Introduction à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en régime harmonique

Cours de Master 2

Mathématiques et Applications

Université Pierre et Marie Curie

Année 2006-2007

Patrick JOLY

1 Solutions harmoniques de l'équation des ondes. Equation de Helmholtz.

Nous nous intéressons à l'équation des ondes scalaire :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{ div } (\mu \nabla u) = f, \tag{1}$$

où la donnée f et l'inconnue u sont des fonctions scalaires de $x \in \mathbb{R}^N$ (variable d'espace) et $t > 0$ (le temps). Nous supposerons que l'équation (1) est satisfaite dans tout l'espace et faisons les hypothèses habituelles sur les coefficients ρ et μ :

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty, & p.p. x \in \mathbb{R}^N, \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty, & p.p. x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

Dans cette partie du cours nous nous intéressons au cas où la source $f(x,t)$ est une excitation harmonique en temps, c'est à dire :

$$f(x,t) = f(x)\, e^{-i\omega t} \quad \omega > 0 \tag{3}$$

où la fonction $f(x)$ est a priori à valeurs complexes. Par définition ω est par la pulsation, elle correspond à une période temporelle égale à $T = 2\pi/\omega$.

Remarque 1 *Par abus d'appellation, on parlera de "fréquence ω" du problème. En toute rigueur la fréquence ν est définie par :*

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

Partant de sources harmoniques (cf (3)), il est naturel de rechercher des solutions de (1) qui soient elles-mêmes harmoniques c'est à dire de la forme :

$$u(x,t) = u(x)\, e^{-i\omega t} \tag{4}$$

Remarque 2 *La formule (4) définit a priori une solution de (1) à valeurs complexes. Ceci n'est en fait pas un problème. Ainsi, si $f(x)$ est à valeurs réelles, la fonction $\mathcal{R}e\, (u(x)e^{-i\omega t})$ définit une solution réelle de (1) associée à la source $f(x)\cos\omega t$ alors que la fonction $\mathcal{I}m\, (u(x)e^{i\omega t})$ définit une autre solution réelle de (1) associée à la source $f(x)\sin\omega t$.*

Si on injecte (4) dans l'équation (1), on voit que la fonction $u(x)$ doit être solution de l'équation de Helmholtz :

$$-\text{div } (\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = f. \tag{5}$$

Il est fondamental de remarquer que :

- dans (5), la dépendance en fonction du temps a disparu et a été remplacée par l'introduction du paramètre $\omega > 0$ (qui, lui, impose la dépendance en temps). Notons que l'on peut résoudre (5) à ω fixé, alors que cela n'avait pas de sens de résoudre (1) à t fixé !

- on a bien sûr perdu avec (5) la notion de conditions initiales puisque le temps n'apparaît plus. Le lien entre (5) et la physique n'est donc pas si évident a priori. Nous verrons qu'en fait la relation entre le problème d'évolution (5) et le problème de nature stationnaire (5) passe par le principe d'amplitude limite : la solution de (5) représente l'état stationnaire (en toute rigueur atteint au bout d'un temps infini) de la solution du problème d'évolution initial.

- l'équation (5) est très proche d'une équation elliptique (au sens de la thérie de Lax-Milgram par exemple) dont un prototype est l'équation que l'on pourrait obtenir à partir de l'équation des ondes (1) si on cherchait des solutions de la forme $u(x)\, e^{-st}$ avec $s > 0$:
$$-\text{div}\,(\mu \nabla u) + s^2 \rho u = f, \quad s > 0. \tag{6}$$
La résolution mathématique de (6) passe par un problème variationnel équivalent qui s'écrit (dès que f appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ par exemple)

$$\text{Trouver } u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad / \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \int \left(\mu \nabla u \nabla v + s^2 \rho\, uv\right)\, dx = \int fv\, dx. \tag{7}$$

Il se trouve que la forme bilinéaire du problème (7) est évidemment coercive dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ de telle sorte que le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution. Si on désirait (ce qui n'est pas possible !) résoudre l'équation de Helmholtz dans le même cadre fonctionnel, il faudrait passer par le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\mathbb{R}^N) / \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ a(\omega; u,v) = \displaystyle\int fv dx \\ a(\omega; u,v) := \displaystyle\int (\mu \nabla u . \nabla v - \omega^2 \rho uv) dx \end{cases} \tag{8}$$

Or il se trouve que la forme $a(\omega; u,v)$ n'est plus coercive ni même positive dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Il faut donc passer par l'utilisation d'un nouvel arsenal mathématique pour résoudre le problème (5). Nous avons ici touché du doigt l'une des difficultés essentielles liées à la résolution de l'équation de Helmholtz : l'absence de coercivité.

Exercice 1 *Démontrer que la forme bilinéaire $a(\omega; u,v)$ n'est pas positive dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

2 Résolution de l'équation de Helmholtz homogène dans $\mathbb{R}^3$

2.1 L'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^3$ - cadre fonctionnel

Nous supposons dans ce paragraphe que nous sommes en milieu homogène, c'est à dire que les fonctions ρ et μ sont constantes ce qui nous permet d'introduire la vitesse de propagation $c = (\frac{\mu}{\rho})^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, quitte à changer f , l'équation de Helmholtz se réécrit :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}\, u = f \tag{9}$$

En outre, nous nous placerons en dimension $N = 3$, ce cas présentant le double avantage d'être physiquement réaliste (le monde réel est tridimensionnel) et plus facile à résoudre qu'en dimension 2 pour des raisons purement techniques. Ainsi la résolution du même problème en dimension 2 nécessiterait, même si l'on conserve essentiellement la même démarche, la manipulation de fonctions spéciales, les fonctions de Hankel en l'occurence, moins familières que celles que nous allons rencontrer en dimension 3.

Pour mieux analyser (9), nous allons situer le problème dans le cadre fonctionnel L^2. Nous désignons donc par H l'espace de Hilbert :

$$H = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \tag{10}$$

muni du produit scalaire usuel :

$$(u,v) = \int u\overline{v}\, dx \tag{11}$$

Nous définissons alors l'opérateur non borné dans H défini par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}^N) \\ \\ Au = -\Delta u, \quad \forall u \in D(A) \end{cases} \tag{12}$$

Il est alors facile d'établir le :

Théorème 1 *L'opérateur A défini par (12) est non borné, autoadjoint et positif dans H.*

Exercice 2 *Démontrer le théorème 1.*

A l'aide de l'opérateur A nous pouvons réécrire, au moins formellement, l'équation de Helmholtz (9) sous la forme :

$$(A - \frac{\omega^2}{c^2} I)\, u = f \tag{13}$$

Tout se passe comme si on désirait inverser l'opérateur $A - \frac{\omega^2}{c^2} I$. La difficulté du problème apparaît alors clairement grâce au résultat classique suivant (exercice) :

Théorème 2 *Le spectre $\sigma(A)$ de A est purement continu et égal à l'intervalle $\mathbb{R}^+$.*

En d'autres termes la résolvante $\rho(A)$ de l'opérateur A, à savoir l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $A - zI$ est inversible de $D(A)$ dans H, est le plan complexe privé de la demi droite réelle $\mathbb{R}^+$. Il est donc hors de question d'inverser dans ce cadre l'opérateur $A - \frac{\omega^2}{c^2} I$. Devant cette difficulté il convient donc :

1. de définir une bonne notion de solution pour (9),

2. de préciser pour quel type de données on va être capable de résoudre (9),

3. de trouver un procédé pour démontrer un résultat d'existence et d'unicité.

Ceci va nous amener à :

(i) rajouter une notion de comportement à l'infini pour définir "la" bonne solution de u. Cela va en particulier nous amener à **élargir** l'espace dans lequel nous allons chercher la solution, (espace qui ne peut plus être $H^2(\mathbb{R}^3)$ par exemple),

(ii) **restreindre** l'espace des seconds membres f pour lesquels on sera capable de résoudre (9), (espace qui ne peut plus être $L^2(\mathbb{R}^3)$),

(iii) introduire pour résoudre (9) la méthode dite **d'absorption limite**.

2.2 Calcul explicite de la résolvante de l'opérateur A

Pour z n'appartenant pas au spectre de A, en l'occurence z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, il s'agit de calculer $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ en tant qu'opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans lui même. Dans notre cas il s'agit de résoudre l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u - zu = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3), \\ u \in L^2(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{14}$$

ce qui peut se faire explicitement. On a le :

Théorème 3 *La solution u de (14) pour $z \notin \mathbb{R}^+$ est donnée par :*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\sqrt{z}}|x-y|}{|x-y|}\, f(y)\, dy \tag{15}$$

où la racine $\sqrt{z}$ est l'unique racine carrée de z de partie imaginaire strictement positive.

Démonstration : Utilisons la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\xi)$$

définie, lorsque u est dans $L^1(\mathbb{R}^3)$ par :

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x)\, e^{-ix\xi}\, d\xi$$

Nous avons alors (notons que $|\xi|^2 - z$ ne s'annule pas car $z \notin \mathbb{R}^+$) :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2 - z} \tag{16}$$

Posons alors :

$$\hat{G}(z;\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 - z} \quad \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad G(z;.) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{G}(z;.)] \quad \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{17}$$

Des propriétés de la transformation de Fourier on déduit que :

$$u = G(z;.) * f \tag{18}$$

où $u * v$ désigne le produit de convolution (au sens des distributions en général) de u et v. Notons que :

$$\begin{cases} -\Delta G - z\, G = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \\ G(z;.) \in L^2(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$G(z;x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{i\sqrt{z}|x|} \tag{19}$$

l'expression intégrale (15) se déduisant alors de (18) et du fait que $G(z;.) \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Pour établir (19), nous commençons par remarquer que comme $\hat{G}(z;\xi)$ ne dépend que de $|\xi|$ alors $G(z;x)$ ne dépend que de $r = |x|$. Plus précisement, il existe une fonction $u(r) \in L^2(\mathbb{R}^+; r^2 dr)$ telle que :

$$G(z;x) = u(|x|) \tag{20}$$

De plus si on a $U(x)=u\big(|x|\big)$, $x\in\mathbb{R}^N$, on a la formule générale :

$$\Delta U(x)=(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{N-1}{r}\frac{du}{dr})\big(|x|\big)$$

Alors, en introduisant la nouvelle inconnue $v=r^{\frac{N-1}{2}}u$, il vient :

$$\Delta U(x)=|x|^{\frac{1-N}{2}}\left[\ \frac{d^2v}{dr^2}\big(|x|\big)-\frac{(N-1)(N-3)}{|x|^2}\ v\big(|x|\big)\ \right]$$

Bien entendu en dimension 3, cette formule se simplifie considérablement et on a simplement $(N=3)$:

$$\Delta U(x)=\frac{1}{|x|}\ \frac{d^2v}{dr^2}\big(|x|\big)$$

Nous déduisons donc finalement qu'il existe une fonction $v(r)\in L^2(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$G(z;|x|)=\frac{1}{|x|}v\big(|x|\big) \tag{21}$$

où la fonction $v(r)$ vérifie :

$$\frac{d^2v}{dr^2}+zv=0\quad\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) \tag{22}$$

Il existe donc deux constantes A et B telles que :

$$v(r)=A\ e^{i\sqrt{z}r}+B\ e^{-i\sqrt{z}r} \tag{23}$$

où $\sqrt{z}$ est, par convention, l'unique racine carrée de z dont la partie imaginaire est strictement positive. Avec cette convention :

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to+\infty}|e^{i\sqrt{z}r}|=0 \quad \text{(exponentiellement)} \\ \lim\limits_{r\to+\infty}|e^{-i\sqrt{z}r}|=+\infty \end{cases}$$

La condition $v\in L^2(\mathbb{R}^+)$ impose donc $B=0$. Il nous reste à determiner la constante A. Choisissons alors $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, vérifiant $\psi(0)=1$ et posons $\psi_n(x)=\psi(x/n)$. De l'égalité

$$-\Delta G-z\ G=\delta\quad\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \tag{24}$$

Nous tirons :

$$\langle -\Delta G,\psi_n\rangle - z\ \langle G,\psi_n\rangle=1$$

Or par ailleurs :

$$\langle -\Delta G,\psi_n\rangle=-\langle G,\Delta\psi_n\rangle$$

de telle sorte que :

$$|\langle -\Delta G,\psi_n\rangle| \ \leq \| G(z,.) \|_{L^2} \| \Delta\psi_n \|_{L^2}$$

Comme $\Delta\psi_n = \dfrac{1}{n^2}\Delta\psi(\dfrac{x}{n})$, il vient :

$$\| \Delta\psi_n \|_{L^2}^2 = \frac{1}{n^4}\int |\Delta\psi(\frac{x}{n})|^2 dx = \frac{1}{n}\int |\Delta\psi(y)|^2 dy$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} < -\Delta G,\psi_n >= 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} < G,\psi_n >= -\frac{1}{z}$$

Soit encore

$$A \lim_{n\to+\infty} \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|}\ \psi_n(x)dx = -\frac{1}{z}$$

Si nous choisissons $\psi(x)$ de façon à ce que $\sup|\psi(x)| = |\psi(0)| = 1$, nous notons alors que :

$$\psi_n(x) \to 1 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^3, \quad |\psi_n(x)| \leq 1, \quad \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|} \in L^1(\mathbb{R}^3),$$

ce qui nous permet appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir :

$$A \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|}\ dx = -\frac{1}{z}$$

Or nous avons (une intégration par parties fournit la seconde égalité) :

$$\int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|}\ dx = 4\pi\int_0^{+\infty} e^{i\sqrt{z}r}\ r\ dr = \frac{4i\pi}{\sqrt{z}} \int_0^{+\infty} e^{i\sqrt{z}r}\ dr = -\frac{4i\pi}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{i\sqrt{z}} = -\frac{4\pi}{z}$$

De ce calcul nous tirons $A = (4\pi)^{-1}$ et donc (19). $\square$

Remarque 3 *Le choix de $\sqrt{z}$ tel qu'il a été effectué consiste à introduire une coupure dans le plan complexe $\mathbb{C}$ coïncidant avec le demi axe réel positif $\mathbb{R}^+$, comme illustré sur la figure ci-dessous. Notons que cette coupure coïncide précisément avec le spectre A.*

2.3 Principe d'absorption limite

L'idée consiste à approcher $\omega^2/c^2 \in \mathbb{R}$ par $\omega^2/c^2 \pm i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant destiné à tendre vers 0 et d'étudier le passage à la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_A(\frac{\omega^2}{c^2} \pm i\varepsilon) f \tag{25}$$

