

Université Pierre et Marie Curie

Rapport de Stage de Master

Alexis Blasselle

Points d'expériences robustes pour les
problèmes inverses

Stage réalisé au sein du Laboratoire Jacques-Louis Lions
Mars-Juillet 2008

Directeur de stage : Monsieur Yvon Maday

Fiche de synthese

- Type de stage : Stage de Master
- Année : 2008
- Formation : Mathématiques appliquées
- Titre du rapport : Points d'expériences robustes pour les problèmes inverses
- Organisme d'accueil : Université Pierre et Marie Curie
- Département : Laboratoire Jacques Louis-Lions
- Responsable de stage : Monsieur Yvon MADAY
- Mots-clés : Magic points, méthodes de bases réduites, problèmes inverses
- Thème : Analyse numérique et Equations aux dérivées partielles

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Yvon Maday, pour m'avoir acceptée en stage, pour sa patience face à mes questions et pour sa bonne humeur constante, ce malgré un emploi du temps qui ferait passer n'importe quel ministre pour hypoactif.

Je les adresse également à Frédéric Hecht, pour son aide en FreeFem++ et à Antoine Le Hyaric pour son attention à mes questions. Il me faut absolument dire un grand merci à Khashayar Dadras qui m'a tant aidée sur les différents serveurs informatiques.

Enfin, pour la partie mécanique, je tiens à exprimer ma gratitude à Hervé Le Dret, Patrick Le Tallec et Philippe G. Ciarlet.

J'ajoute un mot pour mes élèves de l'Ecole Polytechnique, à qui j'ai exposé un morceau de mes calculs afin de leur expliquer à quoi servait un lagrangien.

Robust points of experiments for inverse problems

Predicting the result of a measurement requires

- a model of the system under investigation,
- a physical theory linking the parameters of the model to the parameters being measured.

This prediction of observations, given the values of the parameters defining the model constitutes the *normal problem*, or, in the jargon of inverse problem theory, the forward problem. The *inverse problem* consists in using the results of actual observations to infer the values of the parameters characterizing the system under investigation.

In mechanical engineering, a typical inverse problem is to find some mechanical parameters, given some experiments on the considered material. These experiments consist in applying forces and measuring displacements, or on the contrary, applying displacements and measuring stresses. Intrinsically, the parameters are linked to forces and displacement by a given modelization that involves PDE'S.

One important issue in that kind of experiments is the noise on the measures. So our aim is to find some robust points of experiment, where one could apply forces (resp. displacements) and measure displacements (resp. forces) with the lowest impact of a possible noise.

Keywords : magic points / reduced-basis methods / inverse problems

Points d'expériences robustes pour les problèmes inverses

Prédire le résultat d'une mesure nécessite

- un modèle du système étudié
- une théorie physique permettant de lier les paramètres du modèle aux paramètres mesurés.

Connaissant les paramètres du modèle, le fait de prédire les valeurs d'observables constitue le *problème normal*, également appelé *problème direct* dans le jargon de la théorie des problèmes inverses. Le *problème inverse* consiste en l'utilisation des résultats d'expériences afin de reconstruire les paramètres caractérisant le système étudié.

En ingénierie mécanique, le problème inverse type consiste à trouver des paramètres mécaniques, connaissant des résultats d'expériences sur le matériau. Ces expériences consistent en l'application de forces et la mesure de déplacements, ou au contraire en l'application de déplacements et la mesure de contraintes. Intrinsèquement, les paramètres sont liés aux forces et aux déplacements par une modélisation donnée, qui contient des EDPs.

Une préoccupation importante dans ce genre d'expériences est le bruit sur les mesures. Notre but est donc de trouver des points d'expérience robustes, en lesquels on pourra appliquer des forces (resp. des déplacements) et mesurer des déplacements (resp. des forces) avec un impact le plus faible possible d'un bruit éventuel.

Mots-clés : magic points / méthodes de bases réduites / inverse problems

Table des matières

1	Exposé du problème	8
1.1	Modélisation	8
1.2	Les expériences	9
1.3	Formulation du problème	12
1.4	Voies d'étude	12
2	Robustesse des points d'expérience	14
2.1	Construction de la sensibilité à la mesure	14
2.2	Utilisation d'un lagrangien	15
2.3	Etude des dérivées de \mathcal{J}	16
2.4	Dérivées spatiales	18
2.5	Existence et unicité d'un minimum	18
3	Implémentation numérique	19
3.1	Remarques préliminaires	19
3.2	Résultats	19
3.3	Validation des résultats	21
3.4	Une interprétation possible	22
4	Les magic points	23
4.1	Bases réduites et magic points	23
4.2	Construction des points	23
5	Perspectives	27
A	Calcul direct	29
B	Méthode générale de construction des magic points	31
C	Reconstruction de paramètres	33

Notations utilisées

Modélisation

ξ champ de déplacement
 V espace des champs cinématiquement admissibles
 λ et μ , coefficients de Lamé, où μ est parfois appelé module de cisaillement
 Ω échantillon de peau
 $\partial\Omega$ frontière de Ω , n vecteur normal à cette frontière
 $\partial\Omega_N$ portion de la frontière avec conditions de Neumann (force imposée)
 $\partial\Omega_D$ portion de la frontière avec conditions de Dirichlet (déplacement imposé)
 (e_1, e_2) base orthonormale classique
 f_1, \dots, f_n seront les forces appliquées sur $\partial\Omega_N$, notées de façon générique \underline{F}_{surf}
 $\underline{\sigma}(\xi)$ désigne le tenseur des contraintes
 $\underline{\epsilon}(\xi)$ désigne le tenseur des déformations linéarisées
 n nombre de forces imposée
 p nombre de mesures de déplacements effectuées
 L , resp M , largeur de la tête d'indentation, resp. de mesure
 δL , resp. δM , distances de sécurité entre 2 expériences d'indentation, resp. entre deux mesures de déplacement
 $X = (x_1, \dots, x_n)$, resp. $Y = (y_1, \dots, y_p)$, vecteur contenant les coordonnées des points centraux d'applications des forces, resp. de mesures des déplacements
 γ_i domaine d'application de la i ème force, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$
 θ_j domaine où l'on effectue la j ème mesure, $\Theta = \bigcup_{j=1}^p \theta_j$
 $force(x)$ fonction scalaire modélisant l'intensité de la somme des forces appliquées
 $measure(x)$ fonction scalaire valant 1 sur Θ , le *domaine de mesure*
 J fonctionnelle de coût de la mesure
 \mathcal{J} fonction objectif à maximiser, définie à partir de J
 \mathcal{L} lagrangien utilisé pour le premier état adjoint, h état adjoint correspondant
 $L_0, L_\lambda, L_\mu, L_a$: formes linéaires sur V
 \mathbb{L} lagrangien utilisé pour les deux autres états adjoints, \tilde{v} et \tilde{w} états adjoints correspondant

Implémentation

Lg longueur de l'échantillon, $hauteur * Lg$ hauteur de l'échantillon
 $dcl * Lg$ longueur de peau inutilisée sur le bord de l'échantillon (fixation par les mords)
 N_P nombre de jeux de points utilisés dans les expériences de validation
 K matrice utilisée pour stocker les mesures de déplacements
 Δ écart relatif entre les véritables coefficients de Lamé et le résultat numérique

Magic points

\mathcal{R} espace des mouvements rigidifiants
 $\tilde{V} = V/\mathcal{R}$ espace quotient
 μ paramètre générique dans le cadre des bases réduites
 c_m zone d'application des forces à l'étape m
 $\langle \xi, p \rangle$ produit scalaire mécanique
 $\| \xi \|$ norme associée au produit scalaire mécanique utilisé
 q_j fonction de base numéro j
 $W_m = \text{Span}\{q_j, j = 1..m\}$ espace engendré à l'étape numéro m G matrice de Gram des fonctions ξ_j
 I_m interpolant sur W_m

Chapitre 1

Exposé du problème

On cherche à améliorer la façon de conduire des expériences d'indentation sur la peau, afin de rendre plus robuste la reconstruction de paramètres qu'elles permettent. Commençons, avant d'envisager comment résoudre le problème, par modéliser l'échantillon de peau puis l'expérience d'indentation.

1.1 Modélisation

Le choix d'un type de modélisation mécanique pour un matériau donné est souvent complexe; il l'est plus encore dans le cas de la peau, matériau vivant. Ce choix dépend tout d'abord de la nature et du cadre de l'étude, mais également de la partie à modéliser, de la taille caractéristique de l'échantillon, du type d'expérience éventuellement étudiée et bien entendu des motivations du mécanicien.

