

4.2 La technique du splitting d'opérateurs

Dans l'équation de Vlasov, du fait que le champ d'advection en \mathbf{x} ne dépende pas de \mathbf{v} et que le champ d'advection en \mathbf{v} ne dépende pas de \mathbf{x} , il est souvent commode de décomposer les deux parties par ce qui est communément appelé une méthode de splitting (ou de décomposition) d'opérateurs.

Pour l'équation de Vlasov-Poisson non relativiste qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0,$$

On va décomposer l'équation en les deux parties suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = 0, \quad (4.7)$$

avec \mathbf{v} fixé et

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (4.8)$$

avec \mathbf{x} fixé. Ce sont alors deux advection à coefficients constants qu'on peut résoudre plus simplement.

Remarque 5 *Lorsque l'équation de départ a certaines propriétés importantes pour la qualité de la solution numérique, il est essentiel de ne pas les détruire par le splitting. En particulier lorsque l'on décompose une équation conservative, il faut veiller à ce que chacune des parties après décomposition soit conservative.*

Pour analyser l'erreur commise par le splitting, on va considérer l'équation

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u, \quad (4.9)$$

où A et B sont deux opérateurs différentiels (en espace) quelconques, qu'on suppose constants entre t_n et t_{n+1} . La solution formelle de cette équation sur un pas de temps s'écrit

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t(A+B)}u(t).$$

On décompose l'équation (4.9) en

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad (4.10)$$

$$\frac{du}{dt} = Bu. \quad (4.11)$$

Les solutions formelles de ces équations prises séparément sont

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t A}u(t) \text{ et } u(t + \Delta t) = e^{\Delta t B}u(t).$$

La méthode de splitting standard consiste à résoudre successivement sur un pas de temps (4.10) puis (4.11) Donc en résolvant successivement les deux équations splittées, on obtient sur un pas de temps

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = e^{\Delta t B}e^{\Delta t A}u(t).$$

Si les opérateurs A et B commutent $e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} = e^{t(A+B)}$ et le splitting est exact. C'est le cas en particulier lorsque l'on décompose une advection à coefficients constants de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

On pourra le vérifier en utilisant la méthode des caractéristiques.

Dans le cas où A et B ne commutent pas on peut diminuer l'erreur de splitting en résolvant d'abord (4.10) sur un demi pas de temps, puis (4.11) sur un pas de temps et de nouveau (4.10) sur un demi pas de temps. Cette méthode est appelée splitting de Strang. Elle correspond à la solution formelle

$$\bar{u}(t + \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} u(t).$$

L'erreur commise sur un pas de temps par la méthode de splitting quand les opérateurs ne commutent pas est donné par

Proposition 6 – *Le splitting standard est d'ordre 1 en temps.*
– *Le splitting de Strang est d'ordre 2 en temps.*

Preuve. Pour déterminer les erreurs, il suffit de développer l'exponentielle

On a d'une part

$$e^{\Delta t(A+B)} = I + \Delta t(A+B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A+B)^2 + O(\Delta t^3),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} &= (I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + O(\Delta t^3))(I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2} A^2 + O(\Delta t^3)) \\ &= I + \Delta t(A+B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A^2 + B^2 + 2BA) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Or comme A et B ne commutent pas, on a $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Il en résulte que $e^{\Delta t(A+B)} - e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} = O(\Delta t^2)$, ce qui donne donc une erreur locale d'ordre 2 et une erreur globale d'ordre 1.

Enfin pour le splitting de Strang, on a

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} &= (I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3))(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + O(\Delta t^3)) \\ &\quad (I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3)) \\ &= I + \Delta t(A+B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A^2 + B^2 + BA + AB) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

On obtient donc une erreur locale d'ordre 3 et donc globale d'ordre 2 pour la méthode de Strang. ■

Remarque 6 *On peut obtenir des méthodes de splitting d'ordre aussi élevé que l'on souhaite en composant les opérateurs de manière adéquate suivant l'idée de Strang.*

Remarque 7 *Le splitting de Strang peut aussi se généraliser à plus de deux opérateurs. Si $A = A_1 + \dots + A_n$, la décomposition suivante donne un ordre global de 2 :*

$$e^{\frac{\Delta t}{2} A_1} \dots e^{\frac{\Delta t}{2} A_{n-1}} e^{\Delta t A_n} e^{\frac{\Delta t}{2} A_{n-1}} \dots e^{\frac{\Delta t}{2} A_1}.$$

