1993), 247-297.
- [5] EVANS L.C., GARIEPY R.F. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Inc., 1992.
- [6] LEONARDI G.P., MASNOU S. *Locality of the mean curvature of rectifiable varifolds*. Submitted 2008 .
- [7] MANTEGAZZA C., *Su alcune definizioni deboli di curvatura per insiemi non orientati*. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Pisa, Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, Corso di Laurea in Matematica, Anno Accademico 1992-1993.
- [8] NITZBERG M., MUMFORD D., SHIOTA T., *Filterin, Segmentation and Depth*. Lecture Notes in Comput. Sci. 662, Springer (1993). MR 94h :92012 Zbl 0801.68171.
- [9] SCHÄTZLE R., *Lower semicontinuity of the Willmore functional for currents*, submitted.
- [10] SIMON L., *Lectures on Geometric Measure Theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Volume 3, 1983.
- [11] ZIEMER W.P., *Weakly Differentiable Functions*. Springer (1989). MR 91e :46046Zbl0692.46022.