

4.4.1 La méthode semi-Lagrangienne classique

La méthode semi-Lagrangienne classique, ou en arrière, se décompose en deux étapes pour calculer la fonction de distribution f^{n+1} au temps t_{n+1} à partir de la fonction de distribution f^n au temps t_n :

1. Pour chaque point x_i du maillage de l'espace des phases, calculer $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ la valeur de la caractéristique en t_n qui vaut x_i en t_{n+1} .
2. Comme la fonction de distribution solution de l'équation de Vlasov vérifie

$$f^{n+1}(x_i) = f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1})),$$

on obtient la valeur $f^{n+1}(x_i)$ cherchée, en calculant $f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1}))$ par interpolation car $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ n'est en général pas un point du maillage.

On représente ces opérations sur la figure 4.2.

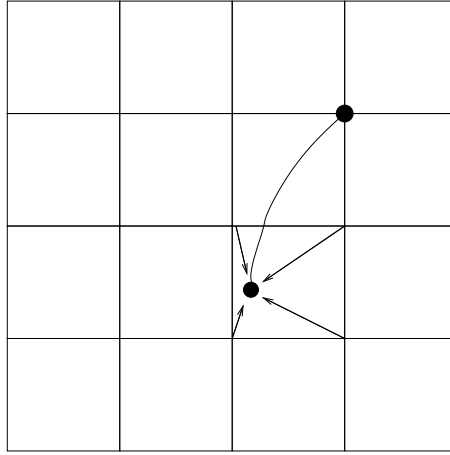


FIG. 4.2 – Schéma de principe de la méthode semi-Lagrangienne classique.

Remarque 9 *La méthode semi-Lagrangienne est très diffusive si une interpolation d'ordre trop faible est utilisée, en particulier pour l'interpolation linéaire. En pratique on utilise le plus souvent des interpolations cubiques, soit par splines, soit de Hermite ou de Lagrange.*

La méthode semi-Lagrangienne a été initialement introduite pour les équations de Vlasov-Poisson par Cheng et Knorr [10] en 1976. Elle est basée sur une interpolation par splines cubiques et sur un splitting de Strang et est particulièrement efficace dans ce cas.

On considère le problème de Vlasov-Poisson 1D avec une fonction de distribution pour les électrons et un fond d'ions neutralisant sur un domaine $[0, L]$ périodique en x et infini en v . Les équations s'écrivent alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{dE}{dx} = \rho(x, t) = 1 - \int f(x, v, t) dv,$$

avec la condition initiale $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$, vérifiant $\int f_0(x, v) dx dv = L$.

On tronque l'espace infini des vitesses à un segment $[-A, A]$ suffisamment grand pour que f reste de l'ordre de l'erreur d'arrondi pour des vitesses de l'ordre de $-A$ ou A tout au long de la simulation (en pratique on peut prendre A de l'ordre de 10 pour la plupart des cas tests pour le problème considéré). On définit alors un maillage uniforme de l'espace des phases $x_i = iL/N$, $i = 0, \dots, N-1$ (on ne redéfinit pas le point x_N qui correspond à x_0), $v_j = -A + j2A/M$, $j = 0, \dots, M$.

L'algorithme s'écrit dans ce cas :

1. **Initialiation.** La fonction de distribution initiale $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ est donnée. On en déduit $\rho(x, 0) = 1 - \int f_0(x, v) dv$, puis on calcule le champ électrique initial $E(x, 0)$ en résolvant Poisson.
2. **Passage de t_n à t_{n+1} .** On connaît f^n en tous les points (x_i, v_j) du maillage de l'espace des phase et E^n en tous les points du maillage de l'espace physique x_i .
 - On calcule f^* en résolvant

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^n \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sur un demi pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$ par une méthode semi-Lagrangienne.

- On calcule f^{**} en résolvant sur un pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- On calcule $\rho^{n+1}(x) = 1 - \int f^{**}(x, v) dv$ et on calcule le champ électrique E^{n+1} correspondant à l'aide de l'équation de Poisson.
- On calcule f^{n+1} en résolvant sur un demi pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^{n+1} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (4.12)$$

à partir de la condition initiale f^{**} .