Notons tout d'abord qu'il y a deux façons de se rapprocher de $\omega^2 > 0$ en se déplaçant dans l'ensemble $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$: soit par partie imaginaire positive (ce qui correspond à $\omega^2/c^2 + i\varepsilon$), soit par partie imaginaire négative (ce qui correspond à $\omega^2/c^2 - i\varepsilon$). Le choix "physique" correspond au principe d'absorption limite et consiste à prendre $\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon$. Autrement dit on va s'intéresser à la limite quand $\varepsilon \to 0$ de la fonction u^ε définie par :

$$-\Delta u^\varepsilon - (\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon) u^\varepsilon = f, \quad u^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^3). \tag{26}$$

Ce choix se justifie aisément si on revient à l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \tag{27}$$

Cette équation peut s'approcher par l'équation perturbée :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u^\eta}{\partial t} - \Delta u^\eta = f. \tag{28}$$

où η est un petit paramètre positif. Le terme additionnel

$$\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial t}$$

est bien un terme d'absorption. Par exemple pour l'équation libre, $f = 0$, l'identité de l'énergie devient simplement :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int \left(|\frac{1}{c}\frac{\partial u^\eta}{\partial t}|^2 + |\nabla u^\eta|^2 \right) \, dx\right] + \eta \int |\frac{\partial u^\eta}{\partial t}|^2 \, dx = 0 \tag{29}$$

La présence du terme

$$\eta \int |\frac{\partial u^\eta}{\partial t}|^2 \, dx$$

se traduit donc par la décroissance de l'énergie au cours du temps : il y a bien absorption au sens physique du terme. On peut d'ailleurs même démontrer que la solution du problème de Cauchy (i.e. associé à $f = 0$) correspondant à l'équation des ondes amorties (28) tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Par le même type d'argument on peut obtenir des estimations a priori indépendantes de η sur la solution u^η du problème avec second membre (28), estimations qui permettent de démontrer que la solution u^η de (28) converge uniformément en temps sur $[0, +\infty[$ vers la solution u de (27) lorsque $\eta \to 0$. Si nous transposons cela à l'équation de Helmholtz avec fréquence $\omega > 0$, l'approximation de (27) par (28) équivaut à approcher l'équation de Helmholtz :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f \tag{30}$$

par l'équation

$$-\Delta u^\eta - i\eta\, \omega\, u^\eta - \frac{\omega^2}{c^2} u^\eta = 0 \tag{31}$$

ce qui correspond bien à remplacer $\frac{\omega^2}{c^2}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon$ avec $\varepsilon = \eta\omega > 0$.

Remarque 4 *On aurait pu aussi faire le choix d'approcher l'équation (27) par :*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^\nu}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial u^\nu}{\partial t} - \Delta u^\nu = f \quad \nu > 0 \tag{32}$$

ce qui pour Helmholtz revient à approcher $\frac{\omega^2}{c^2}$ *par* $\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon$ *avec* $\varepsilon = \nu\omega$. *Dans ce cas le terme*

$$-\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial t}$$

entraîne une croissance (exponentielle) de l'énergie. On n'a évidemment pas dans ce cas convergence uniforme en temps sur $[0, +\infty[$ *de* u^ν *vers* u *solution de (27) lorsque* $\nu \to 0$. *Bien entendu nos conclusions seraient inversées si on intégrait les équations (27), (28) et (32) pour les temps négatifs, ce qui reviendrait à changer le sens du temps. En quelque sorte le principe d'absorption limite permet de "récupérer" le sens du temps, présent dans l'équation des ondes, mais perdu par l'équation de Helmholtz.*

Revenons maintenant au problème approché (26). Pour étudier ce qui se passe lorsque $\varepsilon \to 0$, nous allons supposer que le second membre f est à support compact, ce que nous noterons :

$$f \in L^2_c(\mathbb{R}^3) \tag{33}$$

En fait, le passage à la limite ne pourrait pas se faire pour tout f dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ ainsi que nous l'avons déjà annoncé à la fin de la section 2.1.

Nous savons (section 2.2) que u^ε est donné par :

$$u^\varepsilon = G_\varepsilon * f \tag{34}$$

où le noyau $G_\varepsilon(x)$ est donné par

$$G_\varepsilon(x) = \frac{e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon}|x|}}{4\pi|x|} \tag{35}$$

Il est naturel d'introduire la limite formelle G du noyau G_ε :

$$G(x) = \frac{e^{i\omega\frac{|x|}{c}}}{4\pi|x|} \tag{36}$$

En effet pour $\omega > 0$, la limite de $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon}$ est égale à $\frac{\omega}{c}$. De façon générale on a :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon} = \frac{|\omega|}{c}$$

On peut remarquer dès à présent que le noyau $G(x)$ ne décroit pas exponentiellement lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, contrairement à G_ε, mais seulement en $|x|^{-1}$ ce qui est insuffisant pour le rendre intégrable, voire même de carré intégrable, à l'infini. En revanche, $G(x)$ reste localement intégrable puisque l'on a même :

$$G \in L^2_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^3). \tag{37}$$

Remarque 5 *Soit $p \geq 1$, on dit que u est dans $L^p_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^N)$ si tout $R > 0$, $u|_{B_R} \in L^p(B_R)$, B_R désignant la boule de rayon R. Il est alors facile de voir que :*

- $L^p_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^N) = \left\{u : \mathbb{R}^N \to R \;/\; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \varphi u \in L^p(\mathbb{R}^N)\right\}$
- $q \geq p \Rightarrow L^q_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^N) \subset L^P_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^N)$

De plus on dira qu'une suite u^n converge vers u dans $L^P_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si :

$$\forall R > 0 \quad u_n|_{B_R} \longrightarrow u|_{B_R} \text{ dans } L^p(B_R)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad \varphi u_n \to \varphi u \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^3)$$

Bien sûr, si $q > p$, la convergence dans $L^q_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^3)$ entraine la convergence dans $L^p_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^3)$.

Nous pouvons maintenant préciser le sens de la convergence de G_ε vers G qui nous intéresse grâçe au :

Lemme 1 *G_ε converge vers G dans $L^2_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{R}^3)$ lorsque $\varepsilon \to 0$*

Démonstration : En effet, nous avons :

$$\| G_\varepsilon - G \|^2_{L^2(B_R)} = \int_{B_R} |G_\varepsilon(x) - G(x)|^2 dx$$

Or pour tout $x \neq 0$, $G_\varepsilon(x) \to G(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs il est facile de voir que $|G_\varepsilon(x)| \leq |G(x)|$ et donc que $|G_\varepsilon - G| \leq 2|G|$ comme G est dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, le théorème de Lebesgue permet de conclure. $\square$

Il est maintenant naturel d'introduire la fonction $u(x)$ définie par :

$$u(x) = \int G(x-y)f(y)dy = \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, f(y)\, dy \tag{38}$$

Notons tout d'abord que $u(x)$ est bien défini en tout point x de $\mathbb{R}^3$. En effet soit K le support de f, lorsque y décrit K, $x-y$ décrit $\{x-K\}$ qui est un compact, par conséquent :

$$y \to G(x-y) \in L^2(K)$$

(puisque $G \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$). Comme par ailleurs $f \in L^2(K)$, la fonction produit :

$$y \to G(x-y)\, f(y)$$

est bien intégrable sur K ce qui donne un sens à (38). Nous allons maintenant montrer que u^ε converge en un certain sens, vers u. Nous montrerons également la convergence des dérivées. Pour cela nous aurons besoin d'un deuxième lemme technique facile à démontrer :

Lemme 2 *Les champs de vecteurs ∇G et ∇G_ε sont dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)^3$ pour tout $\varepsilon > 0$ et, lorsque $\varepsilon \to 0$, ∇G_ε converge vers ∇G dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)^3$.*

Démonstration : Notons que

$$\nabla G(x) = x\, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}}|x|}{4\pi|x|^2} \left(i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x|} \right) = 0\, \left(|x|^{-2}\right) \quad (|x| \to 0)$$

est localement intégrable en dimension 3 . L'argument est alors exactement le même pour G_ε. La convergence de ∇G_ε vers ∇G dans L^1_{loc} se fait en utilisant le théorème de Lebesgue. Nous omettons les détails. $\square$

Remarque 6 *Le lecteur notera que ∇G et ∇G_ε ne sont pas dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ de même que les dérivées secondes de G et G_ε ne sont pas localement intégrables.*

Exercice 3 *Démontrer, au sens des distributions, l'égalité*

$$\nabla G(x) = \frac{x}{4\pi}\, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{|x|^2} \left(i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x|} \right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4 *La fonction u appartient à $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et est une solution au sens des distributions de l'équation de Helmholtz (9). De plus u^ε converge vers u dans $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ ce qui signifie que, pour tout $R > 0$:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u^\varepsilon - u \|_{H^2(B_R)} = 0$$

Commentaires

- Par définition de l'espace $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$:

$$u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \quad \Leftrightarrow \quad \forall R > 0 \quad u|_{B_R} \in H^2(B_R) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),\, \varphi u \in H^2(\mathbb{R}^3).$$

  Notons que l'appartenance à l'espace $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ n'impose que la régularité locale de la solution. En revanche elle ne précise aucun comportement à l'infini (contrairement à l'appartenance de $H^2(\mathbb{R}^3)$).

- Dans la démonstration qui suit nous allons utiliser la convergence de u^ε vers u pour montrer que u est bien une solution de l'équation de Helmholtz. Une démonstration directe est bien entendu possible.

Démonstration : Nous la décomposons en quatre étapes :

(i) Convergence de u^ε vers u dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Nous avons si $K = \text{supp} f \subset B_a$:

$$\left| \begin{aligned} |u^\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B_a} (G_\varepsilon - G)(x-y) f(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|^{\frac{1}{2}}\, |(G_\varepsilon - G)(x-y)|^{\frac{1}{2}}\, |f(y)|^{\frac{1}{2}}\, dy \end{aligned} \right.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons :

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 \leq \left(\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, dy \right) \left(\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, |f(y)|^2\, dy \right)$$

Si maintenant $|x| \leq R$, nous avons :

$$\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, dy \leq \int_{B_{R+a}} |(G_\varepsilon - G)(y)|\, dy$$

Par conséquent, pour tout $|x| \leq R$

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 \leq \| G_\varepsilon - G \|_{L^1(B_{R+a})} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, |f(y)|^2\, dy$$

Après intégration sur B_R, nous obtenons :

$$\int_{B_R} |u^\varepsilon(x) - u(x)|^2\, dx \leq \| G_\varepsilon - G \|_{L^1(B_{R+a})} \int_{B_R} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, |f(y)|^2\, dx\, dy$$

Mais, en utilisant Fubini :

$$\int_{B_R} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, |f(y)|^2 dx dy = \int_{B_a} |f(y)|^2 \left(\int_{B_R} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, dx \right) dy$$

Comme $\displaystyle\int_{B_R} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|dx \leq \| G_\varepsilon - G \|_{L^1(B_{R+a})}$ pour tout y dans B_a il vient :

$$\int_{B_R}\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x-y)|\, |f(y)|^2 \, dx \, dy \leq \| G_\varepsilon - G \|_{L^1(B_{R+a})} \| f \|^2_{L^2(B_a)}$$

En reportant dans (2.3) nous obtenons l'estimation :

$$\| u^\varepsilon - u \|_{L^2(B_R)} \leq \| G_\varepsilon - G \|_{L^1(B_{R+a})} \| f \|_{L^2} , \tag{39}$$

ce qui démontre en particulier grâce au lemme 1 que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u^\varepsilon - u \|_{L^2(B_R)} = 0.$$

(ii) Convergence de u^ε vers u dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Par dérivation sous le signe somme, nous avons les égalités :

$$\nabla u^\varepsilon(x) = \int \nabla G_\varepsilon(x-y) f(y) dy \tag{40}$$

$$\nabla u(x) = \int \nabla G(x-y) f(y) dy. \tag{41}$$

En réalité, ces égalités doivent être comprises au sens des distributions. Il n'est pas clair avec ces formules que $\nabla u(x)$ et $\nabla u^\varepsilon(x)$ soient définies en tout point x. Par contre, ce sont des fonctions de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. En effet, en raisonnant comme précédemment on obtient :

$$\| \nabla u^\varepsilon - \nabla u \|_{L^2(B_R)} \leq \| \nabla G_\varepsilon - \nabla G \|_{L^1(B_{R+a})} \| f \|_{L^2(B_R)} \tag{42}$$

ce qui, compte tenu du lemme 2, montre que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \nabla u^\varepsilon - \nabla u \|_{L^2(B_R)} = 0.$$

(iii) u est solution de l'équation de Helmholtz. Soit φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left\langle -\Delta u^\varepsilon - (\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon)\, u^\varepsilon, \, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ \Leftrightarrow \quad & \left\langle u^\varepsilon, -\Delta\varphi - \frac{\omega^2}{c^2}\varphi \right\rangle - i\varepsilon \, \langle u^\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle . \end{aligned} \tag{43}$$

Or si nous désignons par K le support (compact) de φ nous avons :

$$| \langle u^\varepsilon, \varphi \rangle | \leq \| u^\varepsilon \|_{L^2(K)} \| \varphi \|_{L^2} .$$

Or u^ε converge dans $L^2(K)$ et est donc bornée dans $L^2(K)$, il s'ensuit que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \, \langle u^\varepsilon, \varphi \rangle = 0.$$

Par ailleurs :

$$| \left\langle u^\varepsilon - u, -\Delta\varphi - \omega^2\varphi \right\rangle | \leq \| u^\varepsilon - u \|_{L^2(K)} \| \Delta\varphi + \omega^2\varphi \|_{L^2} .$$

Comme $\| u^\varepsilon - u \|_{L^2(K)}$ tend vers 0, nous obtenons par passage à la limite dans (43) :

$$\left\langle u, -\Delta\varphi - \omega^2\varphi \right\rangle = \langle f,\varphi \rangle ,$$

c'est à dire, ceci étant vrai pour tout φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{44}$$

(iv) Convergence dans $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Cette fois on ne peut raisonner comme au point (ii) car les dérivées secondes de G et G_ε ne sont pas localement intégrables. Nous allons en fait utiliser les équations satisfaites au sens des distributions par u et u^ε à savoir :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - (\dfrac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon) u^\varepsilon & = f, \\ \\ -\Delta u - \dfrac{\omega^2}{c^2} u & = f. \end{cases} \tag{45}$$

