COURS METHODES VARIATIONNELLES ET Γ-CONVERGENCE

Introduction générale

Note Title 16/01/2009

Les méthodes variationnelles consistent à trouver les minimiseurs ou les pts critiques de fonctionnelles d'énergie.

Une fonctionnelle est une "fonction de fonctions".

Problème : définir des notions de calcul (différentiabilité etc) pour ce genre de fonctions sur des espaces infini-dimensionnels.

Le but est de résoudre des EDP - celles qui sont "variationnelles" c.a.d. de la forme "$E'(u) = 0$" où E est la fonctionnelle (ou énergie) et E' sa "dérivée". Ceci correspond à trouver les <u>points critiques</u> de E. Une classe particulière de points critiques (en général plus faciles à trouver) est celle des minimiseurs de E.

Le lien entre l'énergie et l'EDP s'appelle parfois un "principe variationnel".

Souvent ces EDP viennent de problèmes physiques (parfois de géométrie) et la fonctionnelle d'énergie E est l'énergie physique du système → d'un point de vue physique, on cherche aussi à comprendre les minimiseurs de l'énergie (= états stables minimisants du système) et l'énergie elle-même.

C'est souvent plus facile (particulièrement si l'équation est non linéaire) de minimiser E que de résoudre $E'(u) = 0$.

Minimiser des fonctionnelles sert aussi pour résoudre des problèmes d'optimisation (transport optimal, design optimal)

Premiers exemples :

1) $E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ fonctionnelle ou énergie de Dirichlet

Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Points critiques = fonctions harmoniques
$u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ variétés " = applications harmoniques

2) $E(u) = \int \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla u|^2}_{\text{énergie de déformation}} + \underbrace{F(u)}_{\text{énergie potentielle (système physique)}}$

associé à l'EDP $\Delta u = f(u)$ où $f = F'$

eq de Poisson non linéaire.

3) $E(u) = \int \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$ = aire du graphe de u.

associé à l'équation des surfaces minimales (géométrie)

3bis) $E(u) = \int_0^1 |u'(t)|^2 \, dt$ $\begin{cases} u(0) = x_0 \\ u(1) = x_1 \end{cases}$ $u \in \mathcal{N}$ variété

→ équation des géodésiques

4) $E(u) = \int g(\underbrace{\det \nabla u}_{\text{déformation élastique d'un solide}})$ où $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

A chaque fois l'énergie est une sorte de coût que l'on cherche à minimiser.

Question : existence de minimiseurs ?

Ceci n'est pas toujours clair (ni toujours vrai) car on minimise sur un espace de dimension infinie (l'espace de fonctions adapté). On peut toujours considérer des suites minimisantes mais on doit alors voir si elles convergent vers un minimiseur.

→ questions : - compacité des suites minimisantes

- semi continuité inférieure de l'énergie

en général garanti par de la convexité / quasiconvexité.

Une fois les minimiseurs trouvés on se pose souvent la question de leur unicité et de leur régularité (la solution trouvée est-elle C^1, C^∞ ... ?)

Question : existence de points critiques ?

On peut vouloir chercher des points critiques non minimisants pour avoir d'autres solutions de l'EDP, ou quand par exemple les minimiseurs sont des solutions triviales (type $u \equiv 0$). Des méthodes plus sophistiquées sont alors requises pour trouver ces points critiques non minimisants : "lemme du col", méthodes de min-max, méthodes de genre, théorie de Morse.

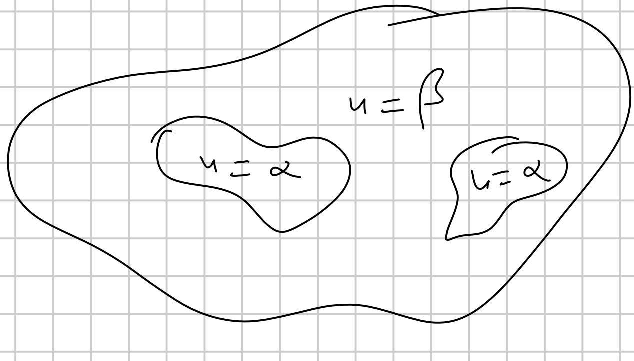
On peut aussi minimiser des problèmes sous contrainte
→ multiplicateurs de Lagrange, inéquations variationnelles.

La Γ-convergence

C'est une notion de convergence de familles d'énergie $\{E_\varepsilon\}_\varepsilon$
On écrit $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E_0$.
Cette notion préserve les minimiseurs cad les minimiseurs de E_ε convergent vers les minimiseurs de E_0.
C'est une notion très différente de la convergence ponctuelle des fonctions.

ex : $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{(1-u^2)^2}_{\text{ou } W(u)}$ $\quad u : \Omega \to \mathbb{R}$

modèle de "Van der Waals" ou "Allen-Cahn" de transitions de phases. $W(u)$ a deux "puits" ou minima, à $u=\alpha$ et $u=\beta$ (ici $u=\pm 1$)
Pour minimiser l'énergie, u ne prend que ces deux valeurs α et β ou ± 1 → on aura deux phases $\{u=\alpha\}$ et $\{u=\beta\}$ dans le domaine



L'énergie de déformation $\int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2$ pénalise la région de transition (= interface) où u saute brusquement. Cette région aura une épaisseur caractéristique ε.

Dans la limite $\varepsilon \to 0$ E_ε Γ-converge vers $E_0 = C \text{ perimètre}(\{u=a\})$ = longueur de l'interface.

Autres exemples : - énergies de Ginzburg-Landau $u : \Omega \to \mathbb{C}$
minimisation de $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{(1-|u|^2)^2}{2\varepsilon^2}$
modèle pour la supraconductivité. zéros de u = "vortex"

- problèmes d'homogénéisation : il s'agit de résoudre des EDP de la forme $L_\varepsilon(u) = 0$ où l'opérateur L_ε dépend de la position d'espace x d'une manière rapide (c.a.d à une vitesse $\frac{1}{\varepsilon}$), par ex

$$\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u) = f \quad \text{où} \quad A_\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$