Remarquons qu'on peut bien calculer ρ^{n+1} à l'aide de $f^{**}(x, v)$, car la densité de charge correspondant à $f^{**}(x, v)$ est la même que celle correspondant à $f^{n+1}(x, v)$. En effet, on passe de $f^{**}(x, v)$ à $f^{n+1}(x, v)$ en résolvant (4.12), et on remarque en intégrant cette équation en v qu'elle entraîne que $\frac{d}{dt} \int f(x, v, t) dv = 0$ et donc que ρ n'est pas modifié par cette étape.

Variante avec advection des dérivées pour une interpolation de Hermite cubique. L'advection en v pour un champ électrique $E(x)$ fixé s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

et à pour solution explicite sur un pas de temps $f(x, v, t + \Delta t) = f(x, v - E(x)\Delta t, t)$. On peut en déduire une expression explicite des dérivées partielles par rapport à x et v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t + \Delta t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, v - E(x)\Delta t, t) - \frac{dE}{dx}(x)\Delta t \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, v - E(x)\Delta t, t) - \rho(x)\Delta t \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

On obtient ainsi, en plus de la valeur de f aux points du maillage la valeurs de ses dérivées dont on a besoin pour une interpolation de Hermite cubique.

De la même manière l'advection en x s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

et à pour solution explicite sur un pas de temps $f(x, v, t + \Delta t) = f(x - v\Delta t, v, t)$, dont on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t + \Delta t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x - v\Delta t, v, t), \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) &= -\Delta t \frac{\partial f}{\partial x}(x - v\Delta t, v, t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x - v\Delta t, v, t). \end{aligned}$$

L'interpolation de Hermite cubique 1D d'une fonction f s'écrit

$$\pi f(x) = \sum_k f(x_k) \varphi(x_k) + f'(x_k) \psi(x_k),$$

où φ_k est le polynôme de degré 3 par maille vérifiant $\varphi_k(x_l) = \delta_{k,l}$ et $\varphi'_k(x_l) = 0$ et ψ_k est le polynôme de degré 3 par maille vérifiant $\psi_k(x_l) = 0$ et $\psi'_k(x_l) = \delta_{k,l}$ pour tous les points x_l du maillage.

Le schéma dans chacune des directions est alors déterminé en utilisant les valeurs de f et de ses dérivées partielles aux points du maillage déterminées précédemment. Ainsi pour l'advection en v on a

$$\begin{aligned} f_h(x, v, t + \Delta t) &= \pi(f(x, v - E(x)\Delta t, t)) \\ &= \sum_k f(x, v_k, t) \varphi_k(v - E(x)\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, v_k, t) \psi_k(v - E(x)\Delta t). \end{aligned}$$

On peut donc calculer

$$\frac{\partial f_h}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) = \sum_k f(x, v_k, t) \varphi'_k(v - E(x)\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, v_k, t) \psi'_k(v - E(x)\Delta t),$$

et pour l'autre dérivée on utilise l'expression (4.14) en calculant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, v - E(x)\Delta t, t)$ en utilisant une interpolation quadratique par rapport aux points voisins.

4.4.2 Éléments d'analyse de la méthode semi-Lagrangienne avec splitting

Pour valider la technique de splitting utilisée, nous allons démontrer la convergence dans le cas simplifié où le champ électrique est supposé connu et où on utilise une interpolation linéaire. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3 Soit $E \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ donné. Alors la solution du problème de Vlasov associé est de classe $C^3([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ et f_h calculé par l'algorithme splitté avec interpolation linéaire vérifie

$$\|f - f_h\|_\infty \leq C(\Delta t^2 + \frac{h^2}{\Delta t}).$$

Preuve. On définit les opérateurs ■

4.5 Validation des codes Vlasov-Poisson 1D

La validation d'un code Vlasov-Poisson 1D commence bien sûr, au fur et à mesure de l'écriture du code, par la validation de toutes les étapes élémentaires du code. Les principes de validation consistent à comparer le comportement du code avec les propriétés mathématiques connues des équations et du schéma. En particulier, on s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées à la précision machine, on comparera la solution calculée avec une solution analytique et on vérifiera que l'ordre numérique du schéma correspond bien à l'ordre théorique.

Pour les codes semi-Lagrangiens, il faudra vérifier l'interpolation, le solveur de Poisson et éventuellement la résolution numérique des caractéristiques.

Une fois toutes les briques de base validées, on passe à la validation du code global en utilisant les solutions connues de Vlasov-Poisson linéarisées. Nous considérerons deux cas tests classiques : l'amortissement Landau et l'instabilité double faisceau.

