

Chapitre 3

Etude théorique du système de Vlasov-Maxwell

3.1 Etude de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée

Dans un certain nombre de situations physiques, on s'intéresse à de petites perturbations d'un plasma à l'équilibre. Considérons notamment les équations de Vlasov-Poisson 1D au voisinage d'un état d'équilibre donné par une fonction de distribution $f_0(x, v)$ pour les électrons et un fond d'ions neutralisant tels que le champ électrique associé soit nul. On se place sur un domaine périodique de période $L = 2\pi/k_0$ en x et sur \mathbb{R} tout entier en v .

En notant $-e$ la charge d'un électron et m sa masse. La fonction de distribution à l'équilibre vérifie les équations de Vlasov-Poisson

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + v \frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{e}{m} E^0(x) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{dE^0}{dx} = \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(x, v) dv) \quad (3.2)$$

avec la condition initiale $f^0(x, v, t) = f_0(x, v)$ et où $n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(x, v) dv$ est la densité constante du fond d'ions neutralisant. Si f^0 est une solution stationnaire $\frac{\partial f^0}{\partial t} = 0$ et si de plus $E^0 = 0$, il reste dans l'équation de Vlasov $v \frac{\partial f^0}{\partial x} = 0$ pour tout v , ce qui entraîne que $f^0(x, v, t) = f_0(x, v) \equiv f^0(v)$. Toute fonction f^0 dépendant uniquement de v peut donc être une solution d'équilibre. Une solution stable qui correspond à l'équilibre thermodynamique du plasma est le cas où f^0 est une Maxwellienne :

$$f^0(v) = \frac{n_0}{2\pi v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

où l'on note $v_{th} = \frac{T}{m}$ la vitesse thermique électronique.

On peut maintenant linéariser les équations de Vlasov-Poisson autour de cet état d'équilibre en développant la fonction de distribution et le champ électrique sous la forme de la solution à l'équilibre plus une petite perturbation : $f(x, v, t) = f^0(x, v) + \epsilon f^1(x, v, t)$, $E(x, t) = E^0(x) + \epsilon E^1(x, t)$.

La fonction de distribution f vérifie les équations de Vlasov-Poisson

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E(x) \frac{\partial f}{\partial v} &= 0, \\ \frac{dE}{dx} &= \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv),\end{aligned}$$

avec une condition initiale que l'on suppose de la forme $f_0(x, v) = f^0(v) + \epsilon f_0^1(x, v)$. En reportant le développement de f et de E dans cette équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^1}{\partial t} + v \frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{m} E(x) \left(\frac{\partial f^0}{\partial v} + \epsilon \frac{\partial f^1}{\partial v} \right) &= 0, \\ \frac{dE^1}{dx} &= \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} (f^0(v) + \epsilon f^1(x, v, t)) dv).\end{aligned}$$

En négligeant les termes en ϵ^2 , on obtient, sachant que $E^0 = 0$

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + v \frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{m} E^1(x) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{dE^1}{dx} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f^1(x, v, t) dv, \quad (3.4)$$

avec la condition initiale $f^1(x, v, 0) = f_0^1(x, v)$. Comme f^0 est une fonction connue de v , cette équation, dont les inconnues sont f^1 et E^1 , est linéaire et fait apparaître des dérivées partielles en x et en t , on peut donc essayer d'en calculer une solution analytique en utilisant, comme f^1 est périodique en x , une série de Fourier en x et une transformée de Laplace en t . Pour simplifier les notations nous omettrons les indices 1 dans la suite de cette section. Des rappels d'analyse complexe permettant de comprendre les calculs ci-dessous et la définition de la transformée de Laplace sont données dans l'appendice A.

Nous définissons la série de Fourier d'une fonction g continue et périodique de période L par

$$g(x) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) e^{ikx} \quad \text{avec} \quad \hat{g}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ikx} dx \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{L} k'.$$

Ainsi en multipliant (3.23) et (3.4) par e^{-ikx} et en intégrant entre 0 et L , on obtient les relations suivantes entre les coefficients de Fourier

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(k, v, t) + ikv \hat{f}(k, v, t) - \frac{e}{m} \hat{E}(k, t) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0, \quad (3.5)$$

$$ik \hat{E}(k, t) = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k, v, t) dv. \quad (3.6)$$

On a de plus pour la condition initiale $\hat{f}(k, v, 0) = \hat{f}_{in}(k, v)$. On procède maintenant à la transformée de Laplace en t de ces équations. Pour pouvoir comparer nos résultats à ceux des ouvrages classiques de physique des plasmas, nous adoptons la convention des physiciens de prendre $s = -i\omega$ par rapport à nos formules données dans l'appendice ???. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ s'écrit alors

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (3.7)$$

et la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \int_{-\infty+iu}^{+\infty+iu} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.8)$$