Par différence nous obtenons, après avoir posé $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u$:

$$-\Delta w^\varepsilon - \frac{\omega^2}{c^2} w^\varepsilon = i\varepsilon u^\varepsilon.$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, un rapide calcul montre que :

$$-\Delta(\varphi w^\varepsilon) = \psi^\varepsilon, \tag{46}$$

où ψ^ε est donnée par :

$$\psi^\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}\varphi w^\varepsilon - \Delta\varphi . w^\varepsilon - 2\nabla\varphi . \nabla w^\varepsilon + i\varepsilon\varphi u^\varepsilon. \tag{47}$$

Des points (i) et (ii) de la démonstration, nous savons que $\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Supposons maintenant que nous ayons choisi φ tel que $\varphi = 1$ dans B_R, nous avons :

$$\int_{B_R} |\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}|^2 \, dx \leq \int |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi w^\varepsilon)|^2 \, dx.$$

En utilisant le théorème de Plancherel il vient, en notant $\widehat{\varphi w^\varepsilon}$ la transformée de Fourier de φw^ε :

$$\left| \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{B_R} |\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}|^2 \, dx & \leq \displaystyle\int |\xi_i \xi_j|^2| \, \widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi)|^2 \, d\xi \\ & \leq \displaystyle\int |\xi|^4 \, |\widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{array} \right.$$

Mais nous avons $|\xi|^2 \widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi) = \hat{\psi}_\varepsilon(\xi)$ par conséquent :

$$\int_{B_R} |\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}|^2 \, dx \leq \| \, \psi_\varepsilon \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0, \tag{48}$$

ce qui achève la démonstration. □

Exercice 4 *Démontrer les formules (40) et (41) au sens des distributions.*

La fonction

$$G(x) = \frac{e^{i\omega \frac{|x|}{c}}}{4\pi |x|}$$

est appelée fonction de Green sortante, ou encore solution élémentaire sortante, de l'équation de Helmholtz (9). Elle est solution de l'équation :

$$-\Delta G - \frac{\omega^2}{c^2} \, G = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \tag{49}$$

Exercice 5 *Donner une démonstration directe de l'égalité (49).*

De même la solution u de (9) que nous avons construite au théorème 4 (qui constitue donc un résultat d'existence) est appelée solution sortante de (9). Le label “sortant” va être justifié par le comportement asymptotique à l'infini de la solution. C'est l'étude de ce comportement asymptotique qui va être précisément l'objet de la prochaine section.

2.4 Comportement asymptotique - Notion de solution sortante

Nous allons nous placer en coordonnées sphériques en posant :

$$x = r\Theta, \quad r > 0, \quad \Theta \in S^2. \tag{50}$$

où S^2 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{\Theta \in \mathbb{R}^3 \; / \; |\Theta| = 1\}$$

S^2 peut se paramétrer par deux angles “polaires”

$$(\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] \tag{51}$$

en posant, si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ désigne le repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\Theta = \sin\theta(\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}) + \cos\theta\ \vec{k} \tag{52}$$

Rappelons alors la formule, pour toute fonction φ intégrable :

$$\int \varphi(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \Big\{ \int_{S^2} \varphi(r\Theta) d\sigma(\Theta) \Big\}\ r^2\ dr \tag{53}$$

avec en outre, si $\Theta = (\theta,\varphi)$:

$$\int_{S^2} \psi(\Theta)\ d\sigma(\Theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(\theta,\varphi)\ \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ . \tag{54}$$

Dans cette section si u désigne la solution de (9) donnée par (38), nous nous intéressons au comportement lorsque $r \to +\infty$ de la fonction $r \to u(r,\Theta)$, Θ étant fixé. Ce comportement est précisé par le théorème suivant :

Théorème 5 *On a lorsque $r \to +\infty$:*

$$u(r\Theta) = A(\Theta)\ \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \tag{55}$$

où l'amplitude asymptotique dans la direction Θ, à savoir $A(\Theta)$, est donnée par :

$$A(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta.y}\ f(y)\ dy = \frac{1}{4\pi} \hat{f}(\frac{\omega}{c}\Theta) \tag{56}$$

où $\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f.

De plus la fonction $O(r^{-2})$ dans (55) est uniforme en Θ au sens où il existe une constante C indépendante de Θ telle que :

$$|u(r\Theta) - A(\Theta)\frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}| \leq \frac{C}{r^2}. \tag{57}$$

Démonstration : Notons que :

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2x.y + |y|^2 = |x|^2\ (1 - \frac{2x.y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2}).$$

Par conséquent :

$$|x-y| = |x|\ (1 - \frac{2x.y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Quand $|x| \to +\infty$, nous avons :

$$(1 - 2\frac{x.y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x.y}{|x|^2} + 0\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).$$

De façon plus précise nous pouvons écrire :

$$(1 - 2\frac{x.y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x.y}{|x|^2} + \varepsilon(x,y),$$

où la fonction $\varepsilon(x,y)$ vérifie :

$$\forall R > 0, \quad \exists\, C_R > 0 \quad / \quad \forall\, |y| \leq R, \quad |\varepsilon(x,y)| \leq \frac{C_R}{|x|^2}\ . \tag{58}$$

Par conséquent :

$$e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|} = e^{i\omega\frac{|x|}{c}}\ e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y}\ e^{i|x|\varepsilon(x,y)}\ .$$

Compte tenu des propriétés de la fonction $\varepsilon(x,y)$, nous pouvons écrire :

$$e^{i|x|\varepsilon(x,y)} = 1 + \eta(x,y), \tag{59}$$

où la fonction $\eta(x,y)$ vérifie :

$$\forall R > 0, \quad \exists\, \widetilde{C}_R > 0 \quad / \quad \forall |y| \leq R, \quad |\eta(x,y)| \leq \frac{\widetilde{C}_R}{|x|}. \tag{60}$$

De la même façon nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|}\ \big(1 + \nu(x,y)\big), \tag{61}$$

où la fonction $\nu(x,y)$ a les mêmes propriétés que la fonction $\eta(x,y)$ (cf (60)). Finalement, nous obtenons :

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{i\omega\frac{|x|}{c}}}{|x|}\ e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y}\ (1 + \rho(x,y)),$$

où ρ possède la propriété (60). Nous tirons alors :

$$u(r\Theta) = \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}\int \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta.y}}{4\pi} f(y)\ [1 + \rho(r\Theta,y)]dy,$$

ce que nous pouvons écrire :

$$u(r\Theta) = A(\Theta)\ \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} + R(r\Theta), \tag{62}$$

où l'amplitude $A(\Theta)$ est donnée par (56) et où le reste $R(r\Theta)$ est donné par :

$$R(r,\Theta) = \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}\int \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta.y}}{4\pi}\ f(y)\ \rho(r\Theta,y)\ dy. \tag{63}$$

Le support K de f étant compact, il existe $C_K > 0$ (cf propriété (60)) telle que :

$$\forall y \in K \quad |\rho(r\Theta,y)| \leq \frac{C_K}{r}.$$

Il s'ensuit que :

$$|R(r,\Theta)| \leq \frac{C_K \parallel f \parallel_{L^1}}{4\pi r^2}, \tag{64}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Il est intéressant de rapprocher ce comportement asymptotique de la notion d'onde sphérique. Par définition une onde sphérique est une solution de l'équation de Helmholtz homogène qui ne dépend que de $r = |x|$. A l'aide du même changement de fonction que celui utilisé dans la démonstration du théorème 5, on démontre aisément qu'une telle solution est nécessairement de la forme :

$$u(r) = A\ \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + B\ \frac{e^{-i\frac{\omega r}{c}}}{r}$$

et apparait donc comme la somme :

- d'une onde sphérique divergente (ou sortante)

  $$u_s = \frac{A}{r}\ e^{i\frac{\omega r}{c}}$$

  En effet la solution

  $$u_s(r)\ e^{-i\omega t} = \frac{A}{r}\ e^{i\frac{\omega}{c}(r-ct)}$$

  est le produit d'un terme d'amplitude A/r par une fonction de $r - ct$ qui représente bien une onde se propageant dans le sens $r > 0$, c'est à dire une onde divergente ou encore sortante).

- d'une onde sphérique convergente (ou rentrante)

  $$u_r = \frac{B}{r}\ e^{-i\frac{\omega r}{c}}$$

  En effet la fonction

  $$u_r(r)\ e^{-i\omega t} = \frac{B}{r}\ e^{-i\frac{\omega}{c}(r+ct)}$$

  est le produit d'un terme d'amplitude B/r par une fonction $r + ct$ qui représente une onde se propageant dans le sens $r < 0$, c'est à dire une onde convergente ou encore rentrante.

Le théorème 5 montre donc que la solution u de (9) donnée par (38) a, lorsque l'on regarde à l'infini, le comportement d'une onde sphérique divergente ou sortante. C'est ce qui justifie le nom de " solution sortante" de (9). Nous verrons plus loin une caractérisation de la solution sortante qui nous permettra d'établir un résultat d'unicité, que nous n'avons pas pour le moment. En effet si nous avions fait le choix d'approcher $\frac{\omega^2}{c^2}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon$, nous aurions obtenu par passage à la limite sur la solution de carré sommable, la solution dite "rentrante" de l'équation de Helmholtz donnée par :

$$u(x) = \int \overline{G}(x-y)\, f(y)\, dy, \tag{65}$$

où $\overline{G}(x)$ est la fonction de Green rentrante, complexe conjugée de G, et donnée par :

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-i\omega\frac{|x|}{c}}}{|x|}.$$

Pour comprendre pourquoi on aboutit à ce résultat il suffit de remarquer que, compte tenu du choix de la définition de $\sqrt{z}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon} = -\frac{\omega}{c},$$

alors que, rappelons le :

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon} = \frac{\omega}{c}.$$

L'étude du comportement asymptotique à l'infini de cette solution donnerait :

$$u(r\Theta) = B(\Theta)\frac{e^{-i\omega\frac{r}{c}}}{4\pi r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big). \tag{66}$$

Autrement dit la solution rentrante se comporte comme une onde sphérique convergente dont l'amplitude est modulée en direction. Notons que solutions sortante et entrante ne se distinguent pas par la façon dont elles décroissent à l'infini (à chaque fois c'est en r^{-1}), mais par leurs oscillations, en l'occurence le signe de leur phase, ce qui se traduit par des sens de propagation opposés.

Notons également qu'une fois que l'on a construit deux solutions (qui sont toutes deux des solutions au sens des distributions appartenant à l'espace $H^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$) de (9), en l'occurence la solution sortante, notée u_s, et la solution entrante, notée u_r, on peut en construire une infinité en considérant $\alpha u_s + (1-\alpha)u_r$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Il nous faut donc absolument un critère supplémentaire, une condition à rajouter à (9), pour caractériser la solution sortante obtenue par absorption limite. C'est l'objet de la section 2.5.

2.5 Condition de radiation de Sommerfeld

L'idée est de trouver une condition qui caractérise le fait qu'une solution se comporte à l'infini comme

$$A(\Theta)\frac{e^{i\omega r}}{r}.$$

Bien entendu la fonction $A(\Theta)$ étant a priori inconnue, il s'agit de trouver une condition qui soit indépendante de $A(\Theta)$. Indiquons la démarche intuitive qui permet d'aboutir à cette condition. Pour cela il suffit de substituer à la solution sortante u son comportement à l'infini, à savoir :

$$u_\infty(r\Theta) = A(\Theta)\ \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}.$$

Notons que :

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial r}(r\Theta) = A(\Theta)\ \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}\ \big(i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{r}\big),$$

ce qui nous donne la condition de comportement à l'infini (indépendante de $A(\Theta)$).

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u_\infty = 0\Big(\frac{1}{r^2}\Big) \quad r \to +\infty,$$

qui n'est autre que la condition de radiation de Sommerfeld ou condition d'onde sortante. Enonçons maintenant notre résultat de façon précise :

Théorème 6 *La solution sortante u de (9) vérifie :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u = 0\Big(\frac{1}{r^2}\Big) \quad r \to +\infty.$$

Démonstration : Nous avons déjà vu que :

$$\nabla u(x) = \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\ \Big\{i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x-y|}\Big\}\ (x-y)\ f(y)\ dy.$$

En menant des calculs analogues à ceux fait dans la démonstration du théorème 5, on montre aisément que :

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\ \Big\{i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x-y|}\Big\}\ (x-y) = i\frac{\omega}{c}\ x\ \ \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{4\pi|x|^2}\ \ e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y}\ \big(1+\tilde{\rho}(x,y)\big),$$

où la fonction $\tilde{\rho}(x,y)$ a la propriété (60). Nous en déduisons que :

$$\nabla u(x) = i\ \frac{\omega}{c}\ x\ \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{4\pi|x|^2}\ \int e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y}\ \big(1+\tilde{\rho}(x,y)\big)\ f(y)\ dy,$$

et par suite que :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r\Theta) = i\frac{\omega}{c}\ A(\theta)\ \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + \tilde{R}(r\Theta),$$

où $A(\theta)$ est donné par (56) et $\tilde{R}$ par :

$$\tilde{R}(r\Theta) = i\frac{\omega}{c}\,\frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{4\pi r}\int e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y}\,\tilde{\rho}(r\Theta,y)\,dy.$$

Rappelons que nous avons montré dans la démonstration du théorème 5 que :

$$u(r\Theta) = A(\theta)\,\frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + R(r\Theta), \quad R(r\Theta) = \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{4\pi r}\int e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta\cdot y}\,f(y)\,\rho(r\Theta,y)\,dy.$$

On voit donc que :

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u\Big)(r\Theta) = \tilde{R}(r\Theta) - i\frac{\omega}{c}R(r\Theta).$$

Or de la même façon que nous avons montré que :

$$R(r\Theta) \leq \frac{C_K \parallel f \parallel_{L^1}}{4\pi r^2},$$

nous pouvons montrer que :

$$\tilde{R}(r\Theta) \leq \frac{C'_K \parallel f \parallel_{L^1}}{4\pi r^2}.$$

Nous en déduisons que :

$$|\Big(\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u\Big)(r\Theta)| \leq \frac{C''_K \parallel f \parallel_{L^1}}{4\pi r^2},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

Une conséquence du précédent résultat est la condition de radiation au sens faible qui est celle que nous utiliserons dans la suite.

Corollaire 1 *La solution sortante u de (9) satisfait :*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}|\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 d\sigma = 0,$$

où S_R désigne la sphère de rayon R.