Le champ électrique solution de Vlasov-Poisson linéarisé s'écrit

$$\hat{E}(k, t) = \sum_j \text{Res}_{\omega=\omega_j} \tilde{E}(k, \omega) e^{-i\omega t},$$

où nous avons écrit

$$\tilde{E}(k, \omega) = \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}$$

et les ω_j sont les racines de $D(k, \omega) = 0$ pour k fixé. Il y a en général plusieurs racines de $D(k, \omega)$. On peut calculer ces racines à l'aide de la fonction `fsolve` de Maple, mais la racine trouvée dépend de l'initialisation choisie, il est donc difficile de toutes les trouver. En pratique seule la racine dominante (i.e. celle de partie imaginaire la plus grande) va persister au cours du temps. Les autres vont devenir très rapidement négligeables. Il suffit donc en pratique de calculer la racine dominante qu'on trouve assez rapidement.

Pour calculer les résidus on peut écrire le développement de Taylor de $D(k, \omega)$ au voisinage de ω_j

$$D(k, \omega) = D(k, \omega_j) + (\omega - \omega_j) \frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j) + O((\omega - \omega_j)^2),$$

et donc, si ω_j est racine simple, on a $D(k, \omega_j) = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j) \neq 0$. Il en résulte que

$$\text{Res}_{\omega=\omega_j} \left(\frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} \right) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_j} ((\omega - \omega_j) \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t}) = \frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)} e^{-i\omega_j t}.$$

4.5.1 L'amortissement Landau

La condition initiale de l'amortissement Landau correspond à

$$f_0(x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad L = 4\pi.$$

Dans les simulations numériques présentées plus loin nous prenons $\epsilon = 0,001$. Il s'agit physiquement d'une petite perturbation d'un équilibre Maxwellien. Cet équilibre est stable et la fonction de distribution revient à l'équilibre après la perturbation.

Cela correspond au cas que nous avons traité dans le chapitre 3 avec comme fonction d'équilibre $f^0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$ et comme perturbation initiale $f_0^1(x, v) = \epsilon \cos(kx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$.

Il en résulte que la perturbation associée de la densité de charge vaut $\rho_0^1(x) = \int f_0^1(x, v) dv = \epsilon \cos(kx)$, de sorte que seuls les modes de Fourier -1 et 1 associées à $k = \pm \frac{2\pi}{L}$ sont non nuls et valent $\frac{1}{2}$. Ainsi $g(k)$ apparaissant dans (3.21) vaut $\frac{1}{2}$ pour ces valeurs de k et est nul sinon. Puis, comme le champ électrique vérifie $\frac{dE}{dx}(x, 0) = \rho_0^1(x)$, on a $E(x, 0) = \frac{\epsilon}{k} \sin(kx)$ qui a les mêmes modes de Fourier non nuls valant $\frac{1}{2}$ pour $k' = 1$ et $-\frac{1}{2}$ pour $k' = -1$.

Nous avons vu (3.20) que

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} Z'\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right),$$

et que (3.21)

$$N(k, \omega) = -g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2} v_{th}} Z\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{th}}\right).$$

Il en résulte que

$$\frac{N(k, \omega)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega)} = 2g(k) \frac{m}{e} k v_{th}^2 \frac{Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}{Z''\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)} \quad (4.15)$$

$$= g(k) \frac{m}{e} k v_{th}^2 \frac{Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}{2 \frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k} - \left(1 - \frac{\omega^2}{v_{th}^2 k^2}\right) Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}. \quad (4.16)$$

Donnons un tableau des racines dominantes de $D(k, \omega) = 0$ et le résidu associé pour plusieurs valeurs de k :

k	ω_j	$\frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)}$
0,5	$\pm 1,4156 - 0,1533i$	$0,3677 e^{\pm i 0,536245}$
0,4	$\pm 1,2850 - 0,0661i$	$0,424666 e^{\pm i 0,3357725}$
0,3	$\pm 1,1598 - 0,0126i$	$0,63678 e^{\pm i 0,114267}$
0,2	$\pm 1,0640 - 5,510 \times 10^{-5}i$	$1.129664 e^{\pm i 0,00127377}$