En multipliant par $e^{i\omega t}$ et en intégrant par rapport à t entre 0 et $+\infty$. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(k, v, t) e^{i\omega t} dt = [\hat{f}(k, v, t) e^{i\omega t}]_0^{+\infty} - i\omega \int_0^{+\infty} \hat{f}(k, v, t) e^{i\omega t} dt = -\hat{f}(k, v, 0) - i\omega \tilde{f}(k, v, s),$$

où l'on note $\tilde{f}(k, v, s)$ la transformée de Laplace de $\hat{f}(k, v, t)$. On obtient alors

$$(-i\omega + ikv) \tilde{f}(k, v, \omega) - \frac{e}{m} \tilde{E}(k, \omega) \frac{\partial f^0}{\partial v} = \hat{f}_0(k, v), \quad (3.9)$$

et la transformée de Laplace de l'équation de Poisson donne

$$\tilde{E} = \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} dv. \quad (3.10)$$

En reportant (3.9) dans (3.10) on obtient

$$\tilde{E} = \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0 + \frac{e}{m} \tilde{E} \frac{\partial f^0}{\partial v}}{-i\omega + ikv} dv = \frac{ie^2}{k\epsilon_0 m} \tilde{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{-i\omega + ikv} dv + \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{-i\omega + ikv} dv.$$

Posons

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2}{k^2 \epsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv, \quad (3.11)$$

$$N(k, \omega) = -\frac{e}{k^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{v - \frac{\omega}{k}} dv. \quad (3.12)$$

On obtient alors l'expression suivante pour \tilde{E} :

$$\tilde{E}(k, \omega) = \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}.$$

Les conditions d'application du théorème 6 d'inversion de la transformée de Laplace sont réalisées si la fonction \tilde{E} est analytique en dehors de points isolés qui sont les pôles de $N(k, \omega)$ et les zéros de $D(k, \omega)$. Il existe alors une bande $\Im(s) > R$ au dessus de ces points isolés sur laquelle \tilde{E} est analytique.

Nous allons commencer pour déterminer une expression plus explicite de $D(k, \omega)$ et $N(k, \omega)$. Les deux termes sont bien définis pour $\Im(\omega) > 0$ et sont analytiques dans ce cas à condition que f^0 et f_0 le soient. Pour pouvoir traiter également le cas de $\Im(\omega) \leq 0$ qui existe physiquement et qui correspond à l'amortissement de la perturbation initiale, nous allons définir un prolongement analytique de ces fonctions pour $\Im(\omega) \leq 0$. Considérons donc une fonction de la forme

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v)}{v - \frac{\omega}{k}} dv.$$

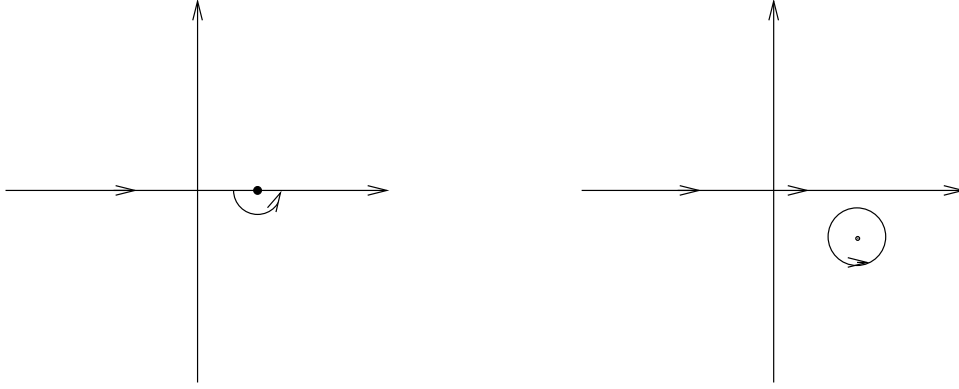


FIG. 3.1 – Contour pour pôle sur l'axe réel à gauche et pour pôle en dessous de l'axe réel à droite

Supposons $g \in L^1(\mathbb{C})$. Alors la fonction $G(\omega)$ est analytique pour $\Im(\omega) > 0$. Soit γ l'axe réel paramétré par $v \in [-\infty, +\infty]$. Alors on a

$$G(\omega) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - \frac{\omega}{k}}.$$

Pour $\Im(\omega) > 0$ l'intégrale ne présente pas de singularité et donc $G(\omega)$ est analytique. Comme g est intégrable, l'intégrale sur deux contours différents allant vers l'infini de chaque coté est identique s'il n'y a pas de pôle entre les deux contours. Ainsi pour $\Im(\omega) > 0$, on peut définir $G(\omega)$ en utilisant à la place de l'axe réel n'importe quel droite en dessous de l'axe réel sans changer sa valeur. Il en résulte que pour définir un prolongement analytique de $G(\omega)$ pour $\Im(\omega) \leq 0$, il suffit de définir $G(\omega)$ comme une intégrale sur une droite parallèle à l'axe réel qui passe en dessous du pôle ou sur n'importe quelle déformation de cette droite choisie pour faciliter le calcul de l'intégrale. Les contours choisis en pratique sont représentés sur la figure 3.1. Ainsi, en prenant le contour γ adapté, i.e. la droite réelle pour $\Im(\omega) > 0$, le contour sur la gauche de la figure 3.1 pour $\Im(\omega) = 0$ et le contour sur la droite de la figure 3.1 pour $\Im(\omega) < 0$, la fonction

$$G(\omega) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - \frac{\omega}{k}}$$

est analytique dans le plan complexe. On peut donc de la sorte définir un prolongement analytique de $D(s, k)$ et de $N(s, k)$ sur tout le plan complexe si nécessaire et exprimer leurs valeurs. En général les fonctions f^0 et f_0 sont des combinaisons linéaires de Maxwelliennes en v . Les fonctions g Maxwelliennes en v jouent donc un rôle essentiel dans le calcul des relations de dispersion. Fried et Conte [13] ont par conséquent introduit la fonction de dispersion d'un plasma noté Z et définie par

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{z - \zeta}, \quad (3.13)$$

où γ est n'importe quel contour ouvert parallèle à l'axe réel à l'infini et passant en dessous du pôle $z = \zeta$.