Démonstration : En vertu du théorème précédent nous avons :

$$|\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 \leq \frac{C}{r^4},$$

d'où nous en déduisons :

$$\int_{S_R}|\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 d\sigma \leq \frac{C}{R^2}. \quad \square$$

Il faut maintenant remarquer que la condition de radiation distingue bien la solution sortante u_s de la solution rentrante u_r. En effet, si u_s vérifie :

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u_s = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big).$$

u_r vérifie par contre la condition de radiation rentrante :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}u_r = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big).$$

Cette dernière solution ne peut donc satisfaire la condition de Sommerfeld sortante puisque :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}\ u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}\ u_r - 2i\frac{\omega}{c}\ u_r = 2i\frac{\omega}{c}\ u_r + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big) = O\Big(\frac{1}{r}\Big)$$

De la même façon, il est facile de voir que parmi toutes les solutions $\alpha u_s + (1-\alpha)u_r$, seule $u_s(\alpha = 1)$ satisfait la condition de radiation sortante. Sur cette simple considération, il apparaît que le simple apport de la condition de Sommerfeld a permis de faire un grand pas vers l'unicité de la solution. Ceci va être confirmé par la prochaine section.

2.6 Résultat d'unicité pour l'équation de Helmholtz

Tout ce qui précède a permis de démontrer que le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)/ \\ -\Delta u - \dfrac{\omega^2}{c^2}u = f \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} |\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 \, d\sigma = 0 \end{array}\right. \tag{67}$$

admettait, pour tout f dans $L^2_c(\mathbb{R}^3)$, une solution, à savoir la solution sortante u donnée par la formule explicite (40). Nous allons maintenant établir que cette solution est unique. La preuve du résultat d'unicité va notamment reposer sur le théorème fondamental suivant :

Théorème 7 *(Théorème de Rellich) Soit $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus B_a)$ tel que, pour un certain $\alpha > 0$:*

$$\Delta u + \alpha u = 0, \quad \textit{pour } |x| > a,$$

alors on a l'alternative

(i) $u \equiv 0$ *pour* $|x| > a$,

(ii) $\exists\, C > 0, \quad \exists\, D > 0, \quad \exists R \geq a$ *tels que pour tout* $r \geq R \qquad \displaystyle\int_{R\leq|x|\leq r} |u|^2 dx \geq Cr - D.$

Démonstration : La preuve est triviale en dimension 1. Nous la laissons en exercice au lecteur (exercice 6). En dimension supérieure, les démonstrations usuelles de ce théorème sont basées sur la séparation de variables en coordonnées polaires et l'utilisation des propriétés des fonctions de Bessel. Nous donnons ci-dessous une preuve élémentaire qui ne fait pas appel (sinon de façon cachée) aux fonctions de Bessel. Cette preuve s'appuie sur un résultat relatif à une équation différentielle ordinaire :

Lemme 3 *Soit $v(r)$ une fonction localement de régularité H^2 dans $]a,+\infty[$ et satisfaisant :*

$$v''(r) + (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})v(r) = 0 \quad \text{pour } r > a \tag{68}$$

où λ est strictement positif et ν positif ou nul. Si v n'est pas identiquement nulle, il existe une constante $C > 0$ strictement positive et une constante $D \geq 0$ telles que pour r assez grand :

$$\int_a^r v(r)^2\, dr \geq C\, r - D. \tag{69}$$

Preuve du Lemme : Elle comporte trois étapes :

Etape 1 : Introduisons la fonction

$$\Psi(r) = \frac{1}{2}\, v'(r)^2 + \frac{1}{2}\, (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})\, v(r)^2. \tag{70}$$

Notons que, en posant

$$R = \max\Big(a, \sqrt{2}\, \frac{\nu}{\lambda}\Big)$$

nous avons :

$$r \geq R \quad \Longrightarrow \quad \Psi(r) \geq \frac{1}{2}\, v'(r)^2 + \frac{\lambda^2}{4}\, v(r)^2$$

et donc, en vertu du theorème d'unicité pour le problème de Cauchy associé à l'equation différentielle linéaire (68), la fonction v n'étant pas identiquement nulle

$$\Psi(R) > 0. \tag{71}$$

En multipliant l'équation (68) par $v'(r)$ on obtient l'identité :

$$\Psi'(r) = \frac{\nu^2}{r^3}\, v(r)^2 \tag{72}$$

ce qui montre que la fonction $\Psi(r)$ est strictement positive et croissante.

Etape 2 : Nous montrons que la fonction $\Psi(r)$ est bornée pour r assez grand.

En remarquant que $\quad r > R \quad \Longrightarrow \quad (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}) \geq \frac{\lambda^2}{2}$, on obtient :

$$\frac{\nu^2}{r^3} \leq \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{\nu^2}{r^3} \leq \frac{2\nu^2}{\lambda^2 r^3}\, (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})$$

On déduit alors de (72), comme $(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})\ v(r)^2 \leq 2\Psi(r)$, l'inéquation :

$$\Psi'(r) \leq \frac{4\nu^2}{\lambda^2 r^3}\ \Psi(r), \qquad \text{pour } r \geq R$$

et par conséquent :

$$Log\left|\frac{\Psi(r)}{\Psi(R)}\right| \leq \frac{4\nu^2}{\lambda^2}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^3} = \frac{2\nu^2}{\lambda^2 R^2} \leq 1.$$

Finalement, on obtient l'estimation :

$$\forall\ r \geq R, \quad |\Psi(r)| \leq e\ |\Psi(R)|.$$

Etape 3 : En multipliant l'équation (68) par $v(r)$ et en intégrant le résultat entre R et r, on obtient l'identité :

$$\int_R^r v'(\rho)^2\ d\rho = \int_R^r (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2})\ v(\rho)^2\ d\rho + v(r)\ v'(r) - v(R)\ v'(R)$$

Par ailleurs, pour $r \geq R$:

$$\begin{aligned} |v(r)\ v'(r)| &\leq \frac{1}{2}\ v(r)^2 + \frac{1}{2}\ v'(r)^2 \\ &\leq max(1, \frac{2}{\lambda^2})\ \left(\frac{1}{2}\ v'(r)^2 + \frac{\lambda^2}{4}\ v(r)^2\right) \\ &\leq max(1, \frac{2}{\lambda^2})\ |\Psi(r)| \end{aligned}$$

En vertu du résultat de l'étape 2, nous pouvons introduire :

$$A = \ max(1, \frac{2}{\lambda^2}) \cdot \sup_{r \geq R} |\Psi(r)|. \tag{73}$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{2}\int_R^r v'(\rho)^2\ d\rho \leq A + \frac{1}{2}\int_R^r (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2})\ v(\rho)^2\ d\rho \tag{74}$$

Etape 4 : Introduisons enfin :

$$\Phi(r) = \int_R^r \Psi(\rho)\ d\rho$$

En utilisant (74) et la définition de Ψ, nous obtenons

$$\Phi(r) \leq A + \int_R^r (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2})\ v(\rho)^2\ d\rho$$

Par ailleurs, de la croissance de $\Psi(r)$ (Etape 1), nous déduisons que :

$$\Phi(r) \geq \Psi(R)\,(r - R)$$

En combinant ces deux dernières inégalités il vient

$$\int_R^r (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2})\, v(\rho)^2\, d\rho \geq \Psi(R)\,(r - R) - A$$

soit en particulier

$$\int_R^r v(\rho)^2\, d\rho \geq \frac{1}{\lambda^2}\Psi(R)\, r - \frac{1}{\lambda^2}(A + R\Psi(R)) \tag{75}$$

c'est à dire le résultat annoncé en posant

$$D = \frac{1}{\lambda^2}(A + R\Psi(R)) \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{\lambda^2}\Psi(R)$$

qui sont bien strictement positifs en vertu de (71). □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. Nous utiliserons les coordonnées polaires généralisées :

$$x = r\widehat{x}, \quad r = |x|, \quad \widehat{x} \in S_{N-1} \text{ (sphère unité de } \mathbb{R})$$

et ferons appel à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité que nous noterons Δ^*. Rappelons que l'opérateur $-\Delta^*$ est un opérateur autoadjoint positif dans $L^2(S_{N-1})$ à résolvante compacte. Il admet donc une suite croissante $\mu_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, de valeurs propres, vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = +\infty$$

et une base hilbertienne (dans $L^2(S_{N-1})$) de fonctions propres $w_n(\omega)$ telles que :

$$\forall n \geq 0, \quad -\Delta^* w_n = \mu_n w_n$$

Par ailleurs la première valeur propre $\mu_0 = 0$ est simple. Nous pouvons utiliser les coordonnées polaires généralisées pour exprimer le laplacien dans $\mathbb{R}^N$:

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta^*$$

Si $u(x) \equiv u(r\omega)$ satisfait les hypothèses du théorème nous avons donc :

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta^* u + \alpha u = 0. \tag{76}$$

Comme $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus B_R)$, nous pouvons décomposer u sous la forme :

$$u(r\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(r)\, w_n(\omega)$$

où chaque fonction $u_n(r)$ est dans $H^2_{\text{loc}}(R,+\infty)$. Par ailleurs :

$$\int_{R\leq|x|\leq r} |u|^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_R^r |u_n(r)|^2 \, r^{N-1} \, dr \tag{77}$$

De l'équation (76) nous déduisons aisément que, pour chaque n :

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{du_n}{dr}\right)+\frac{\mu_n}{r^2}u_n+\alpha u_n=0, \quad r>R.$$

Si on utilise le changement de fonction inconnue :

$$v_n(r) = r^{\frac{N-1}{2}} u_n(r)$$

on obtient aisément :

$$\int_{R\leq|x|\leq r} |u|^2 \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_R^r |v_n(r)|^2 \, dr, \tag{78}$$

et pour chaque n

$$v_n''(r)+\alpha v_n(r)-\left(\mu_n+\frac{(N-1)(N-3)}{4}\right)\frac{v_n}{r^2}=0, \quad r>a. \tag{79}$$

Si la fonction u n'est pas identiquement nulle la formule (78) prouve qu'il existe un entier n tel que :

$$v_n \text{ n'est pas identiquement nulle pour } r>a.$$

et bien sur que :

$$\int_{R\leq|x|\leq r} |u|^2 dx \geq \int_R^r |v_n(r)|^2 \, dr \tag{80}$$

Pour conclure, il convient de distinguer 2 cas.

– (i) $N>2$ ou $n>0$. On peut appliquer le lemme 3 à v_n avec :

$$\lambda=\sqrt{\alpha}>0 \;\text{ et }\; \nu=\sqrt{\mu_n+\frac{(N-1)(N-3)}{4}}\geq 0.$$

On conclut alors aisément grâce à (80).

– (ii) $N=2$ et $n=0$. L'équation satisfaite par v_0 s'écrit :

$$v_0''(r)+\alpha v_0(r)-\frac{v_0(r)}{4r^2}=0$$

et ne relève pas de l'application du lemme 3. Ce cas doit donc être traité à part (nous invitons le lecteur à traiter ce cas à titre d'exercice). □

Le théorème de Rellich est plus souvent énoncé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème 8, si la fonction u n'est pas identiquement nulle, il existe une constante $C > 0$ et un réel $R_0 \geq a$ tel que :*

$$\forall\, r \geq R_0 \qquad \int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 dx \geq Cr$$

Démonstration : D'après le théorème 7,

$$r \longrightarrow \int_{R \leq |x| \leq r} |u|^2 dx$$

est une fonction croissante de r, nulle en $r = R$ et qui tend vers $+\infty$ lorsque $r \to +\infty$. Par conséquent si $D \geq O$ désigne la constante intervenant dans la conclusion du théorème 7, il existe un unique $R_0 \geq R \geq a$ tel que :

$$\int_{R \leq |x| \leq R_0} |u|^2 dx = D$$

On conclut alors aisément. $\square$

Remarque 7 *Les conclusions du théorème 7 et du corollaire 2 sont fausses pour $\alpha < 0$. Dans le cas $\alpha = 0$, ces conclusions sont vraies en dimension 1 mais fausses en dimension supérieure.*

Exercice 6 *Démontrer le lemme précédent pour $N = 1$. Démontrer ce résultat pour les solutions radiales en dimension 3.*

Exercice 7 *Trouver un contre-exemple au théorème 7 lorsque $\alpha < 0$ (en dimension 1) et en dimension 2 pour $\alpha = 0$.*

Théorème 8 *Le problème (67) admet au plus une solution.*

Démonstration : Il suffit, compte tenu de la linéarité des équations de montrer que $f = 0 \Longrightarrow u = 0$. Supposons donc que $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et vérifie :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = 0.$$

Nous multiplions cette égalité par $\overline{u}$ et intégrons le résultat sur la boule B_R de rayon R :

$$-\int_{B_R} \Delta u \, \overline{u} \, dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{B_R} |u|^2 \, dx = 0.$$

Grâce à la formule de Green nous obtenons :

$$\int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2 \right) dx - \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial r} \, \overline{u} \, d\sigma = 0,$$

ce que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\left| \begin{aligned} \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2 \right) dx \quad & - \int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right) \overline{u} \, d\sigma \\ & - i \, \frac{\omega}{c} \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

En prenant la partie imaginaire de cette égalité nous obtenons :

$$\frac{\omega}{c} \int_{S_R} |u|^2 \, d\sigma = -Im \int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right) \overline{u} \, d\sigma.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$\| \, u \, \|^2_{L^2(S_R)} \leq \; \frac{c}{\omega} \, \| \, u \, \|_{L^2(S_R)} \, \| \, \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \, \|_{L^2(S_R)} \; ,$$

c'est à dire :

$$\| \, u \, \|_{L^2(S_R)} \leq \; \frac{c}{\omega} \, \| \, \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \, \|_{L^2(S_R)} \; .$$

ce qui, compte tenu de la condition de radiation de Sommerfeld, entraine :

$$\lim_{R \to +\infty} \| \, u \, \|_{L^2(S_R)} = 0.$$

Supposons alors que u soit non nulle. D'après le corollaire 2 (avec $a = 0$), il existe donc $C > 0$, $R_0 > 0$ tels que :

$$\forall r \geq R_0 \quad \int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 \, dx \geq Cr \quad (C > 0) \tag{81}$$

Or :

$$\int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 \, dx = \int_{R_0}^{r} U(\rho) \, d\rho, \tag{82}$$

où la fonction U est définie par :

$$U(\rho) = \int_{S_\rho} |u|^2 \, d\sigma.$$

D'après la première partie de la démonstration $\lim_{\rho \to +\infty} U(\rho) = 0$, par conséquent :

$$\exists R^* > 0 \; / \; \rho \geq R^* \Longrightarrow U(\rho) \leq \frac{C}{2}.$$

Par suite :

$$\left| \begin{aligned} &\int_{R_0}^{r} U(\rho)\, d\rho \;\leq\; \frac{C}{2}(r - R_0) \;\text{ si } R^* < R_0, \\ &\int_{R_0}^{r} U(\rho)\, d\rho \;\leq\; \int_{R_0}^{R^*} U(\rho)\, d\rho + \frac{C}{2}(r - R^*) \;\text{ sinon.} \end{aligned} \right.$$

Dans tous les cas, on obtient :

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{R_0}^{r} U(\rho)\, d\rho \;\leq\; \frac{C}{2}\,. \tag{83}$$

Mais de (81) et (82) on tire :

$$\frac{1}{r} \int_{R_0}^{r} U(\rho)\, d\rho \;\geq C,$$

ce qui est en contradiction avec (83). Donc nécessairement $u = 0$. □

Nous avons achevé l'analyse mathématique de base de notre problème en démontrant finalement l'existence et l'unicité de la solution de (67), cette solution étant donnée par (40).

