

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Les plasmas

Lorsqu'un gaz est porté à une température très élevée ( $10^4 K$  ou plus) des électrons quittent l'orbite du noyau de l'atome auquel ils sont rattachés dans le gaz. On obtient alors un mélange globalement neutre des particules chargées, ions et électrons qui est appelé plasma. Les plasmas sont considérés à côté des solides, des liquides et des gaz, comme le quatrième état de la matière.

On peut également obtenir ce qu'on appelle un plasma non neutre, ou un faisceau de particules chargées, en imposant une très forte différence de potentiel de sorte à extraire soit des électrons, soit des ions d'un métal bien choisi. Un tel dispositif se trouve en général dans l'injecteur d'un accélérateur de particules.

Les utilisations des plasmas dans la vie courante sont devenues fréquentes. On peut citer par exemple les tubes à néon ou les écrans plasma. Il y a également un certain nombre d'applications industrielles : amplificateurs dans les satellites de télécommunication, gravure par plasma en micro-électronique, production de rayons X. Il faut également mentionner que même s'il est quasiment absent à l'état naturel sur la Terre, hormis les aurores boréales au pôle, le plasma constitue 99% de la masse de l'univers. Notamment les étoiles sont formées de plasmas et l'énergie qu'elles dégagent provient du processus de fusion de noyaux légers comme les protons.

### 1.2 La fusion thermonucléaire contrôlée

L'évolution des besoins énergétiques et l'épuisement des combustibles fossiles rendent indispensable de développer de nouvelles sources d'énergie. Selon la formule bien connue  $E = mc^2$ , on peut produire de l'énergie en réalisant une transformation qui fait disparaître de la masse. Il existe deux grands types de réactions nucléaires ayant cet effet. La réaction de fission qui consiste à générer deux noyaux plus légers à partir du noyau d'un atome lourd et la réaction de fusion qui consiste à créer à partir de deux atomes légers un noyau plus lourd. La fission est utilisée dans les centrales nucléaires actuelles. La fusion contrôlée en est encore au stade de la recherche.

La réaction de fusion la plus accessible consiste à faire fusionner des noyaux de Deutérium et de Tritium pour obtenir un atome d'Hélium et un neutron très énergétique qui servira à produire la chaleur nécessaire à fabriquer de l'électricité (voir fig. 1.1).

Les températures requises pour la fusion thermonucléaire dépassent la centaine de

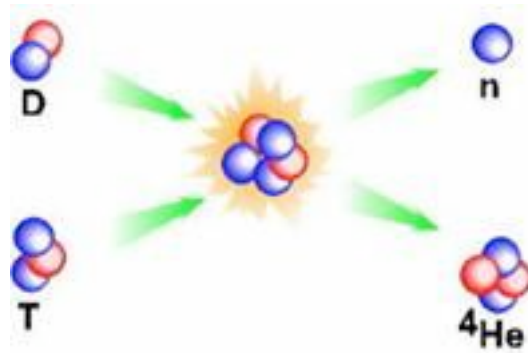


FIG. 1.1 – La réaction de fusion Deuterium-Tritium

millions de degrés. A ces températures les électrons se détachent complètement de leur atome et on obtient un gaz d'électrons et d'ions appelé plasma. Pour pouvoir produire de l'énergie, il est bien entendu nécessaire que le facteur d'amplification  $Q$  qui est le rapport de la puissance produite à la puissance extérieure fournie soit supérieur à un. Un bilan énergétique permet d'établir le critère de Lawson qui relie le facteur d'amplification  $Q$  au produit  $nTt_E$  où  $n$  est la densité,  $T$  la température et  $t_E$  le temps de confinement de l'énergie.

La fusion est à la base de l'énergie des étoiles dans lesquelles un confinement à une densité suffisante est assuré par leur masse. Les travaux de recherche sur la fusion contrôlée sur Terre envisagent deux approches : la fusion par confinement inertiel qui consiste à atteindre une densité très élevée pendant un temps relativement court en tirant sur une capsule de Deuterium et Tritium avec des faisceaux laser ; la fusion par confinement magnétique qui consiste à confiner le plasma grâce à un champ magnétique à une densité moins élevée mais pendant un temps plus long. Cette dernière approche est poursuivie dans le projet ITER dont la construction vient de démarrer à Cadarache dans le sud-est de la France. Le plasma est confiné dans une chambre de forme toroidale appelée tokamak qui pour ITER est représentée sur la figure 1.2.

