Annexe A

Rappels d'analyse complexe et transformée de Laplace

Nous rappelons ici les éléments essentiels nécessaire au calcul de la solution analytique de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée. En ce qui concerne l'analyse complexe, le lecteur pourra se référer pour une description plus complète aux ouvrages d'Ahlfors [1] et de Cartan [6].

A.1 Fonctions analytiques

Définition 1 *On dit qu'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique (ou holomorphe) si elle admet une dérivée sur tout son domaine de définition.*

Proposition 4 (Propriétés des fonctions analytiques)
La somme et le produit de deux fonctions analytiques sont analytiques.

Le quotient f/g de deux fonctions analytiques f et g est analytique en tout point où g ne s'annule pas.

La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Proposition 5 (Caractérisation de fonctions analytiques) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = u(z) + iv(z)$ avec $z = x + iy$, $u(z) = \Re(f(z))$ et $v(z) = \Im(f(z))$. Alors f est analytique si et seulement si $(u, v) \in C^1(\mathbb{C})^2$ avec*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.1}$$

Les équations (A.1) sont appelées les équations de Cauchy-Riemann.

A.2 Intégration sur un contour

Soit γ un arc du plan complexe paramétré par $t \mapsto z(t)$ pour $t \in [a, b]$. On définit alors l'intégrale complexe le long de γ par

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt.$$

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Exemple. On veut calculer
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$
où γ est le cercle de centre a et de rayon R. Une paramétrisation de γ est donc donnée par $z(\theta) = a + Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On a alors $z'(\theta) = iRe^{i\theta}$. Donc
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} = 2\pi.$$

Théorème 1 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique dans le domaine Ω et γ est un contour de Ω, alors $\int_\gamma f(z)\,dz$ dépend uniquement des extrémités de γ.*

Théorème 2 (Cauchy) *Soit γ une courbe fermée et f une fonction analytique sur une région contenant γ et son intérieur. Alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Définition 2 *Soit f une fonction de la forme*
$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z),$$
avec φ analytique au voisinage de a. Alors on appelle résidu *de f en a, et on note $Res_{z=a}f(z)$, le terme c_{-1}.*

Dans le cas fréquent où f admet un pôle simple en a, on a
$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z), \qquad \text{et } Res_{z=a}\, f(z) = f(z)(z-a)|_{z=a}.$$

Définition 3 *On définit l'*indice *du point a par rapport à la courbe fermée γ par*
$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Remarque 4 *L'indice de γ par rapport à a, $n(\gamma, a)$ correspond au nombre de tours que fait la courbe γ autour du point a.*

DESSIN

Théorème 3 (Théorème des résidus) *Soit Ω un ouvert simplement connexe du plan complexe et soit f une fonction analytique sur Ω en dehors de p singularités isolées notées a_j, $j = 1, \ldots, p$. Alors*
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, a_j)\, Res_{z=a_j} f(z) \tag{A.2}$$
pour toute courbe fermée γ qui ne passe par aucune des singularités.

Remarque 5 *En pratique, on va construire des contours qui tournent soit une fois, soit aucune autour d'un pôle donné, de sorte que $n(\gamma, a_j) = 1$ si a_j est à l'intérieur de γ et 0 sinon. La formule des résidus peut alors s'écrire de manière plus simple*
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{j|\ a_j interieur} Res_{z=a_j} f(z).$$
La somme est faite uniquement sur les j tels que a_j est à l'intérieur de la courbe γ.

A.3 Transformée de Laplace

Pour une discussion détaillée de la transformée de Laplace on pourra consulter les ouvrages de Schwartz [14] ou de Bellman-Roth [4].

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ telle qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $|f(t)| < ae^{bt}$. Alors

$$\int_0^{+\infty} |e^{st} f(t)|\, dt \leq a \int_0^{+\infty} |e^{(b-s)t}|\, dt < +\infty$$

pour $\Re(s) > b$. On définit dans ce cas pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > b$, la transformée de Laplace $\tilde{f}(s)$ de f par

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt. \tag{A.3}$$

Remarque 6 *La transformée de Laplace d'une fonction réelle est à valeurs dans $\mathbb{C}$ et est définie dans le demi-plan $\Re(s) > b$ qui peut-être $\mathbb{C}$ tout entier ou l'ensemble vide selon le comportement pour les temps grands de f.*

Le théorème suivant donne un cadre pratique dans lequel la transformée de Laplace peut être inversée.

Théorème 4 *On suppose qu'il existe deux constantes réelles M et R telles que*
i) $\tilde{f}$ est analytique dans le demi-plan $\Re(s) > R$,
ii) $|s\tilde{f}(s)| \leq M$ pour tout s tel que $|s| > R$.
Alors, si on définit

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st}\, ds \quad \forall t > 0,\ u > R, \tag{A.4}$$

$\tilde{f}(s)$ est la transformée de Laplace de f.