4.3 Les méthodes semi-Lagrangiennes

Les méthodes semi-Lagrangiennes sont loin derrière les méthodes PIC devenues classiques pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov en raison de leur grande précision et de l'absence de bruit numérique. Elles utilisent un maillage de l'espace des phases, ce qui explique qu'elles ne sont utilisées actuellement qu'en dimension réduite 1D ou 2D, car on ne sait pas encore vraiment gérer un maillage 6D avec des dimensions raisonnables dans chaque direction. La spécificité des méthodes semi-Lagrangiennes par rapport aux méthodes de discrétisation classiques des EDP sur un maillage est qu'elles utilisent les caractéristiques de l'équation de transport pour mettre à jour l'inconnue d'un pas de temps à l'autre. Ces méthodes semi-Lagrangiennes se déclinent sous plusieurs formes, en avant, en arrière, volumique, que nous allons détailler dans cette section. Les méthodes semi-Lagrangiennes utilisent souvent une interpolation par splines cubiques, nous allons donc commencer par présenter cette interpolation.

4.4 Interpolation par splines cubiques

On considère un maillage régulier de l'intervalle $[a, b]$ défini par $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, avec $h = \frac{b-a}{N}$. Soit $f \in C^k([a, b])$, $k \geq 0$ son interpolant f_h par splines cubiques sur ce maillage est défini par $f_h(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, N$, $f_h \in \mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}])$ et $f_h \in C^2([a, b])$.

Dans le cas où l'on suppose le domaine périodique, i.e., si $[a, b]$ correspond à une période des fonctions périodiques f et f_h , ces conditions suffisent à déterminer de manière unique f_h . Sinon il faut ajouter des conditions aux limites, soit de type Hermite qui correspondent à donner également les valeurs de $f'_h(a)$ et de $f'_h(b)$ ou de type naturel qui consistent à fixer $f''_h(a) = f''_h(b) = 0$.

Il est pratique de déterminer une expression de f_h sur la base des B-splines cubiques S^3 . Rappelons l'expression de S^3 sur notre maillage

$$S^3(x) = \frac{1}{6h} \begin{cases} (2 - \frac{|x|}{h})^3 & \text{si } h \leq |x| < 2h, \\ 4 - 6\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 3\left(\frac{|x|}{h}\right)^3 & \text{si } 0 \leq |x| < h, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Commençons par traiter le cas périodique. On suppose donc que toutes les fonctions que l'on considère sont périodiques de période $b - a$. On a alors en particulier que $f_h^{(p)}(a) = f_h^{(p)}(b)$ pour $p = 0, 1, 2$. Le point x_N du maillage correspond donc à x_0 et aucune inconnue nouvelle n'y est définie.

L'expression de f_h sur la base des B-splines s'écrit alors

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j S^3(x - x_j),$$

et les coefficients α_i sont déterminés par les conditions d'interpolation

$$f(x_i) = f_h(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j S^3(x_i - x_j).$$

Or $S^3(x_i - x_i) = \frac{2}{3h}$, $S^3(x_i - x_{i+1}) = S^3(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{6h}$ et $S^3(x_i - x_j) = 0$ si $|x_i - x_j| \geq 2h$.

Il en résulte le système d'équations déterminant les α_i , $i = 0, N - 1$:

$$\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1} = 6hf(x_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

avec en raison de la périodicité $\alpha_{-1} = \alpha_{N-1}$ et $\alpha_N = \alpha_0$. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $A\alpha = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b = 6h \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice A est à diagonale strictement dominante elle est inversible et permet donc de déterminer α de manière unique et donc la fonction f_h .

Remarque 8 Pour l'implémentation de la méthode, il est préférable d'enlever le h qui est en facteur dans b et de compenser en enlevant le $\frac{1}{h}$ en facteur de S^3 . On peut exprimer ceci de manière différente en disant qu'on fait les changements de variable $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$ et $\tilde{S}^3 = hS^3$.