Notons $\omega_r = \Re(\omega_j)$, $\omega_i = \Im(\omega_j)$, r l'amplitude du résidu et φ sa phase. On note qu'on a toujours pour une racine de la forme $\omega_r + i\omega_j$ associée au résidu $re^{i\varphi}$, une racine de la forme $-\omega_r + i\omega_j$ associée au résidu $re^{-i\varphi}$. Donc en ne considérant que les deux racines pour lesquelles ω_i est le plus grand, on a

$$\begin{aligned} \hat{E}(k, t) &\approx re^{i\varphi} e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} + re^{-i\varphi} e^{-i(-\omega_r + i\omega_i)t}, \\ &= re^{\omega_i t} (e^{-i(\omega_r t - \varphi)} + e^{i(\omega_r t - \varphi)}), \\ &= 2re^{\omega_i t} \cos(\omega_r t - \varphi). \end{aligned}$$

Ensuite, on peut vérifier que $\hat{E}(-k, t) = -\hat{E}(k, t)$, de sorte que

$$E(x, t) \approx 4ere^{\omega_i t} \sin(kx) \cos(\omega_r t - \varphi).$$

Notons que ceci n'est pas la solution complète, car nous n'avons considéré que le mode dominant. Néanmoins, il s'avère qu'après environ une période en temps, ceci représente une excellente approximation de E car les autres modes deviennent très rapidement négligeables devant le mode dominant.

On peut mettre cette formule en application en considérant par exemple la première ligne du tableau, le champ électrique pour $k = 0,5$ sera assez rapidement (après que les termes correspondant aux autres racines soient devenus négligeables) de la forme

$$E(x, t) = 4\epsilon \times 0,3677e^{-0,1533t} \sin(0,5x) \cos(1,4156t - 0,536245).$$

On superpose dans la figure 4.3 la solution analytique du mode dominant du champ électrique pour $k = 0,4$ ($\tilde{E}(k, t) = 0,002 \times 0,42466e^{0,0661t} \cos(1,2850t - 0,3357725)$) et la solution calculée numériquement par une méthode semi-Lagrangienne avec un maillage de 128 points en x et en v . Le maillage en v a été tronqué de manière symétrique pour $v_{max} = 10$

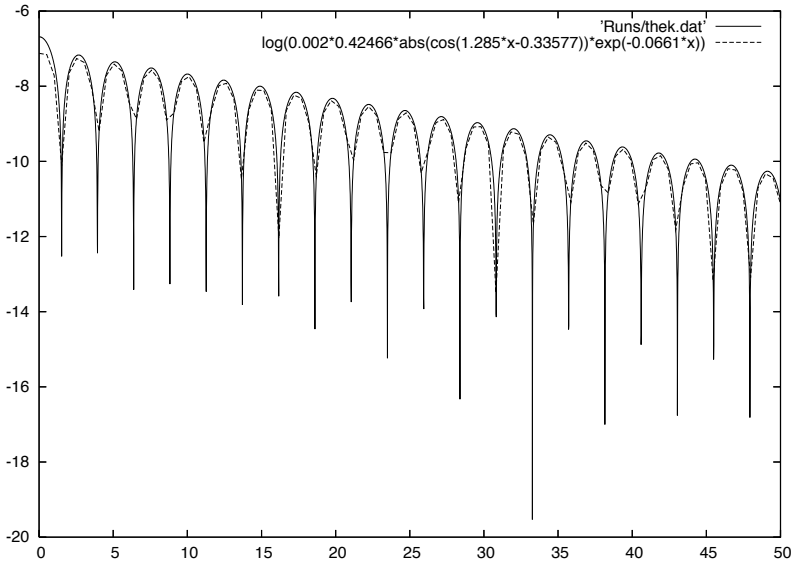
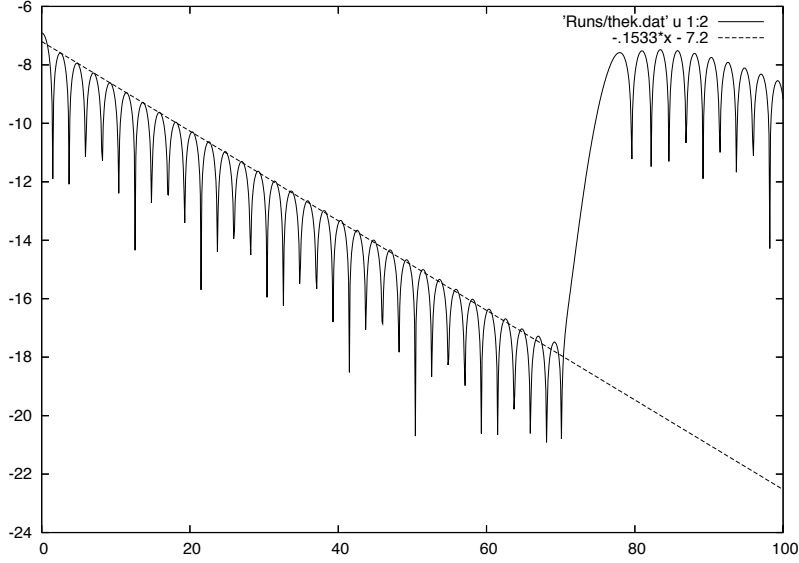