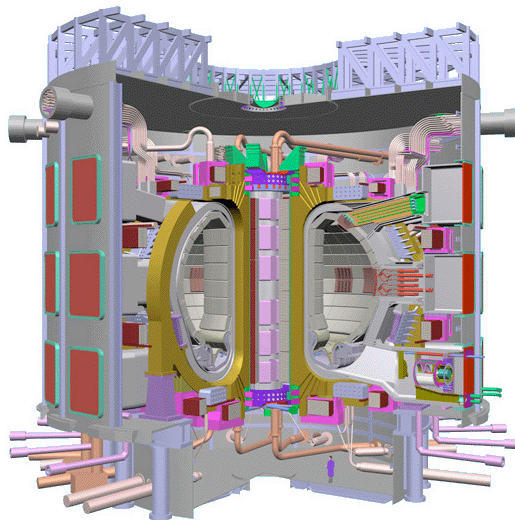


FIG. 1.2 – Vue d'artiste du Tokamak ITER

Notons que deux approches sont poursuivies pour le confinement inertiel, d'une part le confinement utilisant des lasers de très grande puissance pour lequel des installations expérimentales (NIF aux Etats-Unis et LMJ en France) sont en cours de construction pour la validation expérimentale du concept et d'autre part le confinement à l'aide de faisceaux d'ions lourds. On pourra se référer au site de L'Institut Lasers et Plasmas à Bordeaux pour plus d'informations sur la fusion inertielle par laser <http://www.ilp.u-bordeaux1.fr> et au site <http://hif.lbl.gov/tutorial/tutorial.html> pour la fusion par ions lourds.

Le record actuel de puissance de fusion produite en Deuterium-Tritium est de 16 MégaWatts correspondant à un facteur d'amplification  $Q = 0,64$  dans le tokamak JET en Angleterre. Il est bien établi que pour obtenir un facteur d'amplification bien supérieur à un, il est nécessaire d'utiliser une machine plus grande, d'où la nécessité de la construction du tokamak ITER, qui contiendra un plasma de volume cinq fois plus grand que celui de JET, pour démontrer la faisabilité d'une centrale basée sur la fusion magnétique. Le facteur d'amplification prévu dans ITER devrait être supérieur à 10.

On pourra se référer au site suivant maintenu par le CEA pour en savoir plus sur la fusion magnétique <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>.

### 1.3 Le projet ITER

Le projet ITER est un partenariat entre l'Union Européenne, le Japon, la Chine, la Corée du sud, la Russie, les USA et l'Inde dont l'accord international a été signé le 21 novembre 2006 à Paris. Il a pour objectif de démontrer la faisabilité scientifique et technique de la production d'électricité grâce à l'énergie de fusion avec des ressources importantes en combustible et des retombées faibles sur l'environnement.

Le construction du tokamak ITER vient de démarrer à Cadarache dans le sud-est de la France et la phase d'exploitation devrait commencer vers 2016 et durer une vingtaine d'années. Les principaux objectifs d'ITER sont d'une part d'atteindre un facteur d'amplification supérieur à 10 et ainsi de vraiment permettre la production d'énergie, d'autre part de mettre en oeuvre et de tester les technologies nécessaires pour une centrale à fusion et finalement de tester les concepts de production de Tritium à partir de la ceinture de Lithium utilisée pour absorber l'énergie des neutrons.

En cas de succès l'étape suivante appelée DEMO sera de construire un réacteur de fusion électrogène d'étude avant de passer aux centrales à fusion commerciales.

Plus d'informations sont disponibles sur le site <http://www.iter.org>.