4.4.1 La méthode semi-Lagrangienne classique

La méthode semi-Lagrangienne classique, ou en arrière, se décompose en deux étapes pour calculer la fonction de distribution f^{n+1} au temps t_{n+1} à partir de la fonction de distribution f^n au temps t_n :

1. Pour chaque point x_i du maillage de l'espace des phases, calculer $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ la valeur de la caractéristique en t_n qui vaut x_i en t_{n+1} .
2. Comme la fonction de distribution solution de l'équation de Vlasov vérifie

$$f^{n+1}(x_i) = f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1})),$$

on obtient la valeur $f^{n+1}(x_i)$ cherchée, en calculant $f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1}))$ par interpolation car $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ n'est en général pas un point du maillage.

On représente ces opérations sur la figure 4.2.

Remarque 9 La méthode semi-Lagrangienne est très diffusive si une interpolation d'ordre trop faible est utilisée, en particulier pour l'interpolation linéaire. En pratique on utilise le plus souvent des interpolations cubiques, soit par splines, soit de Hermite ou de Lagrange.

La méthode semi-Lagrangienne a été initialement introduite pour les équations de Vlasov-Poisson par Cheng et Knorr [10] en 1976. Elle est basée sur une interpolation par splines cubiques et sur un splitting de Strang et est particulièrement efficace dans ce cas.

On considère le problème de Vlasov-Poisson 1D avec une fonction de distribution pour les électrons et un fond d'ions neutralisant sur un domaine $[0, L]$ périodique en x et infini en v . Les équations s'écrivent alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

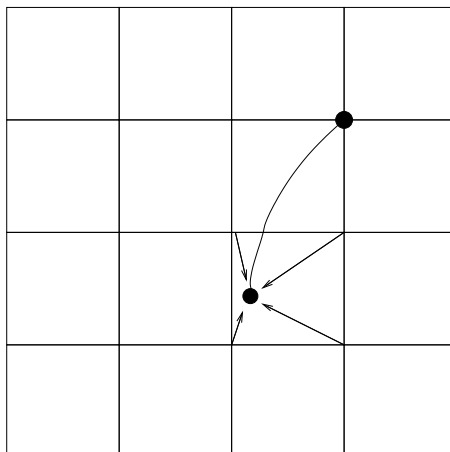


FIG. 4.2 – Schéma de principe de la méthode semi-Lagrangienne classique.

$$\frac{dE}{dx} = \rho(x, t) = 1 - \int f(x, v, t) dv,$$

avec la condition initiale $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$, vérifiant $\int f_0(x, v) dx dv = L$.

On tronque l'espace infini des vitesses à un segment $[-A, A]$ suffisamment grand pour que f reste de l'ordre de l'erreur d'arrondi pour des vitesses de l'ordre de $-A$ ou A tout au long de la simulation (en pratique on peut prendre A de l'ordre de 10 pour la plupart des cas tests pour le problème considéré). On définit alors un maillage uniforme de l'espace des phases $x_i = iL/N$, $i = 0, \dots, N-1$ (on ne redéfinit pas le point x_N qui correspond à x_0), $v_j = -A + j2A/M$, $j = 0, \dots, M$.

L'algorithme s'écrit dans ce cas :

1. **Initialiation.** La fonction de distribution initiale $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ est donnée. On en déduit $\rho(x, 0) = 1 - \int f_0(x, v) dv$, puis on calcule le champ électrique initial $E(x, 0)$ en résolvant Poisson.
2. **Passage de t_n à t_{n+1} .** On connaît f^n en tous les points (x_i, v_j) du maillage de l'espace des phases et E^n en tous les points du maillage de l'espace physique x_i .
 - On calcule f^* en résolvant

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

sur un demi pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$ par une méthode semi-Lagrangienne.

- On calcule $\rho^*(x) = 1 - \int f^*(x, v) dv$ et on calcule le champ électrique correspondant à l'aide de l'équation de Poisson.
- On calcule f^{**} en résolvant sur un pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^* \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

- On calcule f^{n+1} en résolvant sur un demi pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

à partir de la condition initiale f^{**} .