FIG. 4.3 – L'amortissement Landau pour $k = 0,4$.

Pour les mêmes paramètres numériques on représente dans la figure 4.4 la même solution numérique et on trace également la pente correspond à l'amortissement plutôt que la solution complète. On remarque que pour un temps de l'ordre de 80 l'amortissement est brutalement interrompu et le champ électrique revient quasiment à son amplitude initiale. Il s'agit de d'un phénomène purement numérique lié à l'utilisation d'un maillage uniforme en vitesse pour un problème périodique en espace. Ce phénomène est connu sous le nom de récurrence de Poincaré. Dans notre cas, on peut l'analyser en considérant l'équation de transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Le domaine étant périodique en x , on passe en série de Fourier. Le mode k vérifie alors $\frac{df_k}{dt} - \frac{2i\pi k}{L} v f_k = 0$. D'où $f_k(v, t) = f_k(v, 0) e^{\frac{2i\pi k}{L} vt}$. Puis comme $v = j\Delta v$, f_k va être périodique en t de période $T_R = \frac{L}{\Delta v}$. Dans notre cas, on a $L = 4\pi$ et $\Delta v = 20/127 = 0,1574$. Il en résulte que $T_R \approx 79,8$. Ce qui correspond bien à la valeur observée.

FIG. 4.4 – L'amortissement Landau pour $k = 0,5$.

4.5.2 L'instabilité double faisceau

L'instabilité double faisceaux correspond à deux faisceaux de vitesses moyennes différentes qui se rencontrent. On considère ici deux faisceaux se déplaçant respectivement à des vitesses moyennes v_0 et $-v_0$. En fonction de k et de v_0 cette configuration peut-être stable ou instable.

La condition initiale correspondant à cette configuration physique est

$$f_0(x, v) = (1 + 0.001 \cos(kx)) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}} \right), \quad L = \frac{2\pi}{k}.$$

On va utiliser la relation de dispersion pour plusieurs faisceaux (3.23) dans le cas de deux faisceaux de même vitesse thermique et de vitesses moyennes opposées. Elle devient alors

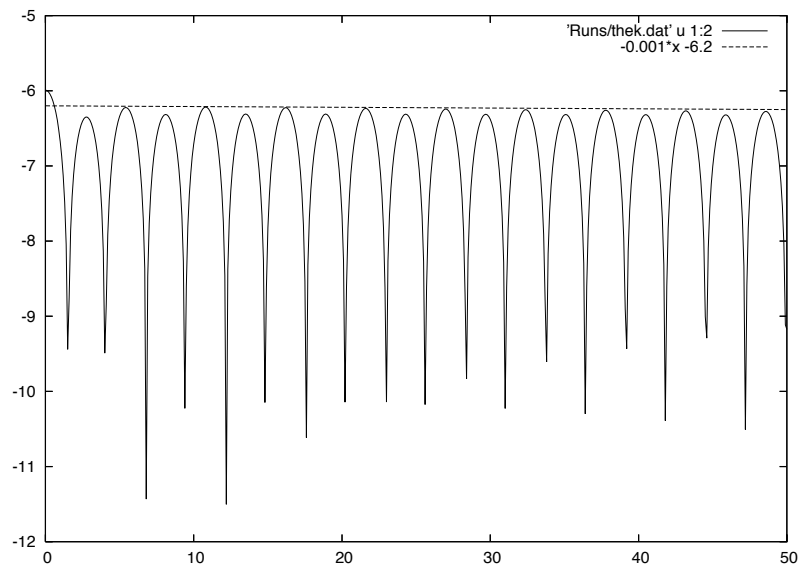
$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2k^2 v_{th}^2} \left[2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} - \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} - v_0)^2}{2v_{th}^2}} \left(i - \operatorname{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} - v_0}{\sqrt{2}v_{th}} \right) \right) \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} + \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} + v_0)^2}{2v_{th}^2}} \left(i - \operatorname{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} + v_0}{\sqrt{2}v_{th}} \right) \right) \right],$$