Proposition 1 *La fonction de dispersion du plasma Z définie par (3.13) est indépendante du contour γ de la forme $t \mapsto t + iu$ pour $|t|$ suffisamment grand et passant en dessous du pôle $z = \zeta$. On a de plus les expressions suivantes pour Z :*

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\Pr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du + i\pi e^{-\zeta^2} \right], \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} [i - \operatorname{erfi}(\zeta)], \quad (3.15)$$

où $\operatorname{erfi}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{t^2} dt$ est la fonction d'erreur complexe. On peut également exprimer les dérivées de Z en fonction de Z avec notamment les relations suivantes :

$$Z'(\zeta) = -2(1 + \zeta Z(\zeta)), \quad (3.16)$$

$$Z''(\zeta) = 4\zeta - 2(1 - 2\zeta^2)Z(\zeta). \quad (3.17)$$

Notons que pour $b \in \mathbb{R}$

$$\Pr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-b} du = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{b-\delta} \frac{g(u)}{u-b} du + \int_{b+\delta}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-b} du \right]$$

désigne la valeur principale de Cauchy.

Remarque 3 *La fonction d'erreur complexe erfi est une fonction spéciale classique disponible dans les logiciels de calcul formel ou numérique.*

Preuve. Pour démontrer que l'intégrale est indépendante du contour de la forme donnée choisie, il suffit de prendre deux contours différents de cette forme. Ces contours sont parallèles à l'axe réel en dehors de $[-A, A]$ pour A assez grand. On peut donc les relier en $-A$ et A par des segments de droite parallèles à l'axe imaginaire de sorte à obtenir un contour fermé. Comme les deux contours choisis sont en dessous du pôle et donc le contour fermé construit ne contient pas de pôle de sorte que l'intégrale sur ce contour est nulle. De plus, vu la forme de la fonction intégrée, il est clair que les intégrales sur les segments de droite parallèles à l'axe imaginaire tendent vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$. Il en résulte que l'intégrale sur les deux contours initiaux est la même. Pour obtenir l'expression (3.14), on choisit un contour passant par le pôle ζ et le contournant par le bas comme représenté sur le schéma de gauche de la figure 3.1. Ce contour peut être paramétré par $\gamma_1 : t \mapsto t + i\Im(\zeta)$ pour $|t - \Re(\zeta)| \geq \delta$ et $\gamma_2 : \theta \mapsto \zeta - \delta e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Et on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-z^2}}{z-\zeta} &= \int_{-\infty}^{\Re(\zeta)-\delta} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t+i\Im(\zeta)-\zeta} dt + \int_{\Re(\zeta)+\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t+i\Im(\zeta)-\zeta} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\Re(\zeta)-\delta} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t-\Re(\zeta)} dt + \int_{\Re(\zeta)+\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t-\Re(\zeta)} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = t - \Re(\zeta)$. Et donc en faisant tendre δ vers 0, on a

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{-z^2}}{z-\zeta} \rightarrow \Pr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du.$$

D'autre part

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{-z^2}}{z - \zeta} = \int_0^\pi \frac{e^{-(\zeta - \delta e^{i\theta})^2}}{-\delta e^{i\theta}} (-i\delta e^{i\theta}) d\theta \rightarrow i\pi e^{-\zeta^2} \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

En sommant les limites des intégrales sur les deux contours, on obtient l'expression (3.14).

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du &= e^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2\zeta u} \frac{du}{u}, \\ &= e^{-\zeta^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (e^{-2\zeta u} - e^{2\zeta u}) \frac{du}{u}, \\ &= -2e^{-\zeta^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\text{sh}(2\zeta u)}{u} du. \end{aligned}$$

Notons que comme $\text{sh}(2\zeta u) \sim 2\zeta u$ au voisinage de $u = 0$, il n'y a pas de singularité et l'intégrale est donc égale à sa valeur principale de Cauchy. Posons maintenant

$$y(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\text{sh}(2\zeta u)}{u} du.$$

Alors

$$y'(\zeta) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \text{ch}(2\zeta u) du,$$

et en dérivant puis en intégrant par parties

$$y''(\zeta) = 4 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u \text{sh}(2\zeta u) du = 4\zeta \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \text{ch}(2\zeta u) du = 2\zeta y'(\zeta).$$

Il en résulte que $y'(\zeta) = y'(0)e^{\zeta^2}$. Or $y'(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. D'où $y'(\zeta) = \sqrt{\pi}e^{\zeta^2}$. Ensuite, comme $y(0) = 0$, on a

$$y(\zeta) = \sqrt{\pi} \int_0^\zeta e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \text{erfi}(\zeta),$$

en utilisant la définition $\text{erfi}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{x^2} dx$. On en déduit alors l'expression (3.15) à partir de (3.14).