### 1.4 L'équation de Vlasov

Nous nous intéresserons dans ce cours plus particulièrement à un des modèles couramment utilisé pour décrire l'évolution d'un plasma qui est appelé modèle cinétique et qui est basé sur l'équation de Vlasov qui décrit l'évolution de particules chargées dans un champ électromagnétique qui peut être soit auto-consistant, c'est-à-dire engendré par les particules elles-mêmes, soit appliqué de l'extérieur, ou le plus souvent, les deux à la fois. Elle s'écrit pour une espèce de particules non relativistes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

où  $m$  est la masse des particules,  $q$  leur charge et  $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  représente la densité de particules dans l'espace des phases au point  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  et au temps  $t$ . Elle a la structure d'une équation de transport dans l'espace des phases qui comprend les trois dimensions de l'espace physique et les trois dimensions de l'espace des vitesses (ou des quantités de mouvement dans le cas relativiste). Le champ électromagnétique auto-consistant peut être calculé grâce à un couplage avec l'équation de Maxwell dont les sources qui sont les densités de charge et de courant sont calculées à partir des particules :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = q \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

Les plasmas, en particulier les plasmas de fusion, sont des objets extrêmement complexes, mettant en jeu des interactions non linéaires et des échelles de temps et d'espace multiples. Ils sont sujet à de nombreuses instabilités et à des phénomènes de turbulence qui s'opposent à leur confinement. La route vers la fusion thermonucléaire comme source d'énergie passe donc par une compréhension très fine des plasmas à l'aide de modèles adaptés et de simulations numériques basées sur ces modèles.

La résolution numérique du système de Vlasov-Maxwell tri-dimensionnel représente un défi important ne serait-ce qu'à cause de la taille énorme du système venant du fait que l'équation de Vlasov est posée dans l'espace des phases 6D et du couplage non linéaire entre Vlasov et Maxwell. Les sept variables à prendre en compte sont les trois variables donnant la position dans l'espace physique ainsi que les trois variables de vitesse en plus du temps. Pour que le modèle soit utilisable en pratique, il sera donc indispensable d'avoir recours à des modèles réduits qui peuvent être suffisamment précis grâce à certaines spécificités du système étudié : symétries, variables négligeables, etc. En outre les propriétés spécifiques de l'équation de Vlasov vont nécessiter d'utiliser des méthodes numériques conçues spécialement pour ce genre d'équations.

## 1.5 Objectifs du cours

L'objectif de ce cours va être de vous familiariser avec différentes techniques d'étude théorique de l'équation de Vlasov et de présenter les principales méthodes numériques utilisées pour la simulation. Nous présenterons aussi plusieurs exemples d'utilisation de l'équation de Vlasov : Dans un premier temps les exemples académiques de l'amortissement Landau, de l'instabilité double faisceaux ou du transport d'un faisceau de particules dans un accélérateur qui pourront servir de cas tests pour valider les codes développés. Nous nous intéresserons d'autre part au problème de l'interaction laser-plasma que l'on rencontre dans la fusion inertielle et également à la dérivation formelle, telle qu'elle est faite par les physiciens, du modèle gyrocinétique qui est une approximation de l'équation de Vlasov dans un champ magnétique très fort comme c'est le cas dans les Tokamaks.

## Chapitre 2

# Modélisation des plasmas

### 2.1 Introduction

Nous nous intéressons à des modèles décrivant l'interaction de particules chargées sous l'effet d'un champ électromagnétique qu'elles génèrent d'une part elles-mêmes ou qui est externe ou, en général la combinaison des deux. Toute particule chargée génèrent un champ électromagnétique qui même si son intensité décroît avec la distance à la particule à un effet dans tout l'espace. Le modèle complet pour décrire un plasma consiste donc à expliciter le mouvement d'une particule, à l'aide de la loi de Newton, sous l'effet de tous ces champs combinés ainsi que d'éventuels champs externes. Vu la quantité énorme de particules dans un plasma, même pour les moins denses, il est impossible d'utiliser un tel modèle pour simuler numériquement l'évolution d'un plasma. Il faut donc avoir recours à des modèles approchés, soit cinétiques comme l'équation de Vlasov, soit fluides. Même si elles jouent un rôle prédominant dans certaines applications, que nous ne considérerons pas ici, nous négligerons dans ce cours les collisions entre particules qui ont bien entendu une influence sur leur dynamique.