Nous travaillerons avec le modèle le plus simple qui soit : celui de l'élasticité linéaire dans le cadre de petites perturbations. Notre travail ne consistant pas en l'élaboration d'un modèle, nous voulons nous assurer de la validité de nos résultats dans un cas simple. On renvoie à [9] pour le détail des calculs menant aux équations que nous exposerons.

On travaillera sur un échantillon de peau représenté par un rectangle (modélisation 2D). Afin de rendre compte de la structure complexe et étagée de la peau, on distinguera plusieurs couches empilées. Nous noterons Ω ce domaine, ω_i la couche numéro i , numérotée en partant du haut, comme indiqué sur la figure. On considérera N_c couches de peau, aussi les coefficients de Lamé (λ, μ) appartiendront à un parallélépipède de \mathbb{R}^{2N_c} que nous désignerons par la lettre K dans la suite.

D'autre part, $\partial\Omega_N$ désignera la partie du contour où seront appliquées les forces, $\partial\Omega_D$ celle où le déplacement est nul (ou imposé). Afin d'être cohérent avec les notations utilisées dans le logiciel que nous emploierons, nous noterons 1 le bas du rectangle, 2 le côté droit, 3 le haut, et 4 le côté gauche. On a bien sûr $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$. \underline{n} sera la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Nous ferons usage de la notation tensorielle dans ce chapitre, elle sera abandonnée par la suite. Les notations seront les suivantes pour les grandeurs importantes :

- $\underline{\xi}$ est le déplacement, défini sur Ω
- λ et μ , coefficients de Lamé, où μ est parfois appelé module de cisaillement
- $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ seront les forces appliquées sur $\partial\Omega_N$, notées de façon générique \underline{F}_{surf}
- $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi})$ désigne le tenseur des contraintes

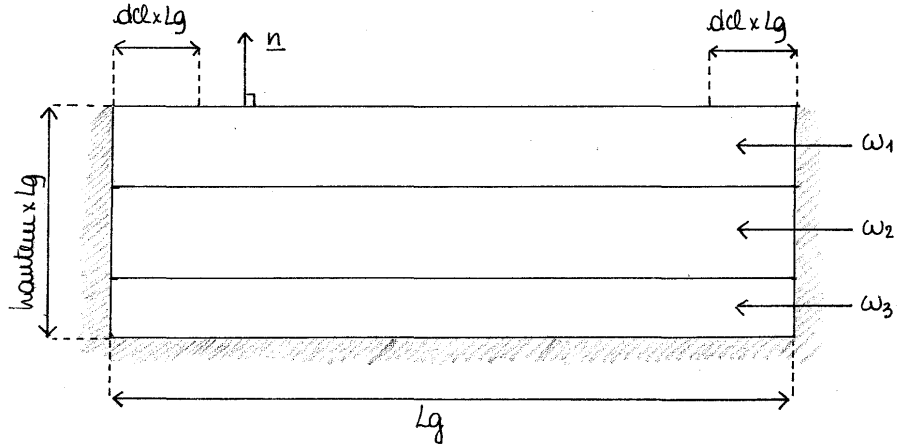


FIG. 1.1 – Schématisation de l'échantillon

- $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi})$ désigne le tenseur des déformations linéarisées

On supposera que la peau est fixée sur $\partial\Omega_D$ et que les forces sont appliquées sur $\partial\Omega_N$. Ceci justifie tout naturellement d'introduire comme espace des déplacements cinématiquement admissibles l'espace de Hilbert suivant :

$$V = \{\xi \in H^1(\Omega) / \xi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\} \quad (1.1)$$

On rappelle que l'on a, dans notre cadre de modélisation :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}^T) \quad (1.2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi}) + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\xi}))\underline{\underline{Id}} \quad (1.3)$$

Les équations de l'équilibre s'écrivent, pour un champ $\xi \in V$

$$\begin{cases} -\text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{F}}_{surf} \text{ sur } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (1.4)$$

Le système (1.4) est linéaire en la variable de déplacement $\underline{\xi}$, et sous des hypothèses convenables, on peut lui appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui nous fournit existence et unicité de la solution (voir [7]). D'autre part, sa résolution numérique peut se faire facilement en éléments finis.

1.2 Les expériences

L'expérience d'indentation Nous considérerons une simple expérience dite d'indentation (voir [5]). L'expérimentateur mécanicien impose une ou plusieurs forces surfaciques d'intensité(s) connue(s) sur le dessus de l'échantillon de peau, qui répond par un déplacement mesuré à la surface de la peau. La mesure du déplacement se fait en un nombre fini de points qui ne seront pas forcément les points d'application des forces. Le schéma ci-dessus représente une

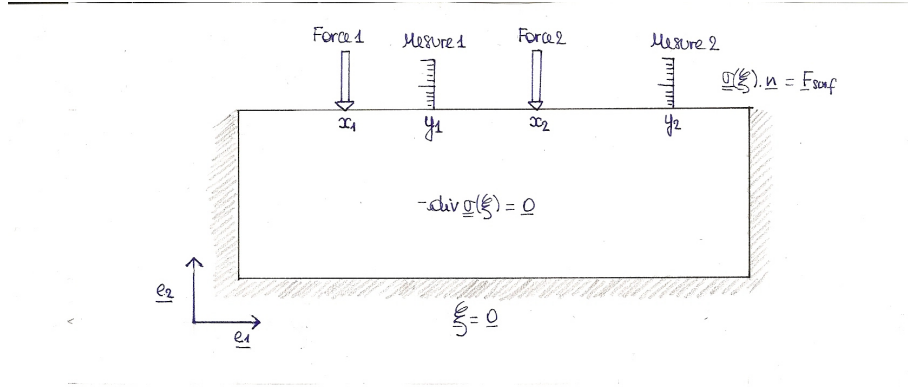


FIG. 1.2 – Schématisation de l'expérience d'indentation

telle expérience. On appellera points d'expérience d'une façon générale les points d'applications des forces et les points de mesures des déplacements.

Ce que l'on cherche à déterminer par ces expériences sont les coefficients de Lamé, λ et μ , inconnus pour un échantillon de peau donné. Leur détermination peut se faire numériquement grâce au jeu de données *force-déplacement* fourni par l'expérience. Ces données sont dites *surabondantes* au bord, en ce sens que le système (1.4) est modifié en le problème *mal posé* suivant, dont la résolution relève des problèmes inverses.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div} \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\xi} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n} = \underline{F}_{surf} \text{ sur } \partial\Omega_N \\ \underline{\xi} = \underline{\xi}_{mes} \text{ sur } \partial\Omega_{mes} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Points centraux d'applications Il nous faut à présent modéliser la force appliquée de façon pertinente. En réalité, l'expérimentateur n'applique pas une force surfacique sur tout le dessus de l'échantillon, mais plutôt un certain nombre de forces quasi-ponctuelles. Celles-ci sont appliquées au moyen d'une tête d'indentation de largeur L . Les déplacements sont mesurés au moyen d'un instrument de largeur M . On introduit dès à présent δ_L et δ_M , distances minimales à respecter entre deux indentations et deux mesures respectivement.

Nous considérerons que les forces sont centrées en des points de la surface notés dès à présent x_i , correspondant à la force \underline{f}_i . Les mesures s'effectuent de façon centrée en y_j . On notera n le nombre de forces appliquées et p le nombre de mesures de déplacements effectuées. D'autre part on notera Lg la longueur de l'échantillon de peau, *hauteur* le rapport hauteur sur longueur et *dcl* la fraction de peau libre à laisser de chaque côté de l'échantillon afin de permettre la fixation de l'échantillon.

Nous recherchons donc deux jeux de points $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\underline{Y} = (y_1, \dots, y_p)$ robustes pour la mesure. On imagine aisément que l'on a des contraintes d'appartenance pour chaque point :

$$\underline{X} \in \prod_{i=1}^n [X_i^{low}, X_i^{up}] \quad (1.6)$$

$$\underline{Y} \in \prod_{j=1}^p [Y_j^{low}, Y_j^{up}] \quad (1.7)$$

L'échantillon étant borné, il est important de noter que nous allons travailler sur des produits d'intervalles. Adoptons dès à présent les notations suivantes, afin de faciliter l'écriture des équations à venir.

$$\partial\Omega_N = \bigcup_{i=0}^n \gamma_i \text{ où } |\gamma_i| = L \quad \forall i \neq 0 \quad (1.8)$$

$$\partial\Omega_N = \bigcup_{j=0}^p \theta_j \text{ où } |\theta_j| = M \quad \forall j \neq 0 \quad (1.9)$$

γ_0 et θ_0 ne sont pas forcément connexes par arc et représentent respectivement le lieu où les forces appliquées sont nulles et où on ne mesure rien. γ_i et θ_j sont centrés respectivement en x_i et y_j .