On obtient l'expression de Z' en dérivant (3.15) :

$$\begin{aligned} Z'(\zeta) &= -2\zeta Z(\zeta) - \text{erfi}'(\zeta) \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2}, \\ &= -2\zeta Z(\zeta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\zeta^2} \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2}, \\ &= -2\zeta Z(\zeta) - 2. \end{aligned}$$

Puis en rédérivant on obtient

$$\begin{aligned} Z''(\zeta) &= -2(Z(\zeta) + \zeta Z'(\zeta)), \\ &= -2(Z(\zeta) - 2\zeta - 2\zeta^2 Z(\zeta)), \\ &= 4\zeta - 2(1 - 2\zeta^2)Z(\zeta). \end{aligned}$$

■

On peut maintenant poursuivre le calcul de $D(k, \omega)$. On a

$$f^0(v) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

et donc

$$\frac{\partial f^0}{\partial v}(v) = -\frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \frac{v}{v_{th}^2} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}.$$

En reportant cette expression dans l'expression de $D(k, \omega)$ (3.11) et en introduisant la fréquence plasma $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$, on obtient

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}}, \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v - \frac{\omega}{k}) e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv + \frac{\omega}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}} dv = 1.$$

Ensuite en faisant le changement de variable $u = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$, il vient

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u - \frac{\omega}{k\sqrt{2}v_{th}}} du \right].$$

En utilisant l'expression de la fonction de dispersion du plasma Z cette relation s'écrit

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k} Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right) \right], \quad (3.18)$$

ce qui devient avec l'expression de Z donnée par (3.15)

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}\omega}{\sqrt{2}v_{th}k} e^{-\frac{\omega^2}{2v_{th}^2 k^2}} \left(i - \operatorname{erfi}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right) \right) \right], \quad (3.19)$$

et en utilisant l'expression de Z' en fonction de Z (3.16) on obtient la forme la plus simple suivante

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} Z'\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right). \quad (3.20)$$

Ces calculs ont été fait sur l'expression initiale valable pour $\Im(\omega) > 0$, mais en faisant le prolongement analytique comme nous l'avons vu, on obtient les mêmes expressions en choisissant le contour d'intégration adéquat pour ω quelconque.

Nous pouvons maintenant passer de la même manière au calcul de $N(k, \omega)$ en supposant que

$$f_0^1(x, v) = g(x) \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

où g est une fonction donnée en général de la forme $g(x) = \cos(kx)$. On a alors

$$\hat{f}_0^1(k, v) = \hat{g}(k) \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}.$$

Puis

$$\begin{aligned} N(k, \omega) &= -\frac{e}{k^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0^1}{v - \frac{\omega}{k}} dv, \\ &= -g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv. \end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables $u = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$ pour obtenir

$$N(k, \omega) = -g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u - \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}} du.$$

On reconnaît la fonction de dispersion des plasmas Z et on a donc

$$N(k, \omega) = -g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}v_{th}} Z\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}k}\right). \quad (3.21)$$

Finalement à partir des expressions (3.20) et (3.21), on obtient une formule explicite pour la transformée de Laplace du champ électrique \hat{E} . On en déduit ensuite le champ électrique à l'aide des formules de transformée de Fourier et de Laplace inverse. En commençant par la transformée de Laplace inverse (A.4), on a

$$\hat{E}(k, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+iu}^{+\infty+iu} \tilde{E}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

On peut calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus en fermant le contour par un demi-cercle vers le bas du plan complexe de rayon tendant vers l'infini. En supposant que $\tilde{E}(k, \omega)$ est analytique en dehors d'un nombre fini de pôles et que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 quand le rayon tend vers l'infini, on aura simplement

$$\hat{E}(k, t) = \sum_j \text{Res}_{\omega=\omega_j}(\tilde{E}(k, \omega)) e^{-i\omega_j t},$$

où la somme est effectuée sur les pôles.

Pour obtenir une valeur explicite de cette expression du champ électrique, il ne reste plus qu'à calculer numériquement pour k fixé les valeurs de ω pour lesquelles $D(k, \omega)$ s'annule. Dans Maple à l'aide de la commande *fsolve* on obtient les valeurs suivantes de ω pour différents k :

k	ω
0,5	1,4156 - 0,1533i
0,4	1,2850 - 0,0661i
0,3	1,1598 - 0,0126i
0,2	1,0640 - 5,510 × 10 ⁻⁵ i

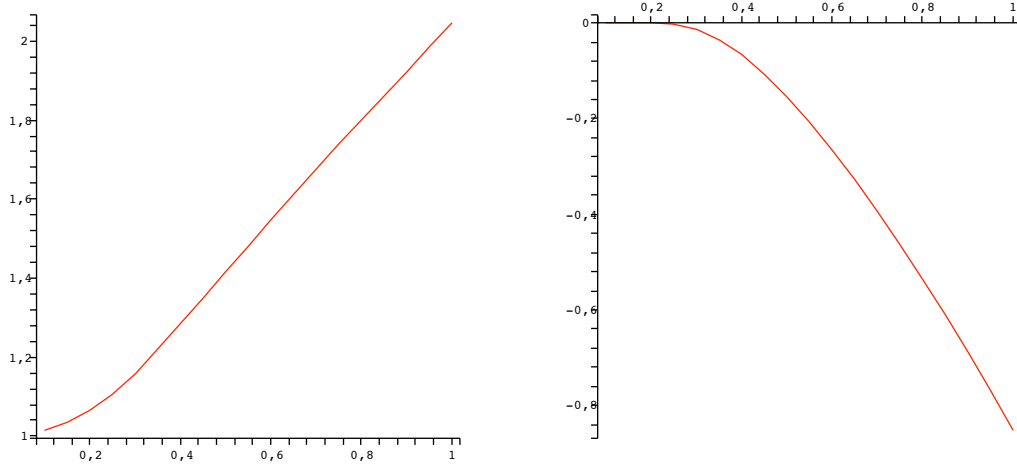


FIG. 3.2 – Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des zéros ω de $D(k, \omega)$ en fonction de k .