2.7 Principe d'amplitude limite

Notre but est maintenant d'établir un lien de nature mathématique entre l'équation des ondes et l'équation de Helmholtz et plus exactement entre la solution du problème d'évolution associé à un second membre oscillant de façon périodique en temps à la fréquence ω et la solution sortante de l'équation de Helmholtz. Plus précisément, considérons le problème d'évolution (nous supposons f de carré intégrable à support compact) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, & \\ \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x)\, e^{-i\omega t}, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \tag{84}$$

et désignons par $u_\infty(x)$ la solution de l'équation de Helmholtz associée, c'est à dire du problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } u_\infty \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), & \\ -\Delta u_\infty - \dfrac{\omega^2}{c^2}\, u_\infty = f, & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} |\frac{\partial u_\infty}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}\, u_\infty|^2 \, d\sigma = 0. & \end{array}\right. \tag{85}$$

Le résultat que nous allons maintenant démontrer exprime que le comportement asymptotique quand $t \to +\infty$ de $u(x,t)$ est directement lié à u_∞ : c'est le principe d'amplitude limite qui apporte une justification physique supplémentaire au choix de la solution sortante.

Théorème 9 *On suppose $f \in L^2_c(\mathbb{R}^3)$, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \lim_{t\to+\infty} |u(x,t) - u_\infty(x)\, e^{-i\omega t}| = 0.$$

Démonstration : On sait que la solution u du problème (84) est obtenue par convolution du second membre $f(x)e^{i\omega t}$ par la solution fondamentale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$.

En l'occurence, on a la formule :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \frac{1}{4\pi s}\Big\{\int_{|y|=s} f(x-y)\, d\sigma(y)\Big\} e^{-i\omega(t-s)}\, ds, \\ &= e^{-i\omega t}\int_0^t \frac{e^{i\omega s}}{4\pi s}\Big\{\int_{|y|=s} f(x-y) d\sigma(y)\Big\}\, ds, \\ &= e^{-i\omega t}\int_0^t \int_{|y|=cs} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|}\, f(x-y)\, d\sigma(y)\, ds, \\ &= e^{-i\omega t}\int_{|y|\le ct} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|}\, f(x-y)\, dy. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\int_{|y|\le ct} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|}\, f(x-y)\, dy &= \int \frac{e^{i\omega\frac{|y|}{c}}}{4\pi|y|} f(x-y)\, dy \\ &= \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, f(y)\, dy = u_\infty(x). \qquad \square \end{aligned}$$

3 Résolution de l'équation de Helmholtz en milieu localement hétèrogène

3.1 Présentation du problème

Nous considérons maintenant l'équation des ondes avec une vitesse variable :

$$\frac{1}{c(x)^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{86}$$

où la fonction $c(x)$ est une fonction vérifiant :

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^3, \quad O < c_- \leq c(x) \leq c_\infty < +\infty. \tag{87}$$

Nous supposerons en outre que le milieu est homogène à l'infini et plus précisément qu'il existe $a > 0$ et $c_\infty > 0$ tels que :

$$|x| \geq a \Rightarrow c(x) = c_\infty. \tag{88}$$

c_∞ est la vitesse de propagation à l'infini : comme au chapitre 1 on s'intéressera à des termes sources harmoniques en temps, à fréquence $\omega > 0$:

$$f(x,t) = f(x)\; e^{-i\omega t}, \tag{89}$$

auquel cas nous cherchons des solutions de (86) qui sont également harmoniques de même fréquence :

$$u(x,t) = u(x)\; e^{-i\omega t}, \tag{90}$$

ce qui nous amène à résoudre l'équation de Helmholtz à coefficients variables :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f, \tag{91}$$

où nous ferons sur le second membre $f(x)$ la même hypothèse qu'au chapitre 1 :

$$f \in L^2_c(\mathbb{R}^3). \tag{92}$$

3.2 Difficultés du problème - Notion de solution sortante

Si on cherche à résoudre (91) dans le "cadre L^2", on se heurte bien entendu aux mêmes difficultés que dans le cas homogène. Formellement on est même dans une situation identique. En effet si on munit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}^3)$ du produit scalaire :

$$(u,v) = \int \frac{u(x)\overline{v(x)}}{c(x)^2}\; dx. \tag{93}$$

Il est facile de voir que l'opérateur non borné A défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D(A) & = H^2(\mathbb{R}^3), \\ & \\ Au & = -c^2 \Delta u, \quad \forall u \in D(A), \end{array} \right. \tag{94}$$

est autoadjoint et positif. Il suffit de remarquer que cet opérateur est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(u,v)$ définie sur $V \times V$, $V = H^1(\mathbb{R}^3)$, par

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u . \overline{\nabla v} \, dx \tag{95}$$

De plus, par des techniques perturbatives, on montre aisement que le spectre de A est continu et égal à :

$$\sigma(A) = \mathbb{R}^+. \tag{96}$$

En quelque sorte résoudre (91) équivaut à inverser l'opérateur $(A - \omega^2 I)$ ce qui est impossible puisque ω^2 appartient au spectre de A !

En outre l'exemple de l'équation en milieu homogène nous instruit sur le fait que l'on ne peut espérer un résultat d'unicité pour (91) sans prescrire à la solution cherchée un certain comportement à l'infini. Or, à l'infini, le milieu "ne voit" que la vitesse de propagation c_∞. Par cohérence avec le choix fait dans le cas d'un milieu homogène, il est naturel d'imposer la condition de radiation sortante :

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u = 0 \Big(\frac{1}{r^2} \Big) \quad r \to +\infty,$$

ou plutôt son équivalent sous forme faible

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \Big| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \Big|^2 \, d\sigma = 0. \tag{97}$$

Cela nous amène à introduire la notion de solution sortante :

Définition 1 *On appelle solution sortante de (91) toute fonction u vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3), \\ \\ \bullet \quad -\Delta u - \dfrac{\omega^2}{c^2} u = f, \quad dans\, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \\ \bullet \quad \displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \Big| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \Big|^2 \, d\sigma = 0. \end{array} \right. \tag{98}$$

Bien entendu, ce choix de solution a d'autres justifications analogues à celles que nous avons données au chapitre 1 dans le cas d'un milieu homogène à savoir notamment :

$$\begin{cases} -\text{ le principe d'amplitude limite} \\ -\text{ le principe d'absorption limite} \end{cases}$$

Les démonstrations sont toutefois plus délicates que dans le cas homogène et nous les omettrons ici (voir remarque ci-après).

Il s'agit maintenant d'essayer de démontrer un théorème d'existence et d'unicité pour (98). Nous le verrons, la démonstration de l'unicité reposera sur les mêmes arguments que dans le cas du milieu homogène. En revanche, pour ce qui concerne l'existence, il va falloir faire appel à de nouveaux outils mathématiques car on ne peut espérer obtenir une formule explicite pour la solution comme ce fut le cas au chapitre 1.

De façon plus précise nous allons utiliser un résultat puissant d'analyse fonctionnelle connu sous le nom d'alternative de Fredholm. Au préalable, il va falloir reformuler notre problème sous une forme susceptible de relever de l'application de cette alternative. C'est l'objet de la prochaine section où nous utiliserons de façon essentielle les résultats du chapitre 1.

Remarque 8 *Une autre méthode, que nous avons évitée dans ce chapitre, pour démontrer l'existence d'une solution consisterait à démontrer le principe d'absorption limite. En outre ce dernier a une portée très générale. Il présente toutefois le désavantage d'être peut être plus abstrait que la méthode que nous présenterons au prochain paragraphe. Nous avons fait le choix dans ce cours de reserver la démonstration du principe d'absorption limite au cas du problème de diffraction par un obstacle que nous traiterons au chapitre 4. Le lecteur pourra se convaincre aisément que la preuve qui y sera faite s'adapterait au problème considéré dans ce chapitre.*

3.3 Réduction à un domaine borné. Dérivation de l´équation de Lipman-Schwinger

L'idée est de considérer le milieu hétérogène correspondant à $c(x)$ comme une perturbation du milieu homogène de vitesse c_∞. Supposons que le problème (98) ait une solution u. Nous avons alors

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{99}$$

ce que nous pouvons réécrire :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}u = (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})u + f. \tag{100}$$

Introduisons la fonction

$$q = (\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2}).$$

Il s'agit d'une fonction mesurable bornée à support inclus dans B_a. L'équation (100) s'écrit encore :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c_\infty^2} u = \omega^2\, qu + f. \tag{101}$$

Le second membre $qu + f$ étant de carré intégrable et à support compact nous savons que, si u satisfait la condition de radiation de Sommerfeld sortante (98), on a la formule :

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i \frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \; \big(\; \omega^2 \; q(y) \; u(y) + f(y) \; \big) \; dy. \tag{102}$$

Cette équation intégrale satisfaite par u est l'équation de Lipman-Schwinger. Remarquons que cette équation permet de formuler un problème posé en domaine borné. En effet, nous pouvons toujours choisir a tel que $B_a \supset \text{supp} f$. Soit alors $u^* \in H^2(B_a)$ la restriction de u à B_a, nous tirons de (102), l'égalité, pour presque tout x dans B_a :

$$u^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i \frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \; \big(\; \omega^2 \; q(y) \; u^*(y) + f(y) \; \big) \; dy. \tag{103}$$

Supposons maintenant que l'équation intégrale (103) ait une solution u^* dans $H^2(B_a)$, alors définissons $u(x)$, prolongement de u^*, par :

$$\begin{cases} u(x) = u^*(x), & \text{si } x \in B_a, \\ u(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \frac{e^{i \frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \; \big(\; \omega^2 \; q(y) \; u^*(y) + f(y) \; \big) \; dy, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que la fonction $u(x)$ ainsi construite est solution de l'équation de Lipman-Schwinger et par conséquent est solution sortante de (90). Nous avons donc réduit la résolution de l'équation de Helmholtz à celle d'un problème posé dans B_a :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^* \in H^2(B_a) \text{ tel que, p.p. } x \in B_a, \\ \\ u^*(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \frac{e^{i \frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \; \big(\; \omega^2 \; q(y) \; u^*(y) + f(y) \; \big) \; dy. \end{cases} \tag{104}$$

3.4 Résolution de l'équation de Lipman-Schwinger à l'aide de l'alternative de Fredholm

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la résolution du problème (qui n'est rien d'autre que (104), à la régularité $L^2(B_a)$ près) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^* \in L^2(B_a) \text{ tel que, p.p. } x \in B_a, \\[2ex] u^*(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \left(\omega^2 \, q(y) \, u^*(y) + f(y) \right) dy. \end{array} \right. \tag{105}$$

Pour reformuler ce problème, introduisons la fonction $u_\infty(x)$ définie par :

$$u_\infty(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_a} \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} f(y) \, dy, = \int_{B_a} G_\infty(x-y) \, f(y) \, dy. \tag{106}$$

où nous avons posé

$$G_\infty(x) = \frac{1}{4\pi} \, e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x|}. \tag{107}$$

On notera que u_∞ n'est autre que la solution produite par la source f dans le milieu "non perturbé" c'est à dire dans l'espace homogène de vitesse c_∞. Une telle solution est appelée onde incidente, la différence $u - u_\infty$ étant l'onde diffractée. D'après le chapitre précédent, nous savons que :

$$\| \, u_\infty \, \|_{L^2(B_a)} \leq \| \, G_\infty \, \|_{L^1(B_{2a})} \, \| \, f \, \|_{L^2(B_a)} \, . \tag{108}$$

De la même façon, si pour v dans $L^2(B_a)$, nous définissons :

$$Tv(x) = \omega^2 \int G_\infty(x-y) \, q(y) \, v(y) \, dy, \tag{109}$$

nous avons $Tv \in L^2(B_a)$ et en outre :

$$\| \, Tv \, \|_{L^2(B_a)} \leq \; \omega^2 \; \| \, q \, \|_{L^\infty} \, \| \, G_\infty \, \|_{L^1(B_{2a})} \, \| \, v \, \|_{L^2(B_a)} \, . \tag{110}$$

Autrement dit, la formule (109) définit un opérateur T linéaire continu de $L^2(B_a)$ dans lui même vérifiant :

$$\| \, T \, \|_{\mathcal{L}(L^2(B_a))} \leq \; \omega^2 \; \| \, q \, \|_{L^\infty} \, \| \, G_\infty \, \|_{L^1(B_{2a})} \, . \tag{111}$$

A l'aide de u_∞ et de l'opérateur T nous pouvons reformuler le problème (105) sous la forme :

$$\text{Trouver } u^* \in L^2(B_a) \text{ tel que : } \quad (I - T) \, u^* = u_\infty. \tag{112}$$

Autrement dit il s'agit d'inverser l'opérateur $I - T$ dans $L^2(B_a)$. On peut donner une réponse immediate lorsque :

$$\omega^2 \; \| \, q \, \|_{L^\infty} \, \| \, G_\infty \, \|_{L^1(B_{2a})} < 1. \tag{113}$$

Dans ce cas $\| \; T \; \|_{\mathcal{L}(L^2(B_a))} < 1$ et il est bien connu que $I - T$ est un isomorphisme. Ce résultat n'est toutefois pas satisfaisant car (113) équivaut à :

$$2\,\omega^2 a^2 \, \| \, \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \, \|_{L^\infty} < 1, \tag{114}$$

ce qui correspond :

- Soit à une hypothèse de faible perturbation : $\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{c_\infty^2}$ est “petit”.
- Soit à une hypothèse “basse fréquence” : ω est petit.