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$$

$$\Theta = \bigcup_{j=1}^p \theta_j$$

Modélisation des forces Nous allons considérer que la force totale est la somme des forces élémentaires, ie :

$$force(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (1.10)$$

On prendra, pour la force d'indentation *élémentaire* le produit d'une fonction C^1 et d'une fonction caractéristique d'un intervalle. Cette force sera orientée selon le vecteur e_2 , normale au dessus de l'échantillon.

$$f_i(x) = -\left(\frac{2}{L}\right)^4 \left(x - x_i + \frac{L}{2}\right)^2 \left(x - x_i - \frac{L}{2}\right)^2 \chi_{[x_i-L/2; x_i+L/2]}(x) \quad (1.11)$$

Ceci semble à peu près justifié si l'on considère que la tête d'indentation est sphérique (circulaire pour nous). Nous aurons besoin de la dérivée de f_i par rapport à x_i . Un calcul relativement rapide nous donne

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 4 \left(\frac{2}{L}\right)^4 \left(x - x_i + \frac{L}{2}\right) \left(x - x_i - \frac{L}{2}\right) (x - x_i) \chi_{[x_i-L/2; x_i+L/2]}(x)$$

Modélisation de la mesure Nous allons prendre dans un premier temps, afin de modéliser la fonction scalaire correspondant à la mesure, des créneaux centrés en y_j et de largeur M . Appelons comme précédemment *mesure* cette fonction. On a donc très simplement

$$measure(x) = \sum_{j=1}^p \chi_{[y_j-M/2; y_j+M/2]}(x)$$

$$\frac{\partial measure}{\partial y_j}(x) = \delta_{y_j-M/2}(x) + \delta_{y_j+M/2}(x)$$

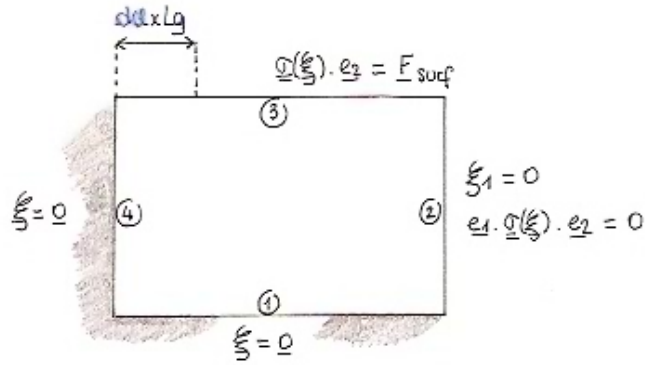


FIG. 1.3 – Travail sur le demi-échantillon

1.3 Formulation du problème

Comme nous l'avons donc évoqué, on cherche deux vecteurs, $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{Y} \in \mathbb{R}^p$, *centres* des forces et mesures. Nous pouvons immédiatement faire une remarque importante : vu la symétrie de l'échantillon par rapport à l'axe de vecteur directeur \underline{e}_2 passant par son centre, on s'attend, pour un jeu de forces symétrique donné, à une symétrie de la solution en ce sens que :

- s'il existe une unique solution $(\underline{X}_s, \underline{Y}_s)$, alors les points soient répartis de façon symétrique,
- s'il y a plusieurs solutions, chaque solution ait sa solution symétrique dans le jeu de solutions possibles.

Pour cette raison, nous travaillerons dans la suite avec un demi-échantillon, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Les conditions aux limites que nous prendrons sur le nouveau type d'interface créé sont les suivantes :

$$\xi_1 = \underline{\xi} \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$\underline{e}_2 \cdot \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot \underline{e}_1 = 0 \text{ forces tangentielles nulles} \quad (1.13)$$

De nombreux algorithmes ont été développés qui visent à retrouver les coefficients de Lamé, aussi nous ne nous occuperons pas de la partie concernant la résolution du problème inverse. Notre question sera la suivante : sachant que l'expérimentateur applique des forces de la façon décrite plus haut, où appliquer ces forces et mesurer le déplacement pour déterminer ensuite les coefficients de Lamé de la façon la plus robuste qui soit ?

1.4 Voies d'étude

L'idée originelle est d'utiliser les magic points au sein des méthodes de base réduite afin de trouver nos points d'expérience optimaux comme points d'interpolation optimaux. On va donc considérer les coefficients de Lamé comme paramètres dans (1.4), construire à partir de cela une base réduite et trouver des magic points, exactement comme décrit dans [2] ou dans l'appendice de [4].

Afin d'adapter au mieux cette méthode, voilà ce que nous devons entreprendre. Tout d'abord, construire une *fonction coût* qui rende compte de la qualité de l'approximation réalisée en choisissant de résoudre le problème inverse avec des mesures effectuées en les points choisis. Puis il nous faudra choisir les forces \underline{F}_{surf} les plus pertinentes à appliquer dans (1.4) pour calculer les fonctions de la base réduite.

Nous devons garder à l'esprit que le processus de construction des magic points est basé sur l'idée que l'on sélectionne les paramètres et lieux qui maximisent l'erreur que l'on peut faire en représentant un élément de l'espace originel par une approximation appartenant à un espace de dimension finie.

Cependant, nous allons tout d'abord tenter de raisonner de façon indépendante et tenter de cerner ce que représente la robustesse de points d'expérience.

Chapitre 2

Robustesse des points d'expérience

Tout d'abord, récrivons notre problème inverse (on omet à présent les traits désignant vecteurs et tenseurs). On regarde le cas général où la mesure des déplacements ne se fait pas forcément aux points d'application des forces. Il consiste à trouver (λ, μ) tels qu'existe un champ $\xi = \xi(\lambda, \mu) \in V$ tels que :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\epsilon(\xi) + \lambda(\operatorname{div}\xi)Id) = 0 \text{ dans } \Omega \\ 2\mu\epsilon(\xi).n + \lambda(\operatorname{div}\xi)n = F_{surf} \text{ sur } \partial\Omega_N \\ \xi = \xi_{mes} \text{ sur } \partial\Omega_{mes} \end{cases} \quad (2.1)$$

On rappelle que V est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, défini en (1.1). On n'a pas de résultat d'existence et d'unicité pour ce problème sans hypothèses particulières. On suppose seulement qu'il existe, pour un échantillon de peau donné, un couple de coefficients de Lamé, hypothèse qui peut être physiquement fautive si la modélisation n'est pas satisfaisante.

2.1 Construction de la sensibilité à la mesure

Etudions à présent ce que signifie la robustesse d'un jeu de points d'expériences $(\underline{X}, \underline{Y})$. Nous recherchons donc un *jeu de domaines* robustes pour la mesure, en ce sens qu'une petite erreur dans la mesure des déplacements (ou des forces imposées, mais le raisonnement sera le même) permette de retrouver un couple (λ, μ) assez proches des bonnes valeurs. En d'autres termes, on cherche un jeu de points tels que le gradient de *la mesure de déplacement* en (λ, μ) soit le plus grand possible.

Regardons tout d'abord ce qui se passe sur le problème direct correspondant à (2.1). Ici on cherche $\xi = \xi(\lambda, \mu) \in V$ vérifiant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\epsilon(\xi) + \lambda(\operatorname{div}\xi)Id) = 0 \text{ dans } \Omega \\ 2\mu\epsilon(\xi).n + \lambda(\operatorname{div}\xi)n = F_{surf} \text{ sur } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (2.2)$$

On aimerait trouver les points d'expérience tels que la mesure de déplacement dépende de façon très *forte* de (λ, μ) . Mais comme ces deux paramètres sont variables, nous allons considérer le cas pire. Aussi, en notant J la fonctionnelle de coût de la mesure définie comme :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_{\theta_j} (\xi(\lambda, \mu).n)^2 ds \quad (2.3)$$

On cherche en réalité

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \operatorname{argmax}_{(\underline{X}, \underline{Y})} \inf_{(\lambda, \mu)} \frac{1}{2} \|\nabla_{(\lambda, \mu)} J\|^2 \quad (2.4)$$

Notre fonction objectif est donc la suivante, nous la notons \mathcal{J} afin de rester cohérent avec les notations habituelles de l'optimisation :

$$\boxed{\mathcal{J}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \|\nabla_{(\lambda, \mu)} J\|^2} \quad (2.5)$$

Le choix de la norme du gradient sera précisé plus tard. Il nous faut trouver les dérivées de \mathcal{J} par rapport aux coefficients de Lamé. Nous allons pour cela utiliser un lagrangien (le calcul direct ne donne rien d'exploitable).