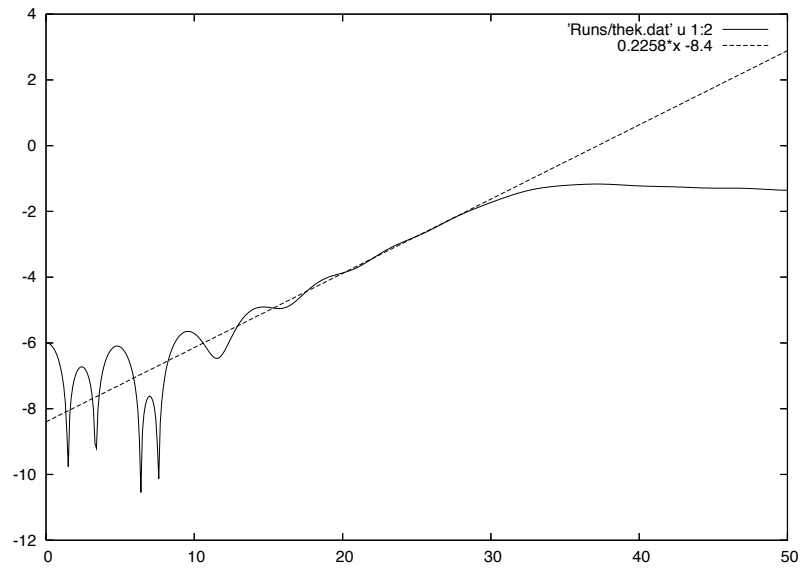
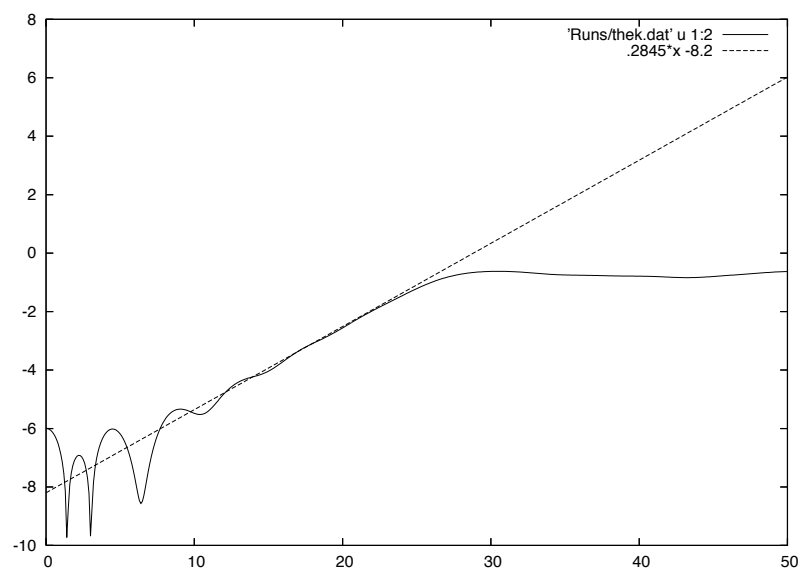
Pour des valeurs de k et de v_0 données $D(k, \omega)$ admet plusieurs racines en ω . On en donne quelques unes qui sont dominantes pour $k = 0.2$ et plusieurs valeurs de v_0 dans le tableau 4.1 . En fonction de la valeur de v_0 l'instabilité est plus ou moins forte ou la configuration peut être stable.

On remarque que les solutions stables sont oscillantes avec un très léger amortissement et que les solutions instables correspondent à des racines imaginaires pures et donc n'oscillent pas.

v_0	ω	ω
1,3	0,02115 <i>i</i>	1,1648 - 0,00104 <i>i</i>
2,4	0,2258 <i>i</i>	1,3390 - 0,00242 <i>i</i>
3,0	0,2845 <i>i</i>	1,446 - 0,00299 <i>i</i>

TAB. 4.1 – Racines de la relation de dispersion pour l'instabilité double faisceau.

FIG. 4.5 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 1, 3$.

FIG. 4.6 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 2, 4$.FIG. 4.7 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 3$.