### 2.2 Une hiérarchie de modèles pour les plasmas

#### 2.2.1 Le modèle à $N$ -corps

Au niveau microscopique, un plasma ou un faisceau de particules est composé d'un certain nombre de particules qui évoluent tous suivant les lois classiques de la dynamique relativiste ou non. Chaque particule obéit donc à la loi de Newton

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}}{dt} = \sum F_{ext},$$

où  $m$  est la masse de la particule,  $\mathbf{v}$  sa vitesse  $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$  le facteur de Lorentz ( $c$  étant la vitesse de la lumière). Le membre de droite  $F_{ext}$  est composé de l'ensemble des forces appliquées à la particule qui dans notre cas se réduisent à la force de Lorentz induite par les champs électromagnétiques extérieurs et générés par les autres particules. Les autres forces comme le poids des particules sont en général négligeables. On a donc

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}).$$

D'autre part, la vitesse d'une particule  $\mathbf{v}_i$  est liée à sa position  $\mathbf{x}_i$  par

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i.$$

Ainsi, si les positions et vitesses initiales des particules sont connues de même que les champs externes, l'évolution des particules est complètement déterminée par les équations

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.2)$$

**Remarque 1** *Ce système est Hamiltonien, ce qu'on peut voir le plus facilement dans le cas non relativiste avec un champ magnétique négligeable. Dans ce cas, le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Le hamiltonien s'écrit alors*

$$H = \frac{v_i^2}{2} + \frac{q}{m}\phi.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{v}_i, \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{q}{m}\nabla\phi = \frac{q}{m}\mathbf{E} \end{aligned}$$

*Le système des équations du mouvement d'une particule est également Hamiltonien dans le cas général, mais il faut introduire un jeu de coordonnées particulières appelées coordonnées canoniques pour trouver le Hamiltonien.*

En général un plasma est constitué d'un nombre très importants de particules,  $10^{10}$  et plus. Le modèle microscopique décrivant les interactions des particules deux à deux n'est donc pas utilisable dans une simulation numérique car il serait beaucoup trop coûteux. Il faut donc trouver des modèles approchés qui tout en restant suffisamment précis permettent d'atteindre un coût de calcul raisonnable. Il existe en fait une hiérarchie de modèles décrivant l'évolution d'un plasma. Le modèle de base de la hiérarchie qui est le plus précis est le modèle à  $N$  corps que nous venons de décrire, ensuite il existe des modèles intermédiaires qu'on appelle cinétiques et qui sont basés sur une description statistique de la distribution de particules dans l'espace des phases et finalement les modèles macroscopiques ou fluides qui assimilent chaque espèce de particules d'un plasma à un fluide caractérisé par sa densité, sa vitesse et son énergie. Les modèles fluides deviennent une bonne approximation lorsque les particules sont proches de l'équilibre thermodynamique et que la distribution de particules est maxwellienne.

## 2.2.2 Les modèles cinétiques

Dans un modèle *cinétique*, chaque espèce de particules  $s$  dans un plasma est caractérisé par sa fonction de distribution  $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  qui correspond à une moyenne statistique de la répartition des particules dans l'espace des phases pour un grand nombre de réalisations du système physique considéré. Le produit  $f_s d\mathbf{x} d\mathbf{v}$  est la moyenne du

nombre de particules de l'espèce  $s$ , dont la position et la vitesse sont dans une boîte de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$  centrée en  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . La fonction de distribution contient beaucoup plus d'informations que celles données par une description fluide car elle inclut des informations sur les répartitions des vitesses des particules.

Une description cinétique d'un plasma est indispensable quand la fonction de distribution est très éloignée de la distribution de Maxwell-Boltzmann (aussi appelée Maxwellienne) qui correspond à l'équilibre thermodynamique du plasma. Sinon une description fluide est suffisante. Dans la limite où les effets collectifs sont dominants sur les collisions binaires entre particules l'équation cinétique que l'on dérive, par des techniques de physique statistique du modèle à  $N$ -corps est l'équation de *Vlasov* qui s'écrit

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.3)$$

Cette équation exprime que la fonction de distribution  $f$  est conservée le long des trajectoires des particules qui sont déterminées par le champ électromagnétique moyen. Notons  $f_{s,0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  la valeur initiale de la fonction de distribution. L'équation de Vlasov, lorsqu'elle prend en compte le champ électromagnétique auto-consistant généré par les particules est couplées aux équations de Maxwell permettant de calculer ce champ à partir de la distribution des particules :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Les termes sources des équations de Maxwell, la densité de charges  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et la densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  s'expriment à partir des fonctions de distribution des différentes espèces de particules  $\int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$  à l'aide des relations

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Quand les collisions binaires entre particules sont dominantes par rapport aux effets de champ moyen. La fonction de distribution  $f$  satisfait l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = Q(f, f),$$

où  $Q$  est l'opérateur de collision non linéaire de Boltzmann. Dans certains cas intermédiaires, un opérateur de collision peut être ajouter comme membre de droite à l'équation de Vlasov.