Les ondes qui intéressent les physiciens dans une distribution d'électrons ont en général une vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} \gg v_{th}$ ce qui correspond à la limite $\frac{\omega}{kv_{th}} \rightarrow +\infty$. On peut alors simplifier la relation de dispersion en faisant un développement limité de la fonction $erfi$ au voisinage de $+\infty$. Pour ceci on va commencer par chercher un développement limité de sa dérivée $erfi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}$. Considérons la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} \right).$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x^2} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4} + \frac{3}{2x^4} - \frac{15}{4x^6} \right).$$

Il en résulte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$erfi'(x) = g'(x) + O\left(\frac{e^{x^2}}{x^6}\right),$$

puis comme $erfi(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, la constante apparaissant dans l'intégration est négligeable et il vient

$$erfi(x) = g(x) + O\left(\frac{e^{x^2}}{x^7}\right).$$

Finalement en remplaçant $erfi$ par cette expression dans l'expression de $D(k, \omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 - \left(1 + \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2} + \frac{3k^4 v_{th}^4}{\omega^4} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{th}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{th}^2}} \right] \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p^2 \omega}{k^3 v_{th}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{th}^2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette expression correspond à l'expression classique que l'on trouve dans les livres d'introduction à la physique des plasmas comme par exemple [9] et qui est en général dérivée en faisant l'hypothèse $\frac{\omega}{k} \gg v_{th}$ pour calculer l'intégrale

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv,$$

et en faisant un développement limité du dénominateur.

A partir de l'expression (3.22) de D , on peut obtenir une expression explicite des parties réelle ω_r et imaginaire ω_i de ω en supposant $\omega_i \ll \omega_r$. On a alors au premier ordre $D_r(\omega_r, k) = 0$ et

$$\omega_i = -\frac{D_i(\omega_r, k)}{\frac{\partial D_r}{\partial \omega_r}(\omega_r, k)}.$$

La relation de dispersion que nous avons dérivée dans cette section peut également être utilisée pour d'autres distributions d'équilibre. Un cas utile en pratique est la superposition de plusieurs maxwelliennes centrées en différentes vitesses et avec des vitesses thermiques différentes. On a dans ce cas

$$f^0(v) = \frac{n_0}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_{th_i}} e^{-\frac{(v-v_i)^2}{2v_{th_i}^2}},$$

et la relation de dispersion s'écrit

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{Nk^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_{th_i}^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{kv_{th_i}} - \frac{v_i}{v_{th_i}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} - v_i)^2}{2v_{th_i}^2}} \left(i - \text{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} - v_i}{\sqrt{2}v_{th_i}} \right) \right) \right].$$

3.2 L'équation de Vlasov linéaire

On parle d'équation de Vlasov linéaire lorsque les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont supposés connus indépendamment de f . En normalisant les constantes à un l'équation de Vlasov s'écrit dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.23)$$

où $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ sont des champs donnés. En posant

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

l'équation (3.23) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_{(x,v)} f = 0. \quad (3.24)$$

C'est donc une équation d'advection linéaire dans l'espace des phases. En outre

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,v)} \cdot \mathbf{A} &= \nabla_x \cdot \mathbf{v} + \nabla_v \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial v_1} (E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) + \frac{\partial}{\partial v_2} (E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3) + \frac{\partial}{\partial v_3} (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de Vlasov peut donc également s'écrire sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{(x,v)} \cdot (\mathbf{A}f) = 0, \quad (3.25)$$

car $\nabla_{(x,v)} \cdot (\mathbf{A}f) = \mathbf{A} \cdot \nabla_{(x,v)} f + f \nabla_{(x,v)} \cdot \mathbf{A}$.

Remarque 4 Ces propriétés ne dépendent pas du fait que \mathbf{E} et \mathbf{B} soient donnés indépendamment de f et sont donc également valables dans le cas non linéaire.

On est donc ramené à une équation d'advection linéaire de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla f = 0, \quad (3.26)$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{A} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant le système différentiel

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}, \quad (3.28)$$

qui est naturellement associé à l'équation d'advection (3.26).

Définition 1 On appelle les solutions de (3.27) les caractéristiques de l'équation d'advection linéaire (3.26). On note $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ la solution de (3.27)- (3.28).

Rappelons le théorème classique de la théorie des équations différentielles qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (3.27)- (3.28). On en trouvera la preuve dans [2] ou [8] par exemple.