2.2 Utilisation d'un lagrangien

On utilise un lagrangien pour déterminer les dérivées de J par rapport aux coefficients de Lamé. On prend

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, \xi, p) = J(\xi) + A(\lambda, \mu, \xi, p) - L_0(p)$$

On sait alors que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}$ nous redonne l'équation (2.2). $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}$ nous donneront le gradient de J .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \xi)(\operatorname{div} p) = L_{\lambda}(\xi)(p) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(p) = L_{\mu}(\xi)(p) \end{aligned}$$

La stationnarité du lagrangien fournit l'équation vérifiée par $p = h \in V$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}, w \right\rangle = A(\lambda, \mu, w, h) + \sum_{j=1}^p \int_{\theta_j} (w \cdot n)(\xi \cdot n) ds \quad (2.6)$$

D'où le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(h) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma(h) \cdot n = -(\xi \cdot n)n \text{ sur } \Theta \\ \sigma(h) \cdot n = 0 \text{ sur } \theta_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

L'état adjoint, élément de V , vérifie la formulation variationnelle suivante : $\forall q \in V$

$$\int_{\Omega} 2\mu \epsilon(h) : \epsilon(q) + \lambda (\operatorname{div} h)(\operatorname{div} q) = - \sum_{j=1}^p \int_{\theta_j} (\xi \cdot n)(q \cdot n) ds \quad (2.8)$$

On sait d'autre part que

$$J(\xi(\lambda, \mu)) = \mathcal{L}(\lambda, \mu, \xi(\lambda, \mu), p)$$

Lorsque l'on dérive, le choix de $p = h$ annule $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}$. On a finalement

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \xi)(\operatorname{div} h) \\ \frac{\partial J}{\partial \mu} &= \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(h)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{J}(\lambda, \mu, \xi(\lambda, \mu)) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} h \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(h) \right)^2} \quad (2.9)$$

On sait donc à présent calculer $\mathcal{J}(\lambda, \mu, \xi(\lambda, \mu))$. Récapitulons les formulations variationnelles déjà obtenues : (2.2) et (2.8) peuvent se mettre sous la forme :

$$A(\lambda, \mu, \xi, u) = L_0(u) \quad (2.10)$$

$$A(\lambda, \mu, h, q) = L_a(\xi)(q) \quad (2.11)$$

et nous introduisons dès à présent les notations suivantes :

$$\begin{aligned}A(\lambda, \mu, u, v) &= \int_{\Omega} 2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v) \\ L_0(h) &= \int_{\partial\Omega_N} F_{surf} \cdot h ds \\ L_{\lambda}(\xi)(v) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \xi)(\operatorname{div} v) \\ L_{\mu}(\xi)(w) &= \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(w) \\ L_a(\xi)(w) &= - \sum_{j=1}^p \int_{\theta_j} (\xi \cdot n)(w \cdot n) ds\end{aligned}$$

A est une forme quadrilinéaire, les L sont des formes linéaires, définies en prenant les formulations variationnelles. Etudions à présent comment trouver

$$\mathcal{J}(\lambda_0, \mu_0, \xi(\lambda_0, \mu_0)) = \min_{\lambda, \mu} \mathcal{J}(\lambda, \mu, \xi(\lambda, \mu))$$

2.3 Etude des dérivées de \mathcal{J}

Un deuxième problème d'optimisation s'offre à présent à nous : trouver les dérivées de \mathcal{J} par rapport à (λ, μ) ou du moins trouver l'expression de \mathcal{J} en son point de minimum. Voyons si l'introduction d'un nouveau lagrangien peut nous aider. On a cette fois deux arguments supplémentaires dans le lagrangien, h et w , éléments de V , car on relâche la contrainte sur l'équation vérifiée par h . Prenons :

$$\mathbb{L}(\lambda, \mu, \xi, h, v, w) = \mathcal{J}(\lambda, \mu, \xi, h) + A(\lambda, \mu, \xi, v) - L_0(v) + A(\lambda, \mu, h, w) - L_a(\xi)(w) \quad (2.12)$$

Déterminons l'état adjoint (\tilde{v}, \tilde{w}) . Celui-ci annule les dérivées partielles par rapport à ξ et h , $\forall m, p \in V$:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \xi}, m \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi}, m \right\rangle - L_a(m)(\tilde{w}) + A(\lambda, \mu, m, \tilde{v}) = 0 \\ \left\langle \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial h}, p \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h}, p \right\rangle + A(\lambda, \mu, p, \tilde{w}) = 0\end{aligned}$$

On a, en revenant à l'expression de \mathcal{J} :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi}, m \right\rangle &= \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} m \operatorname{div} h \right) \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} h \right) + \left(\int_{\Omega} 2\epsilon(m) : \epsilon(h) \right) \left(\int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(h) \right) \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h}, p \right\rangle &= \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} p \right) \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} h \right) + \left(\int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(p) \right) \left(\int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(h) \right)\end{aligned}$$

Ce que nous pouvons noter, en utilisant les notations déjà introduites :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi}, m \right\rangle &= L_{\lambda}(m)(h)L_{\lambda}(\xi)(h) + L_{\mu}(m)(h)L_{\mu}(\xi)(h) \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h}, p \right\rangle &= L_{\lambda}(\xi)(p)L_{\lambda}(\xi)(h) + L_{\mu}(\xi)(p)L_{\mu}(\xi)(h)\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression de la formulation variationnelle vérifiée par (\tilde{v}, \tilde{w}) , pour tout champs r et s dans V :

$$A(\lambda, \mu, \tilde{w}, r) = -L_{\lambda}(r)(\xi)L_{\lambda}(\xi)(h) - L_{\mu}(r)(\xi)L_{\mu}(\xi)(h) \quad (2.13)$$

$$A(\lambda, \mu, \tilde{v}, s) = L_a(s)(\tilde{w}) - L_{\lambda}(s)(h)L_{\lambda}(\xi)(h) - L_{\mu}(s)(h)L_{\mu}(\xi)(h) \quad (2.14)$$

Dérivons à présent par rapport à λ et μ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \xi, h, v, w) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} h \operatorname{div} w + \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} v \\ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \xi, h, v, w) &= \int_{\Omega} 2\epsilon(h) : \epsilon(w) + \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(v)\end{aligned}$$

L'évaluation de ces dérivées en l'état adjoint nous donne l'expression des dérivées de \mathcal{J}

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \xi, h) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} \tilde{v} + \int_{\Omega} \operatorname{div} h \operatorname{div} \tilde{w} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \xi, h) = \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(\tilde{v}) + \int_{\Omega} 2\epsilon(h) : \epsilon(\tilde{w}) \quad (2.16)$$

A ce stade, une petite discussion est nécessaire. Il est clair que ces équations ne permettent pas de déterminer directement le couple de coefficients de Lamé qui minimisera \mathcal{J} . Cependant, deux remarques s'imposent :

- nous pouvons toujours choisir un couple de coefficients pertinents après quelques évaluations de \mathcal{J} et connaissant les valeurs moyennes pour la peau (voir [5]). Ceci permettra de passer à l'étape d'optimisation en $(\underline{X}, \underline{Y})$
- nous pouvons malgré tout utiliser un algorithme type gradient pour la détermination de $\inf_{(\lambda, \mu)} \mathcal{J}$.

2.4 Dérivées spatiales

Imaginons que nous ayons trouvé le couple de coefficients de Lamé du *cas pire*, c'est-à-dire qui minimisent \mathcal{J} . Exprimons à présent les dérivées de \mathcal{J} par rapport aux vecteurs \underline{X} et \underline{Y} .

On introduit donc un lagrangien (encore un). A présent que λ et μ sont fixés, on notera de façon plus simple $A(u, v) = A(\lambda, \mu, u, v)$ avec A forme quadrilinéaire définie précédemment. Nous ferons le même abus de notation avec \mathcal{J} .

$$L(\xi, h, v, w) = \mathcal{J}(\xi) + A(\xi, v) - L_0(v) + A(h, w) - L_a(\xi)(w)$$

Il est évident en regardant la définition du lagrangien de la section précédente (2.12) que nous allons devoir considérer exactement le même état adjoint, que nous avons noté (\tilde{v}, \tilde{w}) . La dépendance de L en \underline{X} apparaît explicitement dans L_0 , celle en \underline{Y} dans L_a . Calculons les dérivées de L par rapport à ces deux vecteurs.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= - \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial force(x)}{\partial x_i} v \cdot e_2 ds \\ \frac{\partial L}{\partial y_j} &= \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial mesure(x)}{\partial y_j} [(\xi \cdot n)(w \cdot n)] ds \end{aligned}$$

L'évaluation de ces dérivées en l'état adjoint (\tilde{v}, \tilde{w}) nous fournit les dérivées de \mathcal{J} par rapport à chacune des composantes du domaine.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i} = - \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial force(x)}{\partial x_i} \tilde{v} \cdot e_y ds} \quad (2.17)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y_j} = \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial mesure(x)}{\partial y_j} [(\xi \cdot n)(\tilde{w} \cdot n)] ds} \quad (2.18)$$

2.5 Existence et unicité d'un minimum

Tout d'abord, nous tachons d'optimiser sur un espace de dimension finie, et notre variable (X, Y) appartient à un ensemble convexe car chaque composante appartient à un intervalle.