### 2.2.3 Les modèles fluides

On peut dériver un modèle fluide de plasma en partant de l'équation de Vlasov couplée aux équations de Maxwell où à un modèle approché (comme Poisson) permet-

tant d'obtenir le champ électromagnétique.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.4)$$

**Remarque 2** Notons que nous avons ajouté un opérateur de collision de Boltzmann  $Q(f, f)$  dans le membre de droite. Cet opérateur n'aura pas d'influence sur le résultat car une de ses propriétés fondamentales est que ses trois premiers moments en vitesse s'annulent.

Les quantités macroscopiques sont définies à partir des trois premiers moments en vitesse de la fonction de distribution  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

- La densité est définie par

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

- La vitesse moyenne  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  vérifie

$$n(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v} d\mathbf{v},$$

- Le tenseur de pression  $\mathbb{P}(\mathbf{x}, t)$  est défini par

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{v}.$$

- La pression scalaire est le tiers de la trace du tenseur de pression

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{3} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{v},$$

- On définit la température  $T(\mathbf{x}, t)$  à partir de la pression par

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{n(\mathbf{x}, t)}.$$

- Le flux d'énergie est un vecteur défini par

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v}^2\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}.$$

On obtient des équations reliant ces quantités macroscopiques en prenant les premiers moments de l'équation de Vlasov. Remarquons d'abord que comme  $\mathbf{v}$  est une variable indépendante de  $\mathbf{x}$ , on a  $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \nabla_{\mathbf{x}}(f\mathbf{v})$ . De plus, comme  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  ne dépend pas de  $\mathbf{v}$  et que la  $i^{eme}$  composante de

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} v_2 B_3(\mathbf{x}, t) - v_3 B_2(\mathbf{x}, t) \\ v_3 B_1(\mathbf{x}, t) - v_1 B_3(\mathbf{x}, t) \\ v_1 B_2(\mathbf{x}, t) - v_2 B_1(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$$

est indépendante de  $v_i$ , on a également

$$(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))).$$



En intégrant (2.4) par rapport à la vitesse  $\mathbf{v}$  on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \nabla_x \cdot \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} + 0 = 0.$$

D'où, comme  $n(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t) = \int f(x, v, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}$ , on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n\mathbf{u}) = 0. \quad (2.5)$$

En multipliant, l'équation de Vlasov par  $m\mathbf{v}$  et en intégrant par rapport à  $\mathbf{v}$ , on obtient

$$\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} + m \nabla_x \cdot \int (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ - q(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\int \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

D'où

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) + m \nabla \cdot (n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbb{P} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Finalement, en multipliant l'équation de Vlasov par  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  et en intégrant par rapport à  $\mathbf{v}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v}^2 d\mathbf{v} + \frac{1}{2}m \nabla_x \cdot \int (\mathbf{v}^2 \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ + \frac{1}{2}q \int \mathbf{v}^2 \nabla_v \cdot [(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] d\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne alors

$$\int \mathbf{v}^2 \nabla_v \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] d\mathbf{v}.$$

Ensuite, en développant  $\int f(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v}$  on obtient

$$\int f(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v} = \int f\mathbf{v}^2 d\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} + \mathbf{u}^2 \int f d\mathbf{v} = \int f\mathbf{v}^2 d\mathbf{v} - n\mathbf{u}^2,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mnu^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot (qn\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

On pourrait continuer à calculer des moments de  $f$ , mais on voit que chaque nouvelle expression fait apparaître un moment d'ordre supérieur. On a donc besoin d'informations supplémentaires pour avoir autant d'inconnues que d'équations afin de pouvoir résoudre ces équations. Cette information supplémentaire s'appelle *relation de fermeture*.