Théorème 1 On suppose que $\mathbf{A} \in C^{k-1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, $\nabla \mathbf{A} \in C^{k-1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ pour $k \geq 1$ et que

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)| \leq \kappa(1 + |\mathbf{x}|) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Alors pour tout $s \in [0, T]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $\mathbf{X} \in C^k([0, T]_t \times [0, T]_s \times \mathbb{R}^d_x)$ de (3.27)- (3.28).

Proposition 2 Sous les hypothèses du théorème précédent, on a les propriétés suivantes :

(i) $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x}).$$

(ii) $\forall (t, s) \in [0, T]^2$, l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ est un C^1 - difféomorphisme de \mathbb{R}^d d'inverse $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{X}(t; s, \mathbf{y})$.

(iii) Le jacobien $J(t; s, 1) = \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}))$ vérifie

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{A})(t; \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}))J,$$

et $J > 0$. En particulier si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $J(t; s, 1) = J(s; s, 1) = \det \mathbb{I}_d = 1$, où \mathbb{I}_d est la matrice identité d'ordre d .

Preuve.

- (i) Les points $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t_1; t_1, \mathbf{x})$, $\mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})$, $\mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x})$ sont sur une même caractéristique. Celle qui est caractérisée par la condition initiale $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{x}$. Ainsi en prenant l'un quelconque de ces points comme condition initiale au temps correspondant, on obtient la même solution de (3.27)- (3.28). On a ainsi en particulier $\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x})$.
- (ii) En prenant $t_1 = t_3$ dans l'égalité du (i) on a

$$\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_3, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_3, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Donc $\mathbf{X}(t_3; t_2, \cdot)$ est l'inverse de $\mathbf{X}(t_2; t_3, \cdot)$ (on note $g(\cdot)$ la fonction $x \mapsto g(x)$) et les deux applications sont de classe C^1 en raison du théorème précédent.

- (iii) Soit

$$J(t; s, 1) = \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) = \det\left(\left(\frac{\partial X_i(t; s, \mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq d}\right).$$

Or \mathbf{X} vérifie $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}(t), t)$. Donc en particulier en prenant la i ème ligne de cette égalité $\frac{dX_i}{dt} = A_i(\mathbf{X}(t), t)$. Et en prenant le gradient de cette égalité, on obtient

$$\frac{d}{dt} \nabla X_i = \sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Pour une matrice M d'ordre d le déterminant de M est une forme d -linéaire alternée ayant pour argument les colonnes de M , on peut donc, en notant (\cdot, \dots, \cdot) cette forme d -linéaire alternée, écrire $\det M = (M_1, \dots, M_d)$ où M_j est la j ème colonne de M . En appliquant cette notation au cas qui nous intéresse on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(t; s, 1) &= \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) \\ &= \left(\frac{\partial \nabla X_1}{\partial t}, \nabla X_2, \dots, \nabla X_d\right) + \dots + \left(\nabla X_1, \nabla X_2, \dots, \frac{\partial \nabla X_d}{\partial t}\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_k}, \nabla X_2, \dots, \nabla X_d\right) + \dots + \left(\nabla X_1, \nabla X_2, \dots, \sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_d}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} J + \dots + \frac{\partial A_d}{\partial x_d} J, \end{aligned}$$

car (\cdot, \dots, \cdot) est d -linéaire alternée. On a donc bien $\frac{\partial J}{\partial t}(t; s, 1) = (\nabla \cdot \mathbf{A})J$. D'autre part $\nabla_x \mathbf{X}(s; s, \mathbf{x}) = \nabla_x \mathbf{x} = \mathbb{I}_d$ et donc $J(s; s, \mathbf{x}) = \det \mathbb{I}_d = 1$. J est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{A})J, \quad J(s) = 1,$$

qui a pour unique solution $J(t) = e^{\int_s^t \nabla \cdot \mathbf{A} dt} > 0$ et en particulier si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, on a $J(t; s, 1) = 1$ pour tout t . ■

Après avoir mis en évidence les propriétés des caractéristiques, on peut maintenant exprimer la solution de l'équation d'advection linéaire (3.26) à l'aide des caractéristiques.

Théorème 2 Soit $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et \mathbf{A} un champ de vecteur vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Il existe alors une unique solution de l'équation d'advection linéaire (3.26) associée à la condition initiale $f(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x})$. Elle est donnée par

$$f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})), \quad (3.29)$$

où \mathbf{X} représente les caractéristiques associées à \mathbf{A} .

Preuve. La fonction f donnée par (3.29) est C^1 car f_0 et \mathbf{X} le sont et \mathbf{X} est défini de manière unique. Vérifions que f est bien une solution de (3.26) et qu'elle vérifie la condition initiale. On a tout d'abord de manière immédiate avec la formule (3.29)

$$f(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{X}(0; 0, \mathbf{x})) = f_0(\mathbf{x}).$$

On a ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X}{\partial s}(0; t, \mathbf{x}) \cdot \nabla f_0(0; t, \mathbf{x}),$$

puis

$$\begin{aligned} \nabla_x f(\mathbf{x}, t) &= \nabla_x (f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}))) \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \nabla_x X_k(0; t, \mathbf{x}), \\ &= \nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})), \end{aligned}$$

au sens du produit matrice vecteur avec la matrice jacobienne

$$\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l}(0; t, \mathbf{x}) \right)_{1 \leq k, l \leq d} \right).$$