Pour pouvoir traiter le cas des perturbations et des fréquences quelconques, il va nous falloir utiliser un nouvel outil : l'alternative de Fredholm. De façon précise on a le :

Théorème 10 *Soit X un espace de Banach et T un opérateur compact de X dans lui même, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\left| \begin{array}{lll} (i) & I - T & \textit{est un isomorphisme de } X \textit{ dans } X, \\[2ex] (ii) & I - T & \textit{est surjectif,} \\[2ex] (iii) & I - T & \textit{est injectif.} \end{array} \right.$$

Démonstration : Voir annexe A. □

En pratique ce théorème dit que, si T est un opérateur compact, pour pouvoir affirmer que le problème :

$$\text{Trouver } u^* \in X \text{ tel que } u^* - Tu^* = f, \tag{115}$$

admet, pour tout f dans X , une solution unique il suffit de montrer soit l'existence d'une solution (surjectivité), soit l'unicité (injectivité). C'est ce dernier fait que nous tâcherons d'exploiter plus loin. Dans un premier temps il nous faut d'abord vérifier que le problème (105) relève bien de l'application de l'alternative de Fredholm. C'est l'objet du :

Lemme 4 *L'opérateur T est compact dans $L^2(B_a)$.*

Démonstration : Il suffit en fait de remarquer que T applique continuement $L^2(B_a)$ dans $H^1(B_a)$. Pour cela nous remarquons que, pour tout v dans $L^2(B_a)$:

$$\nabla(Tv)(x) = \omega^2 \int_{B_a} \nabla G_\infty(x-y)\; q(y)\; v(y)\; dy),$$

(compte tenu que $\nabla G_\infty \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$) à partir de quoi nous obtenons :

$$\| \nabla(Tv) \|_{L^2(B_a)} \leq \omega^2 \ \| \nabla G_\infty \|_{L^1(B_{2a})} \cdot \| q \|_{L^\infty} \cdot \| v \|_{L^2(B_a)} . \tag{116}$$

Ceci, joint à l'estimation (110), montre que :

$$T \in \mathcal{L}(L^2(B_a),H^1(B_a)), \tag{117}$$

et que :

$$\| T \|_{\mathcal{L}(L^2(B_a),H^1(B_a))} \leq \omega^2 \ \| q \|_{L^\infty} \{\| G_\infty \|^2_{L^1(B_{2a})} + \| \nabla G_\infty \|^2_{L^1(B_{2a})}\}^{\frac{1}{2}}. \tag{118}$$

Comme l'injection $H^1(B_a) \hookrightarrow L^2(B_a)$ est compacte, il s'ensuit que T est compact dans $L^2(B_a)$. $\square$

Il suffit donc de montrer que $I - T$ est injectif ce qui équivaut, ainsi que nous allons le voir, à démontrer l'unicité pour notre problème initial. En effet, soit $u^* \in Ker(I - T)$, posons :

$$u(x) = \int_K G_\infty(x - y) \ u^*(y) \ q(y) \ dy.$$

D'après le chapitre précédent, nous savons que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et vérifie :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2_\infty} \ u = q \ u^*. \tag{119}$$

Par ailleurs le fait que u^* appartienne à $Ker(I - T)$ prouve que

$$u|_{B_a} = u^*,$$

et donc que $qu^* = qu$. Compte tenu de la définition de q, il s'ensuit que :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{120}$$

et satisfait en outre (voir section 1) la condition de radiation de Sommerfeld :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} \ u \right|^2 d\sigma = 0. \tag{121}$$

Il nous reste à montrer que les conditions (120) et (121), jointes à la régularité $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, entrainent que $u = 0$, et donc que $u^* = 0$. Ceci correspond bien au résultat annoncé. Démontrons alors le :

Lemme 5 *Le problème (98) admet au plus une solution sortante.*

Démonstration : Supposons donc que u satisfasse (120) et (121). Alors en procédant exactement comme au théorème (8), on montre que :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} |u|^2 \, d\sigma = 0. \tag{122}$$

En fait, le lecteur vérifiera que l'on a l'identité :

$$\int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2 \right) dx - \int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \right) \overline{u} \, d\sigma - \frac{i\omega}{c_\infty} \int_{S_R} |u|^2 \, d\sigma = 0,$$

pour tout $R > a$. On termine alors comme pour le théorème 8). Le théorème de Rellich permet d'abord de montrer que :

$$|x| \geq a \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0. \tag{123}$$

Pour conclure il suffit d'invoquer le théorème suivant, théorème dit de “prolongement unique”, dont le lecteur trouvera une démonstration dans l'annexe B.

Théorème 11 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et u une fonction de $H^2_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ vérifiant :*

$$p.p. \ x \in \mathcal{O}, \quad |\Delta u(x)| \leq C \Big(|u(x)| + |\nabla u(x)| \Big), \tag{124}$$

où C est une constante > 0. Si on peut trouver une boule $B(x_0,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ telle que :

$$u = 0 \quad p.p. \quad \text{dans } B(x_0,\varepsilon), \tag{125}$$

alors u est identiquement nulle dans $\mathcal{O}$.

Nous pouvons appliquer le théorème à u avec $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$ et en choisissant pour $B(x_0,\varepsilon)$ n'importe quelle boule située dans la région $\{|x| > a\}$. En effet le fait que u soit solution de l'équation de Helmholtz entraine, si $c^- = \inf \ c(x) > 0$:

$$|\Delta u(x)| \leq \frac{\omega^2}{c_-^2} \, |u(x)| \quad p.p. \ x \in \mathbb{R}^N$$

On conclut alors que $u = 0$. □

Finalement, par application de l'alternative de Fredholm, nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 12 *L'équation de Helmholtz en milieu hétérogène (90) admet une solution sortante et une seule $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.*

Commentaires :

- L'équation de Helmholtz (90) n'est pas l'équation la plus générale que l'on puisse imaginer en milieu hétérogène. En fait, on aimerait pouvoir résoudre

$$-\text{div }(\mu \nabla u) - \rho \omega^2 u = f, \tag{126}$$

  toujours dans le cas où le milieu de propagation est localement hétérogène :

$$|x| \geq a \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = \rho_\infty, \quad \mu(x) = \mu_\infty, \tag{127}$$

  auquel cas on adjoint à (126) la condition de radiation

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} |\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u|^2 d\sigma = 0, \tag{128}$$

  avec $c_\infty = (\mu_\infty / \rho_\infty)^{\frac{1}{2}}$, vitesse de propagation à l'infini. Lorsque $\mu(x)$ présente des discontinuités, la méthode que nous avons utilisée ici ne s'applique plus. En revanche on peut l'adapter (voir exercice ci-après) au cas ou $\mu(x)$ est suffisamment régulière :

$$\mu(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N). \tag{129}$$

- En fait, lorsque μ est discontinue, on peut toujours résoudre (126) à l'aide de l'alternative de Fredholm mais il faut utiliser des techniques différentes pour se ramener à un problème posé en domaine borné (ce qui est essentiel pour pouvoir appliquer des arguments de compacité). Sans entrer dans le détail, citons entre autres :

  - les méthodes de couplage avec formules de représentation intégrale.

  - les méthodes de couplage avec des développements en séries, type séries de Fourier.

- Comme nous l'avons déjà dit l'un des points clés de la démonstration a été la compacité de l'opérateur T. C'est à ce niveau qu'il était nécessaire d'avoir un problème formulé en domaine borné.

Exercice 8 *On considère l'équation de Helmholtz (126) où les coefficients $\rho(x)$ et $\mu(x)$ sont supposés satisfaire :*

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty & p.p.\ x \in \mathbb{R}^3 \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty & p.p.\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

On suppose en outre que (127) a lieu et que la fonction $\mu(x)$ a la régularité (129).

1. *Montrer que l'opérateur intégral*

$$(Tu)(x) = \int_{B_a} G_\infty(x-y)[L\mu(y).\nabla u(y) + q(y)u(y)]dy$$

   où $q = \omega^2/c^2 - \omega^2/c_\infty^2$ et $L\mu = \nabla$ (Log μ), est un opérateur linéaire continu de $H^1(B_a)$ dans lui même.

2. *En utilisant des techniques analogues à celles du théorème 4 (iv), montrer que T applique continuement $H^1(B_a)$ dans $H^2(B_a)$. En déduire la compacité de T.*

3. *Adapter la démonstration du théorème 12 pour montrer un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (126), (128).*

3.5 Diffraction d'une onde plane par une hétérogénéité locale - Notion d'amplitude de diffusion

Considérons d'abord le milieu homogène de vitesse c_∞. Une onde plane harmonique est une solution particulière de l'équation de Helmholtz homogène :

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c_\infty^2} u = 0, \tag{130}$$

de la forme :

$$u(x) = e^{ik.x}, \tag{131}$$

où k est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ appelé vecteur d'onde. Il est immédiat de vérifier que pour que (131) soit solution de (130) il faut et il suffit que k satisfasse la relation de dispersion :

$$|k|^2 = \frac{\omega^2}{c_\infty}. \tag{132}$$

Autrement dit k doit appartenir à la sphère centrée à l'origine de rayon ω/c_∞. Tous les vecteurs d'onde admissibles sont donc de la forme $k = \omega/c_\infty \phi$ où ϕ est un vecteur unité de $\mathbb{R}^3$ qui n'est autre que la direction de propagation de l'onde plane. Désormais, étant donné $\phi \in S^2$, nous désignerons par $u_I(\phi)$ l'onde plane de direction ϕ :

$$u_I(\phi; x) = e^{i\frac{\omega}{c}\phi\cdot x}. \tag{133}$$

Remarque 9 *L'onde plane définie par (131) est une onde d'amplitude 1. Il est évident que tout multiple de cette solution définit également une onde plane.*

Si maintenant on introduit une perturbation locale du milieu de propagation en remplaçant par exemple la vitesse uniforme c_∞ par une distribution de vitesse $c(x)$ vérifiant les hypothèses introduites au paragraphe 2.1, il est naturel de se demander ce que "devient" l'onde plane (131). Mathématiquement, la bonne façon de poser le problème consiste à rechercher une solution de l'équation de Helmholtz homogène à coefficients variables :

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \tag{134}$$

sous la forme d'une perturbation de l'onde plane. Autrement dit, on cheche la solution du problème (où la direction ϕ, supposée donnée, apparaît comme un paramètre du problème) sous la forme

$$u(x) \equiv u(\phi) = u_I(\phi) + u_D(\phi), \tag{135}$$

où, selon le langage utilisé par les physiciens :

$$\begin{cases} \bullet\ u_I(\phi; x) = e^{ik.x} \text{ est l'onde plane incidente,} \\ \\ \bullet\ u_D(\phi; x) \text{ est le champ diffracté.} \end{cases}$$

En d'autres termes u_D est le champ "renvoyé" par l'hétérogénéité "$c(x) - c_\infty$".

Notons que par rapport au paragraphe précédent, u_I remplace u_∞.

Compte tenu que $\Delta u_I(\phi) + \omega^2/c_\infty^2 u_I(\phi) = 0$, il est facile, en injectant (135) dans (134), de voir que u_D est solution de l'équation avec second membre :

$$-\Delta u_D(\phi) - \frac{\omega^2}{c^2}\, u_D(\phi) = (\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - \frac{\omega^2}{c^2})\, u_I(\phi). \tag{136}$$

En outre, c'est au champ diffracté u_D que l'on va demander de satisfaire la condition de radiation sortante

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} |\frac{\partial u_D(\phi)}{\partial r} - i\frac{\omega}{c_\infty} u_D(\phi)|^2 \, d\sigma = 0. \tag{137}$$

Notons que le problème à résoudre pour u_D ((136), (137)) est exactement du type de celui considéré dans les sections 2.1 à 2.3.

Remarque 10 *Les physiciens appellent la solution $u = u_I + u_D$ le champ total. Les mathématiciens disent que la solution u ainsi construite est une fonction propre généralisée de l'opérateur $A = -c^2\Delta$ associée à la valeur propre ω^2 au même titre que e^{ikx} est une fonction propre généralisée de $A_\infty = -c_\infty^2\Delta$: en effet u satisfait bien $Au = \omega^2 u$ au sens des distributions" mais n'est pas une vraie fonction propre de A car elle n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^3)$ (et donc pas au domaine de A).*

Notons que, outre c et c_∞, les seules données du problème sont :

$$\left|\begin{array}{l} \bullet \text{ la fréquence } \omega > 0, \\[2ex] \bullet \text{ la direction de propagation de l'onde incidente } \phi \in S^2. \end{array}\right.$$

Bien sûr, l'application du théorème 12, nous permet d'affirmer que pour chaque $\phi \in S^2$, le problème ((136), (137)) admet une solution unique :

$$u_D(\phi) \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3). \tag{138}$$

Nous allons conclure ce paragraphe par la notion d'amplitude de diffusion. Pour cela, nous allons étudier le comportement asymptotique à l'infini du champ diffracté u_D. Pour cela nous fixons une direction d'observation Θ appartenant à S^2 et faisons tendre $r = |x|$ vers $+\infty$. En utilisant les résultats du chapitre 1 (section 1), nous savons que :

$$u_D(\phi; r\Theta) = \frac{A(\Theta,\phi)}{r}\, e^{i\frac{\omega}{c_\infty}r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big). \tag{139}$$

En effet il suffit de remarquer que (ceci n'est autre que l'équation de Lipman-Schwinger - noter la différence avec (136)) :

$$-\Delta u_D(\phi) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\, u_D(\phi) = (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\, u(\phi), \quad (u = u_D + u_I) \tag{140}$$

auquel cas nous savons (voir théorème 5) que :

$$\left|\begin{array}{lcl} A(\Theta,\phi) & = & \displaystyle\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\frac{\omega}{c_\infty}\Theta.y}\, (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\, u(\phi; y)\, dy \\[3ex] & = & \displaystyle\frac{1}{4\pi}\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\, u_I(-\Theta; y)\, u(\phi; y)\, dy. \end{array}\right. \tag{141}$$

Par définition la quantité $A(\omega; \Theta,\phi)$ est l'amplitude de diffusion dans la direction Θ associée à une onde plane incidente de fréquence ω et de direction ϕ. La formule (141) montre que la dépendance de A est analytique par rapport à Θ. En outre, la fonction A a une propriété fondamentale, connue sous le nom principe de réciprocité.