Ensuite, les forces d'indentation et la fonction de mesure dépendant continûment des points d'expérience. Enfin, le théorème de Lax-Milgram nous donnant la continuité de la solution par rapport aux données, on peut conclure que les champs ξ et h dépendent eux aussi continûment des points.

On peut donc conclure que J dépend continûment de (X, Y) . Notre problème étant donc l'optimisation d'une fonction continue sur un compact (convexe) en dimension finie, nous savons qu'il admet une solution.

Chapitre 3

Implémentation numérique

Nous décrivons ici succinctement l'implémentation numérique de la recherche de points d'expérience décrite dans le chapitre précédent.

3.1 Remarques préliminaires

Lors d'une expérience d'indentation, il est extrêmement fréquent de mesurer le déplacement à l'endroit où on a imposé la force. Nous considérerons aussi par la suite que points d'application des forces et points de mesures sont confondus, même si nous avons commencé par implémenter le cas général. Cela signifie concrètement $X = Y$.

Avant de commencer réellement à implémenter la méthode de gradient, nous allons tacher d'évaluer notre fonction objectif en un certain nombre de points, afin de visualiser son allure et de choisir judicieusement la condition initiale de notre algorithme. Pour cela, nous avons choisi seulement deux points d'expérience sur notre domaine, ce qui représentera quatre points au final puisque nous travaillons sur le demi-échantillon. Pour chaque point d'expérience, nous avons divisé l'intervalle d'appartenance en intervalles de longueurs égales puis évalué la fonction objectif aux noeuds. Quelques résultats sont présentés ci-dessous.

On a représenté sur l'axe horizontal l'intervalle de variation du premier point d'expérience, celui qui est le plus proche du bord de l'échantillon, sur l'axe vertical le deuxième. On constate que la fonction objectif est loin d'être convexe et présente des variations importantes. Cependant, on constate systématiquement que les meilleurs points d'expérience se situent près de la limite supérieure pour le point gauche, près de la limite inférieure pour le point droit.

Rappelons que le repérage d'un point situé sur le dessus de l'échantillon se fait au moyen d'un paramètre compris entre 0 et 1. Nous avons pris comme intervalles d'appartenance pour le couple de points d'expérience cherchés $[0.1, 0.45] * [0.55, 0.9]$.

La figure suivante présente les valeurs de la fonction pour une discrétisation de 15 points par points de tout l'intervalle d'appartenance des points.

3.2 Résultats

La convergence par la méthode de gradient est malaisée en raison de la forme de la fonction. Néanmoins, en choisissant bien la condition initiale, on obtient bien un résultat. Les meilleurs points semblent donc être très près de la limite supérieure pour le premier et

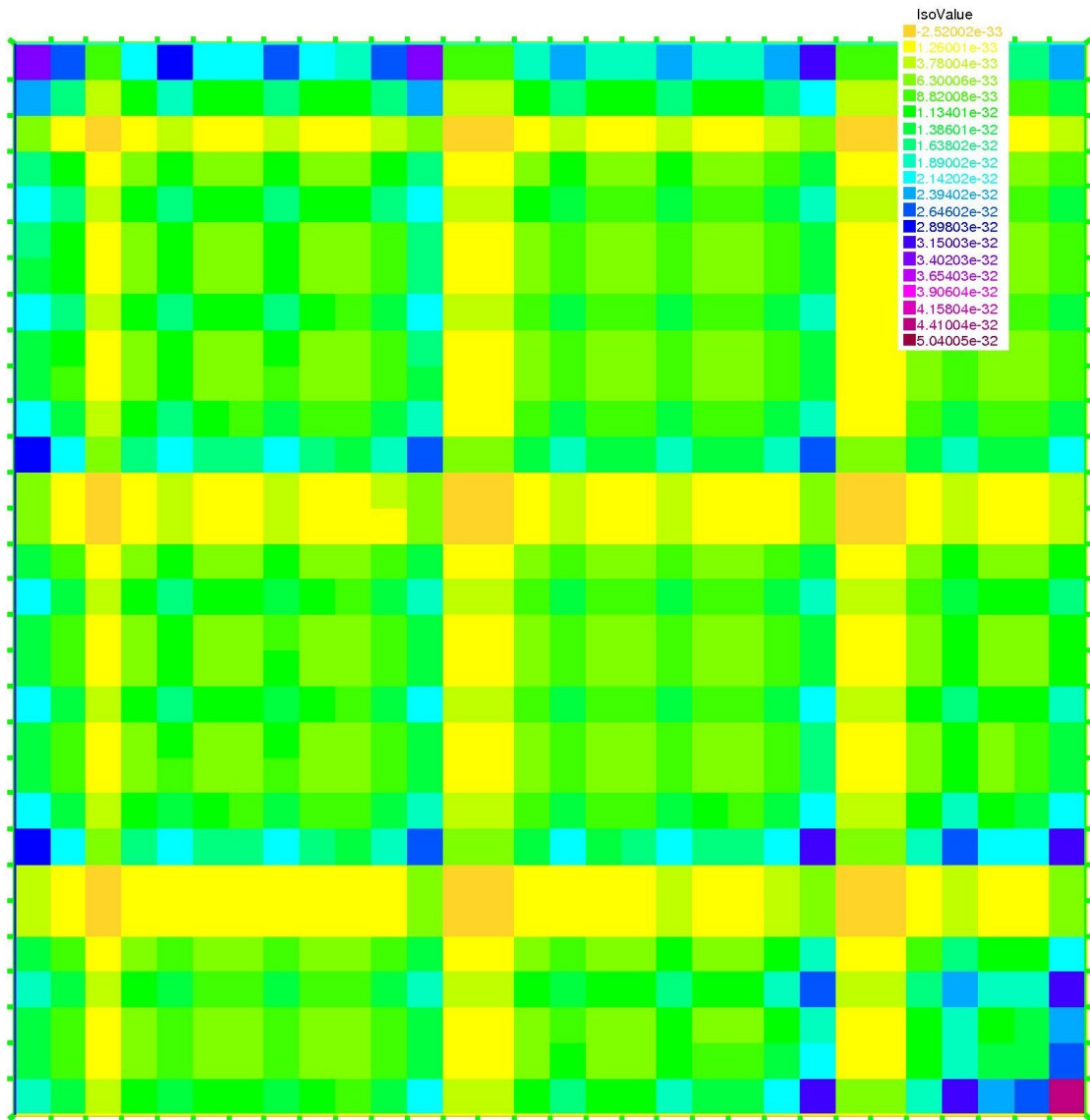


FIG. 3.1 – Fonction objectif

de la limite inférieure pour le second. Aussi, comme $X = (X_1, X_2) \in [0.1, 0.45] * [0.55, 0.9]$, on obtient $X_1 \approx 0.45$ et $X_2 \approx 0.55$.

Notons que l'autre couple extrême, c'est-à-dire $(0.1, 0.9)$ donne d'assez bons résultats également. Le fait d'obtenir ainsi deux points relativement proches nous incite à croire que l'algorithme tend à rapprocher les points d'expérience, afin de créer des couples proches. On peut ainsi postuler que c'est l'interaction possible entre deux points d'expérience qui conférerait une certaine robustesse.

Ceci est confirmé par l'utilisation de l'algorithme pour la recherche d'un point d'expérience seulement sur le demi-domaine (donc 2 sur le domaine complet). Nous trouvons que le point optimal est situé en 0.9, c'est-à-dire tend à se rapprocher de son point *miroir* dans le demi-domaine.

3.3 Validation des résultats

Comme déjà signalé auparavant, une façon très simple de mesurer la robustesse des points d'expérience testés est de simuler une reconstruction de coefficients de Lamé par une *fausse* méthode de problèmes inverses. Voici la démarche de cette validation.