On a alors

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f \right)(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X}{\partial s}(0; t, \mathbf{x}) \cdot \nabla f_0(0; t, \mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \right). \quad (3.30)$$

Or on a également grâce aux propriétés des caractéristiques que $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t; r, \mathbf{x})$ et en différenciant cette relation par rapport à s , on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) + \nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s; r, \mathbf{x}) = 0.$$

Or par définition des caractéristiques $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s; r, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, s)$ et de plus cette relation est vérifiée pour toutes valeurs de t, r, s et donc en particulier pour $r = s$. Elle devient dans ce cas

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(t; s, \mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, s) = 0.$$

En reportant cette expression dans (3.30) on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f \right)(\mathbf{x}, t) &= -\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \\ &\quad + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \right). \end{aligned}$$

Or pour une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, on a $(M\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T M^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (M^T \mathbf{v})$. Il vient donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f = 0,$$

ce qui signifie que f définie par (3.29) est solution de (3.26).

Le problème étant linéaire si f_1 et f_2 sont deux solutions on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1 - f_2) + \mathbf{A} \cdot \nabla_x(f_1 - f_2) = 0,$$

et donc en utilisant les caractéristiques $\frac{d}{dt}(f_1 - f_2)(\mathbf{X}(t), t) = 0$. Ainsi si f_1 et f_2 vérifient la même condition initiale, elles sont identiques ce qui donne l'unicité de la solution qui est donc bien celle donnée par la formule (3.29). ■

Exemples

1. L'équation de transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Les caractéristiques sont solution de

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

On a donc $V(t; s, x, v) = v$ et $X(t; s, x, v) = x + (t - s)v$ ce qui donne pour solution

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v).$$

2. Focalisation uniforme dans un accélérateur (modèle 1D). On a alors $E(x, t) = -x$ et l'équation de Vlasov s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = -X.$$

On a donc $X(t; s, x, v) = x \cos(t - s) + v \sin(t - s)$ et $V(t; s, x, v) = -x \sin(t - s) + v \cos(t - s)$ ce qui donne pour solution

$$f(x, v, t) = f_0(x \cos t - v \sin t, x \sin t + v \cos t).$$

3.3 L'équation de Vlasov non linéaire

3.3.1 Propriétés de conservation formelles

On appelle équation de Vlasov non linéaire, l'équation de Vlasov couplée avec les équations de Maxwell ou un modèle réduit comme les équations de Poisson. Elle a un certain nombre de propriétés de conservation qu'on devra soit essayer de conserver exactement dans les méthodes numériques soit qu'on pourra utiliser pour tester la validité de la simulation.

Rappelons les équations de Vlasov-Maxwell adimensionnée pour une seule espèce de particules :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.31)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.35)$$

avec

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

On remarque d'abord que l'équations de Vlasov (3.31) peut également s'écrire sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}f) = 0, \quad (3.36)$$

avec $\mathbf{F} = (\mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^T$ tel que $\nabla_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = 0$.

Proposition 3 *Les équations de Vlasov-Maxwell vérifient les propriétés suivantes :*

– *Principe du maximum*

$$0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \leq \max_{(x,v)}(f_0(x, v)). \quad (3.37)$$

– *Conservation des normes L^p , p entier, $1 \leq p \leq \infty$*

$$\frac{d}{dt} \left(\int (f(t, x, v))^p d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right) = 0 \quad (3.38)$$

– *Conservation du volume. Pour tout volume V de l'espace des phases*

$$\int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int_{F^{-1}(V)} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u}. \quad (3.39)$$

– *Conservation de l'énergie.*

$$\frac{d}{dt} \left[\int v^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int (E^2 + B^2) d\mathbf{x} \right] = 0. \quad (3.40)$$

Preuve. Le système définissant les caractéristiques associées s'écrit

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(t), \quad (3.41)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{V}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)). \quad (3.42)$$

On note $(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s), \mathbf{V}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s))$, ou de manière plus concise $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))$ quand la dépendance par rapport aux conditions initiales n'est pas explicitement nécessaire, l'unique solution au temps t de ce système qui prend la valeur (\mathbf{x}, \mathbf{v}) au temps s .

En utilisant (3.41)-(3.42), l'équation de Vlasov (3.31) peut s'exprimer de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))) = 0.$$

On a donc

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

De cette expression, on déduit que f vérifie un principe du maximum qui peut s'écrire comme f_0 est positive

$$0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \leq \max_{(x,v)}(f_0(x, v)).$$

En multipliant l'équation de Vlasov (3.31) par f^{p-1} et en intégrant sur tout l'espace des phases on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\int (f(t, x, v))^p d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right) = 0,$$

de sorte que les normes L^p de f sont conservées pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Notons que la norme L^∞ est également conservé en vertu du principe du maximum (3.37).