Dans notre cas, on va utiliser comme relation de fermeture la propriété physique qu'à l'équilibre thermodynamique la fonction de distribution tend vers une fonction

de distribution Maxwellienne qu'on va noter  $f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  et qu'on peut exprimer sous certaines hypothèses en fonction des grandeurs  $n(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $T(\mathbf{x}, t)$  qui sont les densité, vitesses moyenne et température du fluide :

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{n(\mathbf{x}, t)}{(2\pi T(\mathbf{x}, t)/m)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2}{2T(\mathbf{x}, t)/m}}.$$

Nous introduisons également une grandeur classique en physique des plasmas qui est la vitesse thermique de l'espèce de particules considérée

$$v_{th} = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

On peut vérifier facilement que les trois premiers moments de la fonction de distribution  $f_M$  sont consistants avec la définition des grandeurs macroscopiques  $n$ ,  $\mathbf{u}$  et  $T$  définies pour une fonction de distribution quelconque. On a en effet facilement en faisant à chaque fois le changement de variable  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{v_{th}}$

$$\begin{aligned} \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= n(\mathbf{x}, t), \\ \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} &= n(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v} &= 3n(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t)/m. \end{aligned}$$

D'autre part en remplaçant  $f$  par  $f_M$  dans les définitions des tenseurs de pression  $\mathbb{P}$  et de flux d'énergie  $\mathbf{Q}$ , on peut exprimer ces termes également en fonction de  $n$ ,  $\mathbf{u}$  et  $T$  ce qui nous permet d'obtenir un système fermé en ces trois inconnues contrairement au cas d'une fonction de distribution  $f$  quelconque. En effet, remarquons d'abord que

$$\int w_i w_j e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \int e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On a ensuite que le tenseur de pression associé à la Maxwellienne vaut

$$\mathbb{P} = m \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \int e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T/m}} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{v},$$

et donc grâce au calcul précédent, les termes non diagonaux de  $\mathbb{P}$  sont nuls et en faisant le changement de variable  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{v_{th}}$ , on obtient pour les termes diagonaux

$$\mathbb{P} = m \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{T}{m} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} w_i^2 d\mathbf{w} = nT.$$

Il en résulte que  $\mathbb{P} = nT\mathbb{I} = p\mathbb{I}$  où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité  $3 \times 3$ . Il reste maintenant à calculer de la même manière  $\mathbf{Q}$  en fonction de  $n$ ,  $\mathbf{u}$  et  $T$  pour la Maxwellienne avec le même changement de variables, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \int e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T/m}} \mathbf{v}^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}, \\ &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} (v_{th} \mathbf{w} + \mathbf{u})^2 (v_{th} \mathbf{w} + \mathbf{u}) d\mathbf{w}, \\ &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} (v_{th}^2 \mathbf{w}^2 \mathbf{u} + 2v_{th}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{w} + \mathbf{u}^2 \mathbf{u}) d\mathbf{w}, \\ &= \frac{m}{2} n \left( 3 \frac{T}{m} \mathbf{u} + 2 \frac{T}{m} \mathbf{u} + \mathbf{u}^2 \mathbf{u} \right), \end{aligned}$$

car les moments impairs en  $\mathbf{w}$  s'annulent. Il vient donc finalement

$$\mathbf{Q} = \frac{5}{2}nT\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u} = \frac{5}{2}p\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u}.$$

Finalement en reportant ces expressions de  $\mathbb{P}$  et de  $\mathbf{Q}$  dans (2.5)-(2.6)-(2.7) on obtient les équations fluides pour une espèce de particules du plasma :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (2.8)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{u}) + m \nabla \cdot (n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mn\mathbf{u}^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2}p\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u} \right) = \mathbf{E} \cdot (qn\mathbf{u}), \quad (2.10)$$

qui correspond en dimension 3 à un système de 5 équations scalaires avec 5 inconnues scalaires qui sont la densité  $n$ , les trois composantes de la vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  et la pression scalaire  $p$ . Ces équations doivent bien entendu être couplées aux équations de Maxwell pour le calcul du champ électromagnétique, avec s'il n'y a qu'une espèce de particules  $\rho = qn$  et  $\mathbf{J} = qn\mathbf{u}$ . Notons également qu'une approximation parfois utilisée en physique des plasmas pour encore simplifier ces équations est celle du plasma froid qui correspond à  $T = 0$  et donc  $p = 0$ . On n'a dans ce cas plus besoin que des deux premières équations.