On fixe un couple de coefficients de Lamé considérés comme les vrais coefficients. On choisit au hasard $N_P - 1$ jeux de 2 points d'expériences et construisons la matrice de taille $2 * N_P$ notée H contenant les coordonnées de ces points et les coordonnées des points optimaux déterminés. Pour chaque jeu de points d'expérience, on calcule numériquement la solution ξ du problème direct (2.2), et *mesurons* le déplacement en ces points, c'est-à-dire, avec $X = Y$ et $i = 1, 2$

$$\int_{x_i - M/2}^{x_i + M/2} \xi.nds$$

Nous stockons ces mesures dans une autre matrice de taille $2 * N_P$ notée K .

A présent, choisissant une donnée initiale de coefficients de Lamé, bien évidemment différents des coefficients réels, nous allons tâcher de retrouver le plus rapidement possible les véritables valeurs de ces coefficients par la méthode décrite en annexe C. Ces points ont été déterminés afin d'être robustes au bruit éventuel présent sur les mesures. Nous devons donc introduire des perturbations sur les mesures, d'intensité variables, afin de pouvoir comparer la qualité des points de façon pertinente. Ceci est fait au moyen d'une fonction aléatoire disponible en FreeFem++.

Après un nombre probablement trop peu élevé d'expériences, il s'avère que les points trouvés donnent un efficacité de reconstruction légèrement meilleure dans certains cas, comparable à d'autres couples dans beaucoup d'autres, légèrement inférieure dans d'autres cas. Ce que nous nommons par *cas* est un choix de conditions initiales. Si nous partons d'une condition initiale sur λ supérieure à la valeur recherchée, la convergence est très lente et nos points ne sont pas meilleurs que les autres.

Cependant, lorsque le choix de la condition initiale rend les points déterminés meilleurs que les autres points (convergence plus rapide vers la solution), alors le fait d'augmenter le bruit sur la mesure les rend encore meilleurs, ce qui tend à prouver une certaine robustesse. L'expérience suivante rend compte de ce phénomène. Pour deux conditions initiales dans lesquelles nos points s'avéraient meilleurs, nous avons bruité de plus en plus et étudié les efficacités relatives des couples de points.

Notant $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ nos paramètres véritables, (λ_0, μ_0) notre conditions initiale et (λ, μ) les coefficients courants dans l'algorithme, nous définissons la quantité Δ par le rapport :

$$\Delta = \sqrt{\frac{(\tilde{\lambda} - \lambda)^2 + (\tilde{\mu} - \mu)^2}{\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\mu}^2}} \quad (3.1)$$

Afin de comparer notre couple de points à d'autres couples choisis aléatoirement, nous avons effectué la moyenne des Δ , et étudié la différence entre Δ de nos points et Δ moyen, soit $\Delta(\text{moyenne}) - \Delta(\text{points robustes})$. Le tableau suivant présente ces résultats. Le test 1 a été effectué avec une condition initiale $(\lambda_0, \mu_0) = (4, 5.10^6, 3.10^5)$, le test 2 avec $(\lambda, \mu) = (4, 2.10^6, 2, 95.10^5)$. Les coefficients véritables sont $\tilde{\lambda} = 4, 74263.10^6$ et $\tilde{\mu} = 302721$.

Bruit	test 1	test 2
0	$9, 26617.10^{-6}$	$2, 10898.10^{-4}$
0,05	$4, 75436.10^{-5}$	$3, 90033.10^{-4}$
0,1	$8, 32089.10^{-5}$	$5, 44157.10^{-4}$
0,15	$1, 16252.10^{-4}$	$6, 73129.10^{-4}$
0,2	$1, 46663.10^{-4}$	$7, 76833.10^{-4}$

On observe bien que la qualité de nos points par rapport à la moyenne des points pris au hasard augmente avec le bruit. Nous présentons deux séries de résultat mais en avons effectué bien plus.

Malgré cela, nous ne pouvons expliquer pourquoi certains choix de conditions initiales rendent nos points comparables aux autres. Plusieurs raisons peuvent être envisagées :

- L'idée de base d'optimisation du gradient n'était pas bonne ;
- l'idée de base est bonne mais nous avons négligé un paramètre ;
- les expériences numériques n'ont pas été correctement menées : nombre insuffisant d'itérations, paramètres mal choisis, algorithmes trop simplistes...
- une erreur d'implémentation a été commise dans le code.
- ou encore l'interprétation présentée au paragraphe suivant.

3.4 Une interprétation possible

Tout algorithme de reconstruction de paramètres se réduit souvent à la minimisation d'une fonctionnelle de coût \mathbb{G} , ce qui nécessite le calcul de ses dérivées partielles par rapport à λ et μ . Or si nous comparons les dérivées partielles de la fonctionnelle de coût choisie pour le problème inverse dans l'annexe C et la fonctionnelle de coût \mathcal{J} utilisée précédemment pour trouver les points optimaux, nous observons que, bien que mathématiquement différentes (l'état adjoint nécessité n'est pas le même), ces dérivées peuvent être numériquement proches.

Aussi, optimisant la norme du gradient de \mathcal{J} , il se peut que nous ayons optimisé quelque peu l'autre sans le vouloir. Or nous ne connaissons pas a priori la dépendance de la fonctionnelle \mathbb{G} en λ et μ . Si elle est non convexe et que nous partons d'une mauvaise condition initiale, les points d'expérience donnant la plus grande pente de gradient peuvent nous conduire à partir plus vite dans une mauvaise direction, vers un minimum local.

Chapitre 4

Les magic points

Nous allons à présent tacher d'utiliser une méthode qui, bien qu'elle soit relativement récente, a fait ses preuves en terme d'efficacité et d'économie de calcul : l'utilisation des *magic points* couplée à un cadre de bases réduites. Exposons tout d'abord le principe général de ces deux méthodes.

4.1 Bases réduites et magic points

Considérons un jeu de problèmes (P_μ) types 'EDP', dépendant d'un paramètre générique noté (malheureusement pour nous) μ appartenant à un ensemble K . Etant donné un échantillonnage discret $K_d = \{\mu_i, i = 1..s\}$ de K , on suppose savoir calculer les solutions $\xi_i = \xi(\mu_i)$ de (P_{μ_i}) pour $\mu_i \in K_d$. La méthode des bases réduites consiste à chercher la solution générique $\xi = \xi(\mu)$ dans

$$\text{Span} \{\xi_i, i = 1..s\}$$

Les magic points sont des points d'interpolation optimaux. Ils sont construits comme les lieux où l'erreur entre une fonction et son approximation par une combinaison linéaire de fonctions de base est la plus grande possible, ie on prend les points où $\|\xi - P(\xi)\|$ est maximum, avec $P(\xi)$ projection de ξ sur un espace de dimension finie. Cette construction se couple aisément à celle d'une base réduite, pour plus de précisions voir [2] ou l'annexe B.

4.2 Construction des points

Nous allons à présent construire une base réduite de déplacements en tachant de la prendre la plus pertinente possible. Nous allons suivre le type de construction résumé dans l'annexe B et décrit en détail dans [2].

Produit scalaire Désignons par \mathcal{R} l'espace des mouvements rigidifiants définis sur notre domaine, et par $\tilde{V} = V/\mathcal{R}$ le quotient de V par cet espace. Alors on peut définir un produit scalaire de la façon suivante : $\forall \xi, p \in \tilde{V}$

$$\langle \xi, p \rangle = \int_{\Omega} \text{div } \xi \text{ div } p + 2 \int_{\Omega} \epsilon(\xi) : \epsilon(p) \quad (4.1)$$

Nous utiliserons ce produit scalaire par la suite, et toute indication de norme sans précision désignera la norme associée à ce produit scalaire.

Etape 1 : initialisation On choisit μ_1 et x_1 convenables (nous reviendrons sur la définition de 'convenable'). On note par f_1 la force centrée en x_1 et on désignera par c_1 la zone centrée en x_1 et de largeur L . On calcule $\xi_1 = \xi(\mu_1, c_1) \in V$ solution de

$$\begin{cases} -div(\sigma(\xi_1)) = 0 \text{ dans } \Omega \\ e_2 \cdot \sigma(\xi_1) \cdot e_2 = f_1 \text{ sur } c_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec les coefficients de Lamé correspondants. On prend alors

$$q_1(x) = \frac{\xi_1(x)}{\|\xi_1\|} \quad (4.3)$$

$$\mu_2 = \operatorname{argmax}_{\mu \in K_d^*} \inf_{z \in W_1} \|\xi(\mu, c_1) - z\| \quad (4.4)$$

L'avantage de ce choix de normes est que nous allons pouvoir calculer de façon exacte la valeur de l'inf dans (4.4)

où $W_m = \operatorname{Span}\{q_j, j = 1..m\}$ désignera l'espace vectoriel de dimension m engendré par les fonctions de la base réduite et où le choix de μ_2 dans (4.4) se fait dans K_d^* qui désigne le sous-espace de K_d pertinent : ici il s'agit de $K_d \setminus \{\mu_1\}$. L'avantage de ce choix de normes est que nous allons pouvoir calculer de façon exacte la valeur de l'inf dans (4.4), nous allons voir de quelle façon.