En intégrant sur un volume arbitraire V de l'espace des phases et en utilisant que f est conservée le long des caractéristiques on a

$$\begin{aligned} \int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} &= \int_V f(t, \mathbf{X}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= \int_V f(0, \mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= \int_V f_0(\mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

maintenant en faisant le changement de variables $\mathbf{y} = \mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dont le jacobien vaut 1 en vertu de la proposition 2 car

$$\nabla_{(x,v)} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0,$$

on obtient

$$\int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int_{F^{-1}(V)} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u}.$$

On a également la conservation de l'énergie pour le système de Vlasov-Maxwell. Pour l'obtenir on commence par multiplier l'équation de Vlasov par $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ à intégrer sur l'espace des phases

$$\frac{d}{dt} \int v^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \nabla_x \cdot (v^2 \mathbf{v} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int v^2 \nabla_v \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

Or comme f tend vers 0 à l'infini on a

$$\int \nabla_x \cdot (v^2 \mathbf{v} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0$$

et

$$\int v^2 \nabla_v \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{v} \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{x}.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int v^2 f \, d\mathbf{x}d\mathbf{v} = 2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{x}. \quad (3.43)$$

On prend maintenant le produit scalaire de l'équation d'Ampère avec \mathbf{E} et on intègre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int E^2 \, d\mathbf{x} - \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = - \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x}, \quad (3.44)$$

puis on prend le produit scalaire de l'équation de Faraday avec \mathbf{B} et on intègre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int B^2 \, d\mathbf{x} + \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.45)$$

En utilisant la formule de Green sur le rotationnel dans un domaine périodique on obtient

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x},$$

Ainsi en faisant la somme des équations (3.43) et deux fois les équations (3.44) et (3.45), on obtient la conservation de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt} \left[\int v^2 f \, d\mathbf{x}d\mathbf{v} + \int (E^2 + B^2) \, d\mathbf{x} \right] = 0,$$

le premier terme représentant l'énergie cinétique des particules et le deuxième l'énergie potentielle. ■

3.3.2 Etude mathématique du système de Vlasov-Poisson

On considère dans cette partie l'équation de Vlasov adimensionnée

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.46)$$

couplée avec l'équation de Poisson

$$-\Delta \phi = \rho = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (3.47)$$

Notons d'abord que le système de Poisson vérifie les mêmes propriétés de conservation (3.37)-(3.40) que le système de Vlasov-Maxwell, la conservation de l'énergie s'écrivant dans ce cas

$$\frac{d}{dt} \left[\int v^2 f \, d\mathbf{x}d\mathbf{v} + \int E^2 \, d\mathbf{x} \right] = 0. \quad (3.48)$$

La vérification de (3.37)-(??) se fait comme dans la section précédente. La conservation de l'énergie se vérifie de manière différente. On intègre d'abord l'équation de Vlasov en vitesse pour obtenir l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \mathbf{J} = 0. \quad (3.49)$$

Ensuite on a en utilisant cette relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int E^2 \, d\mathbf{x} &= \int \nabla \phi \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int \phi \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \, d\mathbf{x} = \int \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} \\ &= - \int \phi \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{x} = \int \nabla \phi \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{x} = - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

puis on conclut comme dans le cas de Vlasov-Maxwell.

Etude de l'équation de Poisson. Notons e la solution fondamentale du Laplacien qui est la distribution vérifiant $-\Delta e = \delta$. On peut vérifier que

$$e = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

On peut exprimer pour tout second membre ρ la solution de $-\Delta \phi = \rho$ en fonction de e . En effet en appliquant la transformée de Fourier à l'équation on obtient $|\mathbf{k}|^2 \hat{\phi} = \hat{\rho}$ et donc $\hat{\phi} = \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{k}|^2}$. D'autre part, on a $\hat{\delta} = 1$, donc en appliquant cette relation pour $\rho = \delta$, il vient $\hat{e} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}$. Il en résulte que $\hat{\phi} = \hat{e} \hat{\rho}$ et donc $\phi = e \star \rho$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{E} = -(\nabla e) \star \rho = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \star \rho. \quad (3.50)$$

Lemme 1 *On a l'estimation*

$$\|\mathbf{E}(t)\|_\infty \leq C \|\rho(t)\|_\infty^{4/9} \|\rho(t)\|_{5/3}^{5/9}.$$

Preuve. En utilisant la relation (3.50), on a

$$4\pi |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)| \leq \int \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \leq \|\rho(t)\|_\infty \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} + \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R} \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y}.$$

Passons en coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times [0, \pi[\times [0, 2\pi[$ pour calculer la première intégrale

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Le jacobien de cette transformation vaut $r^2 \sin \theta$. On a donc

$$\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta d\varphi = 2\pi R [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R,$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder pour $p = \frac{5}{3}$ et $q = \frac{5}{2}$,

$$\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R} \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \leq \|\rho(t)\|_{5/3} \left(\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^5} d\mathbf{y} \right)^{2/5}.$$

Or en passant en coordonnées sphériques

$$\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^5} d\mathbf{y} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_R^{+\infty} \frac{r^2}{r^5} dr = \frac{\pi^2}{2R^2},$$

donc

$$\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R} \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \leq \frac{\pi^{4/5}}{2^{2/5}} \|\rho(t)\|_{5/3} R^{-4/5}.$$

Ces majorations sont valables pour tout $R > 0$. On cherche maintenant R , qui équilibre les deux majorants, i.e. tel que

$$\|\rho\|_\infty R = \|\rho\|_{5/3} R^{-4/5}.$$

On trouve alors

$$R^{9/5} = \frac{\|\rho\|_{5/3}}{\|\rho\|_\infty},$$

ce qui nous donne l'inégalité désirée en reportant dans les majorants. \blacksquare