Théorème 13 *La fonction $A(\Theta,\phi)$ vérifie :*

$$\forall\ (\Theta,\phi) \in S^2 \times S^2 \quad A(\Theta,\phi) = A(-\Theta, -\phi).$$

Démonstration : Le résultat est une conséquence du lemme suivant (dont la démonstration est donnée plus loin) :

Lemme 6 *Soit $f_i \in L^2_c(\mathbb{R}^3)$, $i = 1{,}2$ à support inclu dans B_a. Soit u_i l'unique solution sortante de l'équation de Helmholtz sortante associée à la source f_i*

$$-\Delta u_i - \frac{\omega^2}{c^2} = f_i, \quad dans\ \mathbb{R}^3. \tag{142}$$

alors on a l'identité :

$$\int f_1(x)\, u_2(x)\, dx = \int f_2(x)\, u_1(x)\, dx \tag{143}$$

Nous appliquons ensuite le lemme avec :

$$\begin{cases} f_1 = (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(\phi), & u_1 = u_D(\phi), \\ \\ f_2 = (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(-\Theta), & u_2 = u_D(-\Theta), \end{cases}$$

pour obtenir l'égalité

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(\phi)\, u_D(-\Theta)\, dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(-\Theta)\, u_D(\phi)\, dx,$$

c'est à dire, comme $u_D(\phi) = u(\phi) - u_I(\phi)$ et $u_D(-\Theta) = u(-\Theta) - u_I(-\Theta)$,

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(\phi)\, u(-\Theta)\, dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u_I(-\Theta)\, u(\phi)\, dx,$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer (2 fois) la formule (141) qui nous donne :

$$\begin{cases} A(\Theta,\phi) & = & \frac{1}{4\pi}\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\, u(\phi)\, u_I(-\Theta)\, dx, \\ \\ A(-\phi, -\Theta) & = & \frac{1}{4\pi}\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})(y)\, u(-\Theta)\, u_I(\phi)\, dx. \end{cases} \tag{144}$$

□

Preuve du lemme 6. Des équations (235), nous déduisons que :

$$f_1\, u_2 - f_2\, u_1 = \Delta u_2\, u_1 - \Delta u_1\, u_2$$

Après intégration sur B_R avec $R > a$, il vient, d'après la formule de Green

$$\int \big(f_1\, u_2 - f_2 u_1\big)\, dx = \int_{S_R} \Big(\frac{\partial u_2}{\partial r}\, u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial r}\, u_2\Big)\, dx \tag{145}$$

Comme u_1 et u_2 sont des solutions sortantes, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} = i\omega u_i + w_i, \quad \text{avec} \quad \lim_{R\to+\infty} \|w_i\|_{L^2(S_R)} = 0.$$

Nous avons alors :

$$\int_{S_R} \Big(\frac{\partial u_2}{\partial r}\, u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial r}\, u_1\Big)\, d\sigma = \int \big(w_1\, u_2 - w_2\, u_1\big)\, d\sigma$$

Par conséquent

$$\left|\int_{S_R} \Big(\frac{\partial u_2}{\partial r}\, u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial r}\, u_2\Big)\, d\sigma\right| \leq \|u_1\|_{L^2(S_R)}\, \|w_2\|_{L^2(S_R)} + \|u_2\|_{L^2(S_R)}\, \|w_1\|_{L^2(S_R)}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini, comme $\|u_i\|_{L^2(S_R)}$ est borné alors que $\|w_i\|_{L^2(S_R)}$ tend vers 0, il vient :

$$\forall\, R > a, \quad \int_{S_R} \Big(\frac{\partial u_2}{\partial r}\, u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial r}\, u_2\Big)\, d\sigma = 0,$$

et (145) permet de conclure. □

Nous savions que $A(\Theta,\phi)$ dépendait analytiquement de Θ. Le théorème de réciprocité démontre que $A(\Theta,\phi)$ dépend analytiquement des deux "angles" Θ et ϕ.

3.6 Diffraction d'une onde émise par une source ponctuelle.

Le problème que nous considérons ici est un cas limite du problème (98) lorsque le terme source f converge vers une masse de Dirac localisée en un point x_0 à l'extérieur de la zone d'hétérogénéité du milieu que nous désignerons par :

$$\overline{\Omega} = \mathrm{supp}\ (c - c_\infty).$$

Dans ce qui suit x_0 désigne un point dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et nous utiliserons par convention les lettres grasses pour évoquer les ondes émises pas une source ponctuelle.

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(x_0;\cdot) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus x_0) \cap L^2(\mathbb{R}^3), \\[2ex] -\Delta \mathbf{u} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\mathbf{u} = \delta_{x_0}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\[2ex] \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - i\frac{\omega}{c_\infty}\mathbf{u}\right|^2 d\sigma = 0. \end{cases} \tag{146}$$

On peut voir ce problème comme un problème de diffraction en utilisant comme onde incidente la solution qu'on obtiendrait avec la même source dans un milieu homogène de vitesse c_∞. Cette solution est connue explicitement :

$$\mathbf{u}_I(x_0; x) = \frac{e^{i\omega\frac{|x-x_0|}{c}}}{4\pi|x-x_0|} \tag{147}$$

On cherche alors la solution $\mathbf{u}(x_0; \cdot)$ de (146) sous la forme

$$\mathbf{u}(x_0; \cdot) = \mathbf{u}_I(x_0; \cdot) + \mathbf{u}_D(x_0; \cdot) \tag{148}$$

auquel cas on voit que la fonction $\mathbf{u}_D(x_0; \cdot)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_D \equiv \mathbf{u}_D(x_0; \cdot) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \text{ tel que} \\ \\ -\Delta \mathbf{u}_D - \dfrac{\omega^2}{c^2}\mathbf{u}_D = (\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2})\mathbf{u}_I, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \\ \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \mathbf{u}_D}{\partial r} - i\frac{\omega}{c_\infty}\mathbf{u}_D \right|^2 d\sigma = 0. \end{cases} \tag{149}$$

Ce problème relève bien évidemment de l'application du théorème ce qui assure l'existence et l'unicité de $\mathbf{u}_D$ et par suite celle de $\mathbf{u}$.

Remarque 11 *Il y a une petite subtilité dans l'énoncé des problèmes (146) et (149). En effet, la présence de la distribution de Dirac au second membre de l'équation pour* $\mathbf{u}$ *nous conduit à abandonner la régularité* H^2 *(même* H^1*) au voisinage de* x_0*. Ce terme disparaît au second membre de l'équation en* $\mathbf{u}$ *de telle sorte que l'on peut bien chercher* $\mathbf{u}_D$ *localement dans* H^2*. La singularité en* x_0 *de* $\mathbf{u}$ *est donc celle du champ incident* $\mathbf{u}_I$*. L'équivalence entre fait implicitement appel à un résultat de régularité elliptique intérieure.*

On a, pour la diffraction des ondes sphériques, un résultat de réciprocité analogue au théorème pour la diffraction des ondes planes.

Théorème 14 *La fonction* $\mathbf{u}_D(x_0; x)$ *vérifie :*

$$\forall\ (x_0,x) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \quad \mathbf{u}_D(x_0; x) = \mathbf{u}_D(x; x_0).$$

Démonstration : Elle est très similaire à la preuve du théorème 14 et nous la laissons au lecteur à titre d'exercice. □

Enfin, il y a un lien naturel entre ondes planes et ondes sphériques quand on regarde à l'infini. En effet, comme nous l'avions fait pour l'onde plane, on peut réécrire le problème satisfait par $\mathbf{u}_D$ sous la forme

$$-\Delta \mathbf{u}_D - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\mathbf{u}_D = (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\mathbf{u} \tag{150}$$

auquel cas en utilisant l'équation de Lipman-Schwinger, on établit aisément que

$$\mathbf{u}_D(x_0; r\Theta) = \frac{\mathbf{A}(\Theta,x_0)}{r}\, e^{i\frac{\omega}{c_\infty}r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big). \tag{151}$$

où l'amplitude $\mathbf{A}(\Theta,x_0)$ est donnée par :

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathbf{A}(\Theta,x_0) & = & \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int e^{-i\frac{\omega}{c_\infty}\Theta.y}\,(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ \mathbf{u}(x_0;y)\ dy \\ & = & \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ u_I(-\Theta;y)\ \mathbf{u}(x_0;y)\ dy. \end{array}\right. \tag{152}$$

Ce résultat nous permet d'établir un principe de réciprocité dit "mixte"entre les ondes diffractées correspondant à une onde plane et à une source ponctuelle. Ce type de résultat se révèle par exemple très utile pour l'étude du problème inverse.

Théorème 15 *On a la relation*

$$\forall\ (\Theta,x_0) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad 4\pi\ \mathbf{A}(-\Theta,x_0) = u_D(\Theta;x_0).$$

Démonstration : Nous appliquons le lemme 6 avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 = (\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2})\ u_I(\Theta), & u_1 = u_D(\Theta), \\ f_2 = (\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2})\ \mathbf{u}_I(x_0), & u_2 = \mathbf{u}_D(x_0), \end{array}\right.$$

pour obtenir l'égalité

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\ u_I(\Theta)\ \mathbf{u}_D(x_0)\ dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\ \mathbf{u}_I(x_0)\ u_D(\Theta)\ dx,$$

c'est à dire, comme $u_D(\Theta) = u(\Theta) - u_I(\Theta)$ et $\mathbf{u}_D(x_0) = \mathbf{u}(x_0) - \mathbf{u}_I(x_0)$,

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\ u_I(\Theta)\ \mathbf{u}(x_0)\ dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\ \mathbf{u}_I(x_0)\ u(\Theta)\ dx, \tag{153}$$

Ce résultat n'est autre que le résultat annoncé. En effet, d'après (152), le terme de gauche de (153) n'est autre que $4\pi\ \mathbf{A}(-\Theta, x_0)$ alors que, à partir de (136) on peut écrire :

$$u_D(\Theta; x) = \int \frac{e^{i\omega\frac{|x-y|}{c}}}{4\pi|x-y|}\,(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ u(\Theta; y)\ dy$$

En particulier, en prenant $x = x_0$ et en utilisant la définition (147) de $\mathbf{u}_I(x_0,\cdot)$, on a :

$$u_D(\Theta; x_0) \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})\ \mathbf{u}_I(x_0)\ u(\Theta; y)\ dy$$

où on reconnait le membre de droite de l'égalité (153). $\square$

4 Résolution des équations de Maxwell en milieu homogène

4.1 Equations de Maxwell dans $\mathbb{R}^3$ en régime harmonique

Nous nous intéressons au couple d'équations suivant où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont les champs électrique et magnétique.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{u} - i\omega\mu_0\mathbf{v} = 0 & \text{loi de Lenz-Faraday} \\ \mathrm{rot}\mathbf{v} + i\omega\varepsilon_0\mathbf{u} = \vec{J} & \text{loi d'Ampère-Maxwell} \end{cases} \tag{154}$$

On peut éliminer le champ magmétique pour obtenir l'équation suivante :

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u} - k^2\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{155}$$

$$\text{avec } k = \frac{\omega}{c_0} \text{ et } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

On voit tout de suite que l'on se heurte aux mêmes difficultés que dans le cas du problème scalaire puisque le spectre de l'opérateur rot rot est $\mathbb{R}^+$. Nous utiliserons donc la même démarche que dans le cas scalaire en construisant une solution à l'aide du principe d'absorption limite.

4.2 Calcul explicite de la solution dans le cas où k^2 n'appartient pas à $\mathbb{R}^+$

4.2.1 Détermination de u à l'aide de la transformée de Fourier

On se place dans $S'(\mathbb{R}^3)^3$. On souhaite déterminer explicitement la solution de

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u} - z\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \quad \text{dans } S'(\mathbb{R}^3)^3 \tag{156}$$

Tout comme dans le problème scalaire, nous utilisons la transformée de Fourier $\mathcal{F}$. En utilisant le fait que rot $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$ et $\hat{\nabla} = i\xi$, on obtient :

$$-\xi \times (\xi \times \hat{\mathbf{u}}) - z\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}$$

$$|\xi|^2\hat{\mathbf{u}} - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \xi)\xi - z\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}$$

En prenant le produit scalaire de (157) avec ξ, on a

$$-z\hat{\mathbf{u}} \cdot \xi = \hat{\mathbf{f}} \cdot \xi \tag{157}$$

En fait on montre plus précisément que l'équation (157) est équivalente à

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\xi|^2 - z}(\hat{\mathbf{f}} - \frac{1}{z}(\hat{\mathbf{f}} \cdot \xi)\xi) \tag{158}$$

On a donc montré l'existence et l'unicité de $\mathbf{u}$ dans $S'(\mathbb{R}^3)^3$ (Si $\mathbf{f} = 0$, on déduit de (158) que $\mathbf{u} = 0$).

Lemme 7 *Le problème*

$$\begin{cases} \textit{chercher } \mathbf{u} \in S'(\mathbb{R}^3)^3 \\ \\ \textit{rot rot } \mathbf{u} - z\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{159}$$

admet une solution unique.

Remarque 12 *Si* $\mathbf{f}$ *appartient à* $L^2(\mathbb{R}^3)^3$*, alors* $\mathbf{u}$*, rot* $\mathbf{u}$*, et rot rot* $\mathbf{u}$ *appartiennent également à* $L^2(\mathbb{R}^3)^3$*.*

En effet, si $\mathbf{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ alors $\hat{\mathbf{f}}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Donc

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{u}}| &\leq \frac{1}{||\xi|^2 - z|}(|\hat{\mathbf{f}}| + \frac{|\xi|^2}{|z|})|\hat{\mathbf{f}}| \\ &\leq C|\hat{\mathbf{f}}| \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{\mathbf{u}}$ et donc $\mathbf{u}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$.

De plus,

$$|\widehat{\mathrm{rot}\mathbf{u}}| = |\xi \times \mathbf{u}| = \frac{|\xi \times \hat{\mathbf{f}}|}{||\xi|^2 - z|} \leq C|\hat{\mathbf{f}}| \tag{160}$$

Donc rot $\mathbf{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. De même, rot rot $\mathbf{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$.

Par contre, dans le cas général, $\hat{\mathbf{u}} \cdot \xi$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^3)$ car $\hat{\mathbf{f}} \cdot \xi$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, div $\mathbf{u}$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^3)$.