Exemple d'application. On va montrer sur un exemple comment résoudre une équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} + y = 1, \quad y(0) = y_0.$$

On commence par appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en multipliant par e^{st} et en intégrant entre 0 et $+\infty$. En supposant $\Re(s) > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st}\, dt = [ye^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} ye^{-st}\, dt = -y_0 + s\tilde{y}.$$

D'autre part, $\int_0^{+\infty} ye^{-st}\, dt = \tilde{y}(s)$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle s'écrit donc

$$-y_0 + (s+1)\tilde{y} = \frac{1}{s},$$

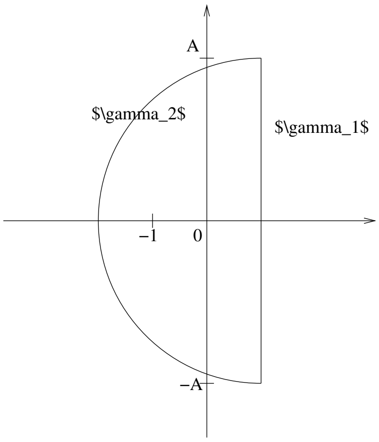

FIG. A.1 – Contour pour le calcul de l'intégrale.

et donc

$$\tilde{y}(s) = \frac{y_0 + \frac{1}{s}}{1+s} = \frac{1+sy_0}{s(s+1)}.$$

On remarque que $\tilde{y}$ est analytique en dehors des deux pôles que sont 0 et -1. Pour calculer la transformée de Laplace inverse à l'aide de la formule (A.4), il faut donc prendre $u > 0$ pour avoir

$$y(t) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{A\to+\infty} \int_{u+-A}^{u+iA} \frac{1+sy_0}{s(s+1)} e^{st}\, ds. \tag{A.5}$$

on va noter $g(s) = \frac{1+sy_0}{s(s+1)}e^{st}$ la fonction à intégrer. On va calculer cette intégrale à l'aide d'un contour qui se referme vers la gauche pour que la partie additionnelle s'annule de sorte à pouvoir utiliser la formule des résidus (A.2). On paramétrise la droite γ_1 de partie réelle u par $\theta \mapsto u + i\theta$, $\theta \in [-A, A]$, et le demi-cercle γ_2 refermant le contour par la gauche par $\theta \mapsto u + Ae^{i\theta}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, voir la figure A.1. On suppose que $A > u+1$ de sorte que les deux pôles soient à l'intérieur du demi-cercle. On a alors

$$\int_{\gamma_2} g(s) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + (u + Ae^{i\theta})y_0 e^{u+Ae^{i\theta}}}{(u + Ae^{i\theta})(u+1+Ae^{i\theta})} iAe^{i\theta}\, dt.$$

On peut majorer le membre de gauche par

$$Ce^u \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{A\cos t}\, dt$$

pour A assez grand, et ce terme tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$ car $\cos t < 0$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. D'autre part en appliquant le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} g(s) = 2i\pi \left(Res_{s=0}g(s) + Res_{s=-1}g(s)\right) = 2i\pi\left(1 - (1-y_0)e^{-t}\right).$$

Donc en prenant la limite quand A tend vers $+\infty$ dans (A.5), on obtient

$$y(t) = 1 - (1-y_0)e^{-t}$$

qui est bien la solution de l'équation différentielle étudiée.

Bibliographie

[1] L. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1979.

[2] William B. Bateson, Dennis W. Hewett, *Grid and particle hydrodynamics : beyond hydrodynamics via fluid element particle-in-cell.* J. Comput. Phys. 144 (1998), no. 2, 358–378.

[3] Régine Barthelmé, Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell, thèse de l'Université Louis Pasteur, 2005, spécialité Mathématiques. `http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2005/05014.shtml`

[4] R.E. Bellman, R.S. Roth. *The Laplace Transform.* World Scientific, 1984.

[5] C. K. Birdsall, A. B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, Institute of Physics, Bristol (1991) p. 359.

[6] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiquesd'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris, 1961.

[7] C.Z. Cheng, G. Knorr, The integration of the Vlasov equation in configuration space, J. Comput. Phys. 22 (1976) 330-351.

[8] Albert Cohen, Numerical Analysis of Wavelet Methods, North-Holland 2003.

[9] G.-H. Cottet, P.-A. Raviart, *Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations.* SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), no. 1, 52–76.

[10] B. D. Fried and S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function.* Academic, New York, 1961.

[11] RW Hockney and JW Eastwood. *Computer Simulation Using Particles.* Adam Hilger, Philadelphia, 1988.

[Munz-Schneider-Sonnendrücker-Voss 1999] C.D. Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, U. Voss, *Maxwell's equations when the charge conservation is not satisfied*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I (1999) pp. 431-436.

[12] C.-D. Munz, P. Omnes, R. Schneider, E. Sonnendrücker, U. Voss (2000) : *Divergence correction techniques for Maxwell solvers based on a hyperbolic model*, J. Comput. Phys. 161, no. 2, pp. 484-511.

[13] H. Neunzert, J. Wick, *The convergence of simulation methods in plasma physics.* Mathematical methods of plasmaphysics (Oberwolfach, 1979), 271–286, Methoden Verfahren Math. Phys., 20, Lang, Frankfurt, 1980.

[14] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961.