4.5 Validation des codes Vlasov-Poisson 1D

La validation d'un code Vlasov-Poisson 1D commence bien sûr, au fur et à mesure de l'écriture du code, par la validation de toutes les étapes élémentaires du code. Les principes de validation consistent à comparer le comportement du code avec les propriétés mathématiques connues des équations et du schéma. En particulier, on s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées à la précision machine, on comparera la solution calculée avec une solution analytique et on vérifiera que l'ordre numérique du schéma correspond bien à l'ordre théorique.

Pour les codes semi-Lagrangiens, il faudra vérifier l'interpolation, le solveur de Poisson et éventuellement la résolution numérique des caractéristiques.

Une fois toutes les briques de base validées, on passe à la validation du code global en utilisant les solutions connues de Vlasov-Poisson linéarisées. Nous considérerons deux cas tests classiques : l'amortissement Landau et l'instabilité double faisceau.

4.5.1 L'amortissement Landau

$$f_0(x, v) = (1 + 0.001 \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad L = 4\pi.$$

Pour $k = 0,5$ on obtient $\omega = 1,4156 - 0,1533i$

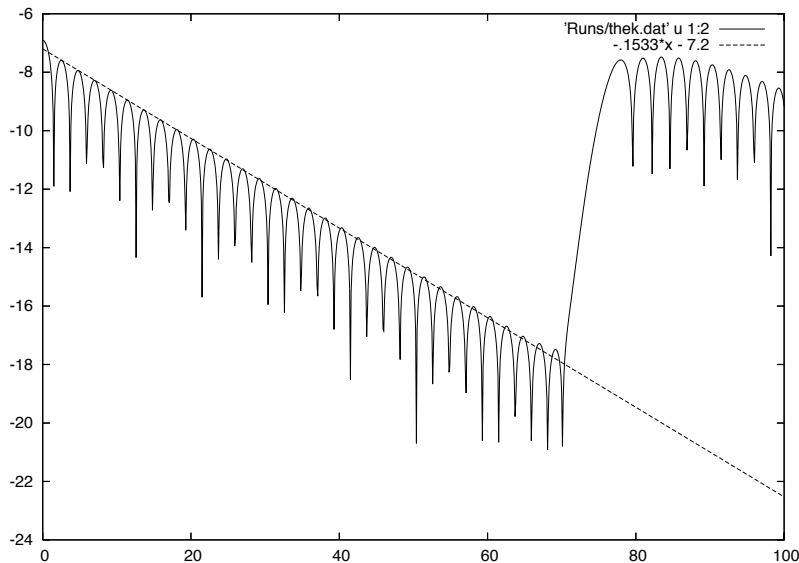


FIG. 4.3 – L'amortissement Landau pour $k = 0,5$.

4.5.2 L'instabilité double faisceau

On va utiliser la relation de dispersion pour plusieurs faisceaux (3.23) dans le cas de deux faisceaux de même vitesse thermique et de vitesses moyennes opposées. Elle

devient alors

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2k^2 v_{th}^2} \left[2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} - \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} - v_0)^2}{2v_{th}^2}} \left(i - \operatorname{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} - v_0}{\sqrt{2}v_{th}} \right) \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} + \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} + v_0)^2}{2v_{th}^2}} \left(i - \operatorname{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} + v_0}{\sqrt{2}v_{th}} \right) \right) \right],$$

Quelques racines pour $k = 0.2$

v_0	ω	ω
1, 3	0, 02115 <i>i</i>	1, 1648 - 0, 00104 <i>i</i>
2, 4	0, 2258 <i>i</i>	1, 3390 - 0, 00242 <i>i</i>
3, 0	0, 2845 <i>i</i>	1, 446 - 0, 00299 <i>i</i>

On prend comme condition initiale

$$f_0(x, v) = (1 + 0.001 \cos(kx)) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}} \right), \quad L = \frac{2\pi}{k}.$$