Etape 2 Présentons le deuxième stade de la construction avant de passer à l'étape générique. On calcule à présent

$$\xi_2 = \xi(\mu_2, c_1) \quad (4.5)$$

solution du système (4.2) de l'élasticité linéaire mais dans laquelle on a pris μ_2 pour coefficients de Lamé. Ceci nous assure l'indépendance entre ξ_1 et ξ_2 .

On définit alors a_1^1 et r_2 par

$$\xi_2(x_1) = a_1^1 q_1(x_1) \quad (4.6)$$

$$r_2(x) = \xi_2(x) - a_1^1 q_1(x) \quad (4.7)$$

On prend le deuxième point 'magique' et la deuxième fonction de base de la façon suivante :

$$x_2 = \operatorname{argmax}_{x \in \partial\Omega_N} \|r_2(x)\|_{\mathbb{R}^2} \quad (4.8)$$

$$q_2(x) = \frac{r_2(x)}{\|r_2\|} \quad (4.9)$$

On définit à présent c_2 comme l'union de c_1 et d'une zone centrée en x_2 et de largeur L .

$$\mu_3 = \operatorname{argmax}_{\mu \in K_d^*} \inf_{z \in W_2} \|\xi(\mu, c_2) - z\| \quad (4.10)$$

Etape générique m

$$\mu_m = \operatorname{argmax}_{\mu \in K_d^*} \inf_{z \in W_{m-1}} \| \xi(\mu, C_{m-1}) - z \| \quad (4.11)$$

$$\xi_m = \xi(\mu_m, c_{m-1}) \quad (4.12)$$

$$\xi_m(x_i) = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^{m-1} q_j(x_i) \quad \forall i = 1..m-1 \quad (4.13)$$

Et toujours de la même façon

$$r_m(x) = \xi_m(x_i) - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^{m-1} q_j(x) \quad (4.14)$$

$$x_m = \operatorname{argmax}_{x \in \partial\Omega_N} \| r_m(x) \|_{\mathbb{R}^2} \quad (4.15)$$

$$q_m(x) = \frac{r_m(x)}{r_m(x_m)} \quad (4.16)$$

On définit c_m comme l'union de c_{m-1} et d'une zone centrée en x_m .

Toutes les fonctions ξ_j sont calculées avec des coefficients de Lamé différents et pour des forces différentes dès l'étape 2, ce qui nous garantit l'indépendance des fonctions. On a donc les mêmes résultats pour notre base réduite que ceux explicités dans [2].

Minimum du produit scalaire Calculons le minimum exprimé dans (4.11). En effet, le choix d'une norme associée au produit scalaire, le produit défini en (4.1), nous permet d'avoir une expression explicite. Adoptons des notations générales indépendantes des précédentes, afin de souligner que ce calcul est indépendant de la forme de notre problème. On cherche donc $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ permettant d'obtenir

$$\inf \| \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \| \quad (4.17)$$

Exprimant les conditions nécessaires du premier ordre, nous obtenons immédiatement que l'on doit avoir, $\forall k = 1..n$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \xi_i, \xi_k \rangle = \langle \xi_{n+1}, \xi_k \rangle \quad (4.18)$$

Notant G la matrice de Gram des fonctions ξ_i , définie par $G_{i,j} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, et C le vecteur de taille n défini par $C_i = \langle \xi_{n+1}, \xi_i \rangle$ on obtient donc

$$\tilde{\Lambda} = G^{-1}C \quad (4.19)$$

Et on obtient donc facilement que l'inf vaut $\langle \xi_{n+1}, \xi_{n+1} - \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \xi_i \rangle$.

Interpolant Ainsi, en considérant la matrice inversible $B = (B_{i,j}) = (q_j(x_i))$ on peut facilement construire un interpolant I_m sur W_m tel que $\forall u \in V$, où V est l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles.

$$I_m(u) = \sum_{k=1}^m z_k^m q_j \quad (4.20)$$

$$u(x_i) = \sum_{k=1}^m z_k^m q_j(x_i) \quad \forall i = 1..m \quad (4.21)$$

On obtient facilement les coefficients z_k^m à partir des valeurs de u aux noeuds et de B^{-1} .

Evaluation de la qualité des points Il suffit d'utiliser la méthode de *faux problème inverse* présentée précédemment.

Chapitre 5

Perspectives

Il serait quelque peu présomptueux d'intituler ce paragraphe *Conclusion*, dans la mesure où ce rapport de stage amène plus de questions que de réponses. Cependant, commençons par dresser un bilan de ce que nous avons trouvé, avant de voir les multiples perspectives ouvertes.

Nous avons considéré comme critère de qualité d'un jeu de points d'expériences la vitesse de convergence qu'il permet. Les points déterminés semblent être plus robustes, dans la mesure où ils permettent une meilleure convergence pour certains choix de conditions initiales (meilleure qualité), et que cette qualité augmente avec l'intensité du bruit sur la mesure. Il semble, d'autre part, que la robustesse soit, au moins partiellement, due aux interactions possibles entre deux points d'expériences, car l'algorithme tend à créer des couples de points.

Concernant la méthode des magic points dans le cadre des bases réduites, nous avons trouvé que l'utilisation d'un produit scalaire sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pouvait rendre l'implémentation beaucoup plus aisée.

Les perspectives ouvertes sont les suivantes :

- Comprendre pourquoi la qualité des points dépend du choix de la condition initiale,
- réaliser plus d'expériences numériques,
- chercher les magic points,
- de façon plus large, étoffer la modélisation : autre forme de domaine, autre formalisme mécanique, etc...

Une question que nous n'avons pas abordée car elle dépend notablement de la méthode de résolution du problème inverse utilisée est celle de définir la qualité de points d'expérience en l'absence de tout bruit sur la mesure. Nous pouvons prendre comme précédemment, dans le cas où la méthode utilise une fonctionnelle de coût, la rapidité de convergence vers le minimum de cette fonctionnelle. Dans ce cas, nous pourrions par exemple exiger que la hessienne en le point de minimum de la fonctionnelle (définie positive) ait les plus grandes valeurs propres possibles, pour donner une grande variation de *pente*.

Bibliographie

- [1] Y. Maday, *Reduced Basis Method for the Rapid and Reliable Solution of Partial Differential Equations*
- [2] Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T. Patera, G.S.H. Pau, *A general, multipurpose interpolation procedure : the magic points*
- [3] M. Barrault, Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T. Patera, *An empirical interpolation method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations* Elsevier, Numerical Analysis, 2004
- [4] N.C. Nguyen, A.T. Patera, J. Peraire, *A 'best points' interpolation method for efficient approximation of parametrized functions* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21 May 2007
- [5] A. Delalleau, *Analyse du comportement mécanique de la peau in vivo* Thèse soutenue le 27 Avril 2007 à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Saint-Etienne
- [6] G. Allaire, *Conception optimale de structures* Mathématiques et applications 58, Springer.
- [7] G. Allaire *Analyse numérique et Optimisation* Polycopié de l'Ecole Polytechnique
- [8] F. Hecht, O.Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka, *Freefem++* Second edition, version 2.21
- [9] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol I : Three-Dimensional Elasticity* Séries 'Studies in Mathematics and its applications', North Holland, Amsterdam, 1988.

Annexe A

Calcul direct

On effectue ici le calcul direct des dérivées de \mathcal{J} défini en (2.5).

On a, par le théorème de dérivation sous le signe intégral et par indépendance des θ_j et des coefficients de Lamé :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \lambda} &= \sum_{j=1}^n \int_{\theta_j} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} \cdot n \right) (\xi(\lambda, \mu) \cdot n) ds \\ \frac{\partial J}{\partial \mu} &= \sum_{j=1}^n \int_{\theta_j} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mu} \cdot n \right) (\xi(\lambda, \mu) \cdot n) ds\end{aligned}$$

Puis en écrivant (2.2) pour $\xi(\lambda + h, \mu)$, $\xi(\lambda, \mu)$, en faisant la différence divisée par h et en faisant $h \rightarrow 0$ on obtient aisément que $\xi_\lambda(\lambda, \mu) = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}$ est solution du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(\xi_\lambda) = \operatorname{div}(\operatorname{div} \xi Id) \text{ dans } \Omega \\ \xi_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \sigma(\xi_\lambda) \cdot n = -(\operatorname{div} \xi) n \text{ sur } \Theta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

dans lequel σ , tenseur des contraintes est calculé avec (λ, μ) courants et ξ est bien sûr la solution de (2.2) avec ces mêmes coefficients. On obtient un système similaire pour ξ_μ .