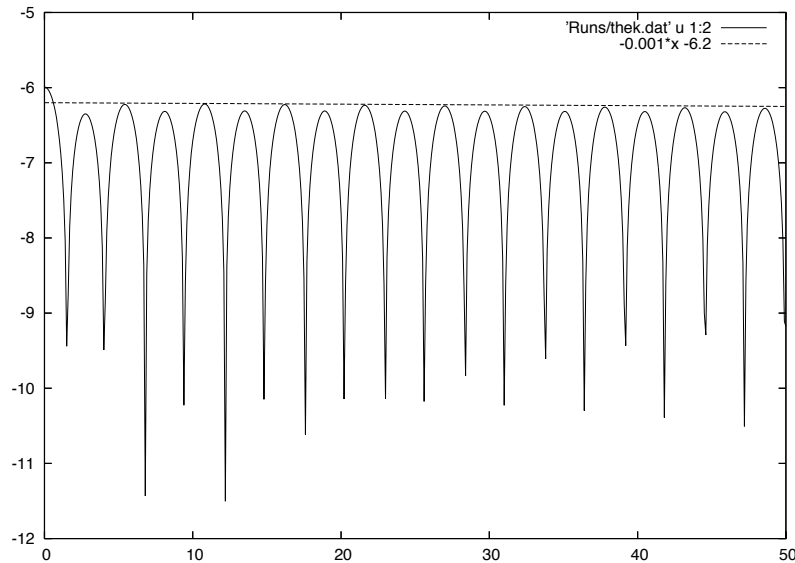
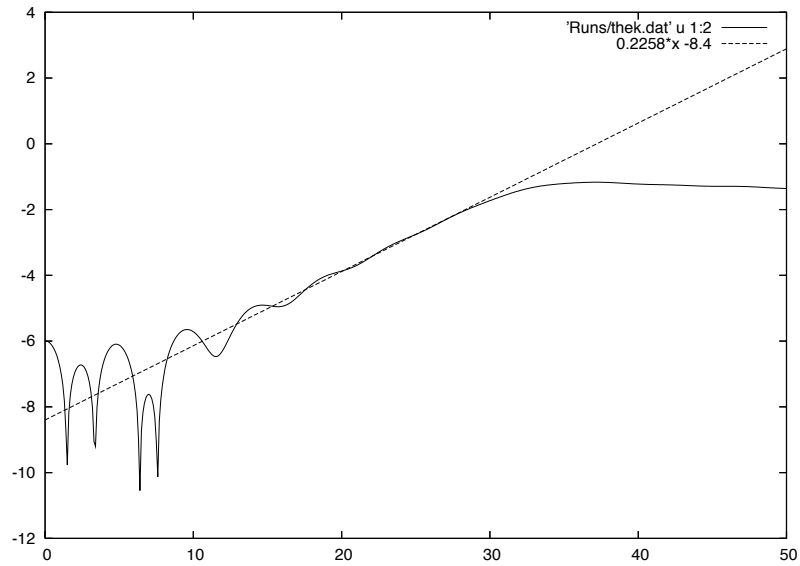
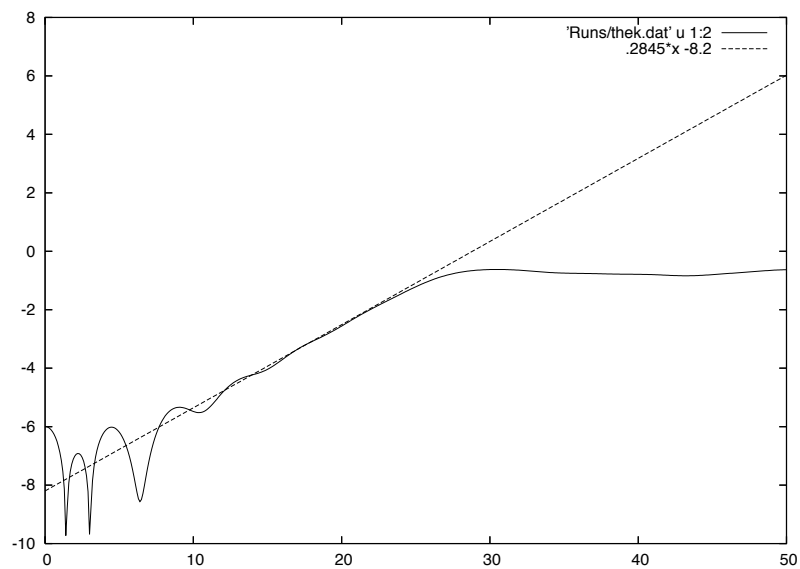


FIG. 4.4 – L’instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 1, 3$.

FIG. 4.5 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 2, 4$.FIG. 4.6 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 3$.