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(\xi_\mu) = \operatorname{div}(2\epsilon(\xi)) \text{ dans } \Omega \\ \xi_\mu = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \\ \sigma(\xi_\mu) \cdot n = -2\epsilon(\xi) \cdot n \text{ sur } \Theta \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Les formulations variationnelles de ces deux champs sont donc les suivantes :

$$A(\lambda, \mu, \xi, u) = L_0(u) \quad (\text{A.3})$$

$$A(\lambda, \mu, \xi_\lambda, v) = L_\lambda(\xi)(v) \quad (\text{A.4})$$

$$A(\lambda, \mu, \xi_\mu, w) = L_\mu(\xi)(w) \quad (\text{A.5})$$

$$A(\lambda, \mu, h, q) = L_a(\xi)(q) \quad (\text{A.6})$$

où on a toujours les notations :

$$L_0(h) = \int_{\partial\Omega_N} F_{surf} \cdot h ds$$
$$L_\lambda(\xi)(v) = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \xi)(\operatorname{div} v)$$
$$L_\mu(\xi)(w) = \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(v)$$

Annexe B

Méthode générale de construction des magic points

Nous présentons un bref résumé de l'article [2]. Soit X un espace de Banach de fonctions continues définies sur un domaine Ω inclus dans \mathbb{R}^d ou \mathbb{C}^d . $X_M \subset X$ de dimension M , pouvant correspondre à M points d'interpolation. Plaçons nous dans le cadre des bases réduites : on considère $\mathcal{U} \subset X$ de la forme $\mathcal{U} = \{u(\mu, \cdot), \mu \in \mathcal{D}\}$. Nous faisons l'hypothèse que l'espace vectoriel engendré par \mathcal{U} est de dimension supérieure à \mathcal{M} , entier grand, avec $\mathcal{M} \geq M$.

Si X a un produit scalaire, la meilleure approximation est la projection orthogonale sur X_M . Cependant l'interpolation peut être une bonne méthode de substitution car elle ne nécessite pas de connaître u partout. Notons que les questions d'existence et d'unicité de l'interpolant, pour des domaines non triviaux, sont souvent des problèmes ouverts.

A présent, exposons la construction des fonctions de base de l'interpolation dite *empirique*.

Première étape Nous choisissons une première fonction et le premier point de la sorte

$$u_1 = \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{U}} \|u(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$x_1 = \operatorname{argmax}_{x \in \bar{\Omega}} u_1(x)$$

Puis la première fonction de base sera : $q_1(x) = u_1(x)/u_1(x_1)$. On définit la première matrice de passage B^1 par $B_{1,1}^1 = 1$.

Etape M Supposons à présent que nous ayons construit q_1, \dots, q_{M-1} . Pour une fonction $u \in \mathcal{U}$, nous résolvons le système linéaire en les $\alpha_{M-1,j}[u]$, pour $j = 1, \dots, M, \forall i = 1, \dots, M-1$

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_{M-1,j}[u] q_j(x_i)$$

Nous construisons ensuite l'interpolant de u , $\mathcal{I}_{M-1}[u(\cdot)]$, puis le résidu $\epsilon_{M-1}(u)$:

$$\mathcal{I}_{M-1}[u(\cdot)] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_{M-1,j}[u] q_j$$
$$\epsilon_{M-1}(u) = \|u - \mathcal{I}_{M-1}[u(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Nous choisissons alors

$$u_M = \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{U}} \epsilon_{M-1}(u)$$

$$x_1 = \operatorname{argmax}_{x \in \Omega} |u_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[u_M](x)|$$

Et enfin

$$r_M(x) = u_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[u_M](x)$$

$$q_M = r_M / r_M(x_M)$$

$$B_{i,j}^M = q_j(x_i)$$

Interpolant Pour toute fonction $u \in \mathcal{U}$,

$$\mathcal{I}_M[u(\cdot)] = \sum_{i=1}^M u(x_i) h_i^M(\cdot) \text{ où}$$

$$h_i^M(\cdot) = \sum_{j=1}^M [B_{i,j}^M]^{-1} q_j(\cdot)$$

On a bien sûr $h_i^M(x_j) = \delta_j^i$. Pour plus de résultats, nous renvoyons directement à l'article [2].

Annexe C

Reconstruction de paramètres

Nous réutiliserons dans cette annexe les notations employées précédemment, notamment dans les chapitres 1 et 2.

On cherche à déterminer les coefficients de Lamé d'un matériau modélisé dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites perturbations. On impose les forces et mesure le déplacement (données dites surabondantes au bord) en n points d'expériences. Nous présentons ici une méthode naïve aux moindres carrés, avec un algorithme de gradient.

Nous noterons $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ les véritables coefficients de Lamé du matériau. λ et μ noterons les paramètres variables, et étant donné un couple de tels coefficients on notera $\xi(\lambda, \mu)$ le champ de déplacement solution du problème direct (2.2) rappelé ici :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\epsilon(\xi) + \lambda(\operatorname{div}\xi)Id) = 0 & \text{dans } \Omega \\ 2\mu\epsilon(\xi) \cdot n + \lambda(\operatorname{div}\xi)n = F_{surf} & \text{sur } \partial\Omega_N \end{cases}$$

Equation qui peut se mettre sous la forme variationnelle déjà utilisée : $\forall w \in V$

$$A(\lambda, \mu, \xi, w) = L_0(w)$$

Les déplacements sont mesurés en chaque point d'expérience grâce à un *créneau de mesure* : pour tout point x_i d'expérience on notera m_i la mesure correspondante.

$$m_i = \int_{x_i - M/2}^{x_i + M/2} \xi(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \cdot nds$$

Nous construisons donc la fonction coût à minimiser :

$$\mathbb{G}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i - \int_{x_i - M/2}^{x_i + M/2} \xi(\lambda, \mu) \cdot nds \right)^2$$

Pour construire un algorithme de gradient, on a besoin de ses dérivées par rapport aux coefficients de Lamé, ce que nous déterminons par l'emploi d'un lagrangien afin de relâcher la contrainte sur ξ :

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, \xi, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i - \int_{x_i - M/2}^{x_i + M/2} \xi \cdot nds \right)^2 + A(\lambda, \mu, \xi, w) - L_0(w)$$

La dérivée de ce lagrangien par rapport à l'état nous donne l'état adjoint, $h : \forall w \in V$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(\lambda, \mu, h, w), w \right\rangle = (m_i - \int_{x_i-M/2}^{x_i+M/2} \xi \cdot nds) \left(\int_{x_i-M/2}^{x_i+M/2} w \cdot nds \right) + A(\lambda, \mu, h, w) = 0$$

Notons dès à présent $L_1(\xi)$ la forme linéaire ainsi définie : $\forall w \in V$

$$L_1(\xi)(w) = -(m_i - \int_{x_i-M/2}^{x_i+M/2} \xi \cdot nds) \left(\int_{x_i-M/2}^{x_i+M/2} w \cdot nds \right)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} w \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= \int_{\Omega} 2\epsilon(\xi) : \epsilon(w) \end{aligned}$$

D'ou finalement, en l'état adjoint h

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \lambda} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \operatorname{div} h \\ \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \mu} &= \int_{\Omega} \epsilon(\xi) : \epsilon(h) \end{aligned}$$

avec h solution de la formulation : $\forall w \in V$

$$A(\lambda, \mu, h, w) = L_1(\xi)(w)$$

A présent, nous pouvons implémenter facilement un algorithme de gradient qui visera à déterminer les véritables coefficients de Lamé. Il faut choisir judicieusement deux pas, l'un pour λ , l'autre pour μ .

Donnons des ordres de grandeur de ces deux paramètres : respectivement 4.10^6 et 3.10^5 environ pour un matériau proche du caoutchouc.

Notons, malgré la ressemblance entre les dérivées de \mathcal{J} (défini en (2.9)), la fonction objectif que nous avons taché d'optimiser, et celles de \mathbb{G} ci-dessus, ces dérivées sont différentes car font intervenir un état adjoint différent.