4.2.2 Représentation de la solution à l'aide de noyau de Green

On rappelle que

$$\frac{1}{|\xi|^2 - z} = \hat{G}(z,\xi)$$

avec $G(z,x) = \dfrac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|}$ $(\mathrm{Im}(\sqrt{z} > 0))$

G noyau de Green

Définissons U composante par composante par $\hat{U} = \hat{G}\hat{\mathbf{f}}$. La i-ème composante de U s'écrit :

$$U_i(x) = G * \mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^3} G(z,x-y)\ \mathbf{f}_i(y)\ dy \tag{161}$$

En travaillant toujours composante par composante, on a :

$$\begin{cases} -(\triangle U - zU) = \mathbf{f} \\ U \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 \end{cases} \tag{162}$$

On peut exprimer $\hat{\mathbf{u}}$ en fonction de $\hat{U}$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \hat{U} - \frac{1}{z}((\frac{\hat{\mathbf{f}}}{|\xi|^2 - z}) \cdot \xi)\xi \\ &= \hat{U} - \frac{1}{z}(\hat{U} \cdot \xi)\xi \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbf{u} = U + \frac{1}{z}\text{grad div}U \tag{163}$$

Remarque 13 *: on retrouve bien* $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ *:*

$$U \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 \Rightarrow \textit{grad div}\, U\ \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\ \Rightarrow \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$$

Notion de tenseur de Green

soit $\mathbb{G} = (G_1,G_1,G_3)$ le tenseur de Green défini par

$$\text{rot rot } G_i - zG_i = \delta e_i$$

On peut vérifier que

$$\hat{G}_i = \hat{G}e_i - \frac{1}{z}(\hat{G}e_i \cdot \xi)\xi$$

Donc

$$G_i = G + \frac{1}{z}\text{grad div } G$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbb{G}}\hat{\mathbf{f}} \\ &\mathbf{u} = \mathbb{G} * \mathbf{f}\ \ \text{(au sens des distributions)} \end{aligned}$$

4.3 Principe d'absorption limite : construction d'une solution pour $z = k^2 \in \mathbb{R}^+$

Soit $z^\varepsilon = k^2 + i\varepsilon$. Notons $\mathbf{u}^\varepsilon$ la solution de l'équation :

$$\text{rot rot}\mathbf{u}^\varepsilon - (k^2 + i\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{f} \tag{164}$$

Soit $G^\varepsilon(x) = \frac{e^{i\sqrt{z^\varepsilon}|x|}}{4\pi|x|}$ ($\text{Im}(\sqrt{z^\varepsilon} > 0)$. G^ε tend vers G ($G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$) dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ quand ε tend vers 0.

On pose par ailleurs $U^\varepsilon = G^\varepsilon * \mathbf{f}$. On rappelle que si $\mathbf{f}$ est à support compact, U^ε tend vers $U = G * F$ dans $H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ quand ε tend vers 0.

On suppose désormais dans toute la suite que $\mathbf{f}$ est à support compact. On obtient alors les résultats de convergence suivant :

$$\text{grad div } (U^\varepsilon) \to \text{grad div } (U) \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3 \tag{165}$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon \to \mathbf{u} = U + \frac{1}{k^2} \text{ grad div}(U) \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3 \tag{166}$$

$$\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = \text{rot } U^\varepsilon \to \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } U \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3 \tag{167}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{u}^\varepsilon \to \text{rot rot } \mathbf{u} \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3 \tag{168}$$

Ainsi, $\mathbf{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ et rot $\mathbf{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$: $\mathbf{u}$ appartient donc à $H_{loc}(rot,\mathbb{R}^3)$.

De plus, d'après (168), on peut passer à la limite au sens $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ dans l'équation (164). On obtient alors

$$\text{rot rot } \mathbf{u} - k^2\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{169}$$

4.4 Comportement asymptotique : condition de Silver Muller

On souhaite étudier le comportement de $\mathbf{u} = U + \frac{1}{k^2}$ grad div (U) loin de la source.

$$U(x) = \int_{B_R} \underbrace{G(x-y)}_{G_y(x)} \mathbf{f}(y) dy$$

Soit $\theta = \frac{x}{|x|}$, la direction du vecteur x. Pour $|y| < R$ et $|x| > R$, on connait le comportement de $G(x-y)$:

$$G(x-y) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-i\theta\cdot y} + \underbrace{O(\frac{1}{|x|^2})}_{\text{uniforme en } \theta \text{ } et \text{ } en \text{ } y} \tag{170}$$

Rappelons maintenant l'expression de l'opérateur ∇ en coordonnées sphériques :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\theta + \frac{1}{r}\nabla_\theta \tag{171}$$

$$\text{avec } \nabla_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \tag{172}$$

Soit $\mathbf{a}$, un vecteur de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(G_y(x)\mathbf{a}) &= \nabla \times (G_y(x)\mathbf{a}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{ikr}}{4\pi r})\; e^{-i\theta\cdot y}\; \theta \times \mathbf{a} \;+\; \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2}\nabla_\theta(e^{-i\theta\cdot y}\mathbf{a}) \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \\
&= (ik\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2})\; e^{-i\theta\cdot y}\; \theta \times \mathbf{a} \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \\
&= ik\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\; e^{-i\theta\cdot y}\; \theta \times \mathbf{a} \;+\; O(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{u}) = \mathrm{rot}(U) = ik\,\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\;\int e^{-i\theta\cdot y}\;\theta \times \mathbf{f}(y)\;dy \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \tag{173}$$

En procédant de la même manière, on peut déterminer le comportement asymptotique de rot rot $\mathbf{u}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}(G_y(x)\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial r}(\frac{e^{ikr}}{4\pi r})\; e^{-i\theta\cdot y}\; \theta \times (\theta \times \mathbf{a}) \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \\
&= -k^2\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\; e^{-i\theta\cdot y}\; \theta \times (\theta \times \mathbf{a}) \;+\; O(\frac{1}{r^2})
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u} &= \int \mathrm{rot}_x\ (\mathrm{rot}_x(G_y(x)\mathbf{f}(y)))\;dy \\
&= = -k^2\,\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\;\int e^{-i\theta\cdot y}\;\theta \times (\theta \times \mathbf{f}(y))\;dy \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \qquad (174)
\end{aligned}$$

En remarquant qu'en dehors du support de $\mathbf{f}$ rot rot $\mathbf{u} = k^2\mathbf{u}$, on obtient le comportement de $\mathbf{u}$ à l'infini :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x) &= -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \int e^{-i\theta\cdot y}\, \theta \times (\theta \times \mathbf{f}(y))\, dy \;+\; O(\frac{1}{r^2}) \qquad (175)\\
&= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\, \mathbf{u}_\infty(\theta) \;+\; O(\frac{1}{r^2})\\
&\quad \text{avec } \mathbf{u}_\infty(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\theta\cdot y}\, \theta \times (\theta \times \mathbf{f}(y))\, dy \qquad (176)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression nous amène à définir la condition de Silver Muller sous formes forte puis faible :

Lemme 8 *: forme forte de la condition de Silver Muller*
$\mathbf{u}$ *vérifie la condition d'onde sortante suivante :*

$$\theta \times rot\, \mathbf{u} + ik\, \mathbf{u} \;=\; O(\frac{1}{r^2}) \tag{177}$$

Cette condition est appelée condition de Silver Muller

Lemme 9 *: forme faible de la condition de Silver Muller*
$\mathbf{u}$ *vérifie*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} |rot\, \mathbf{u} \times \theta - ik\, \mathbf{u}|\, d\sigma(\theta) \;=\; O(\frac{1}{r^2}) \tag{178}$$

Remarque 14 *: on peut aussi écrire cette condition sous la forme* $rot\, \mathbf{u} \times \boldsymbol{x} \,-\, ikr\, \mathbf{u} \,=\, O(\frac{1}{r^2})$

4.5 Résultat d'unicité pour les équations de Maxwell en régime harmonique

Théorème 16 *Soit* $\mathbf{f} \in L^2_c(\mathbb{R}^3)$*. Le problème*

$$\begin{cases}
\textit{Chercher } \mathbf{u} \in H_{loc}(rot, \mathbb{R}^3)\\
rot\; rot\, \mathbf{u} - k^2\mathbf{u} = \mathbf{f}\\
\mathbf{u} \textit{ vérifie la condition de Silver Muller}
\end{cases} \tag{179}$$

admet une solution unique donnée par

$$\mathbf{u} \;=\; U \;+\; \frac{1}{z}\; grad\; div\, U \quad avec\;\; U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)\, \mathbf{f}(y)\, dy$$

Démonstration : il nous reste simplement à montrer l'unicité. Pour cela nous allons appliquer le théorème de Rellich pour chaque composante de $\mathbf{u}$.

Supposons donc que

$$\text{rot rot } \mathbf{u} - k^2\mathbf{u} = 0 \tag{180}$$

Rappelons tout d'abord que pour tout vecteur $\mathbf{a}$ de $\mathbf{R}^3$, div rot $\mathbf{a} = 0$. On en déduit immédiatement que div $\mathbf{u} = 0$. De plus, on a la formule

$$\vec{\triangle}\mathbf{u} = -\text{rot rot } \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} \tag{181}$$

On obtient alors les équations vérifiées par chaque composante de $\mathbf{u}$

$$\triangle\mathbf{u}_i + k^2\mathbf{u}_i = 0 \tag{182}$$

Par ailleurs, multiplions l'équation (180) par $\bar{\mathbf{u}}$ et utilisons la formule de Stockes du rotationel :

$$\int_{B_R} \text{rot}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{B_R} \mathbf{u} \cdot \text{rot}\mathbf{v} - \int_{S_R} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \tag{183}$$

On a alors

$$\int_{B_R} |\text{rot}\mathbf{u}|^2 dx - k^2 \int_{B_R} |\mathbf{u}|^2 dx - \int_{S_R} (\text{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\sigma = 0$$

Donc

$$\text{Im} \int_{S_R} (\text{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\sigma = 0$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |\text{rot}\mathbf{u} \times \theta - ik \, \mathbf{u}| \, d\sigma &= \int_{S_R} (|\text{rot}\mathbf{u} \times \theta|^2 + k^2|\mathbf{u}|^2) \, d\sigma - 2k\text{Im} \int_{S_R} (\text{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\sigma \\ &= \int_{S_R} |\text{rot}\mathbf{u} \times \theta|^2 + k^2|\mathbf{u}|^2 \, d\sigma \end{aligned}$$

Or $\mathbf{u}$ vérifie la condition de Silver Muller donc $\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} |\text{rot}\mathbf{u} \times \theta - ik\mathbf{u}| \, d\sigma = 0$. Donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} |\mathbf{u}|^2 d\sigma = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} |\mathbf{u}_i|^2 d\sigma = 0$$

On en déduit alors que $\mathbf{u} = 0$ en appliquant composante par composante le lemme de Rellich aux équations (182).

5 Résolution des équations de Maxwell harmoniques en milieu localement hétèrogène : le cas coercif

5.1 Présentation du problème et réduction à un domaine borné.

Nous supposons maintenant que la permittivité électrique du milieu est variable et constant à l'extérieur d'un domaine borné :

$$\forall\ |x| \leq a, \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_0. \tag{184}$$

alors que la perméabilité magnétique est partout égale à sa valeur dans le vide μ_0. La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques donnée par

$$c(x)^2\ \varepsilon(x)\ \mu_0 = 1 \tag{185}$$

vérifie donc

$$\forall\ |x| \leq a, \quad c(x) = c_\infty, \quad c_\infty = \big(\varepsilon_0 \mu_0\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{186}$$

et nous supposons par ailleurs que la fonction $c(x)$ vérifie :

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^3, \quad O < c_- \leq c(x) \leq c_\infty < +\infty. \tag{187}$$

Etant donné un terme source $\mathbf{f}$ à support compact dans B_a, nous nous intéressons à la résolution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in H_{loc}(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \text{ tel que} \\ \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}) - \dfrac{\omega^2}{c^2}\, \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \end{array} \right. \tag{188}$$

où on impose en outre une condition d'onde sortante, à savoir la condition de Silver-Müller associé au milieu homogène à l'infini :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} |\ \text{rot}\mathbf{u} \times n + i\ \frac{\omega}{c_\infty}\ \mathbf{u}\ |^2\ d\sigma = 0. \tag{189}$$

Pour se ramener, comme dans le cas de l'équation de Helmholtz scalaire, à un problème posé en domaine borné, nous allons écrire une équation de Lipman-Schinger vectorielle. A partir de (188), nous écrivons :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\, \mathbf{u} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2} \right)\ \mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{190}$$

ce qui joint à la condition (189) équivaut à :

$$\mathbf{u} = \omega^2\ \mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{u}\big) + c_\infty^2 \nabla(\text{div}\ \big[\mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{u}\big)\big]) + \mathbf{u}_\infty \tag{191}$$

où nous avons posé

$$q = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \quad \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{192}$$

et où l'on rappelle que $\mathcal{R}(\omega) \in \mathcal{L}(L^2(B_a)^3; H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3)$ est défini par :

$$[\mathcal{R}(\omega)\mathbf{v}](x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} \, \mathbf{v}(y)\, dy. \tag{193}$$

et où la fonction $\mathbf{u}_\infty \in H_{loc}(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3)$, donnée par,

$$\mathbf{u}_\infty = \mathcal{R}(\omega)\, \mathbf{f} + \frac{c_\infty^2}{\omega^2} \nabla \left(\mathrm{div} \left[\mathcal{R}(\omega)\, \mathbf{f}\right]\right) \tag{194}$$

est aussi caractérisée par (c'est la solution en milieu homogène) :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \mathbf{u}_\infty) - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2}\, \mathbf{u}_\infty = \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3, \\ \\ \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} |\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}_\infty \times n + i\ \frac{\omega}{c_\infty}\ \mathbf{u}_\infty\ |^2\, d\sigma = 0. \end{array}\right. \tag{195}$$

L'équation suggère d'introduire l'opérateur $\mathcal{T}(\omega) \in \mathcal{L}\big(L^2(B_a)^3\big)$:

$$\mathcal{T}(\omega)\mathbf{v} = \chi_a\ \left[\ \omega^2\, \mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{v}\big) + c_\infty^2 \nabla \left(\mathrm{div}\left[\mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{v}\big)\right]\right)\ \right] \tag{196}$$

où χ_a est par définition l'opérateur de restriction à la boule de rayon a. On peut de façon équivalente, caractériser $\mathcal{T}(\omega)\mathbf{v}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{T}(\omega)\mathbf{v} = \mathbf{V}|_{B_a}, \text{ où } \mathbf{V} \in H_{loc}(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3) \text{ est l'unique solution sortante de :} \\ \\ \qquad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \mathbf{V}) - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2}\ \mathbf{V} = \omega^2 q\mathbf{v} \end{array}\right. \tag{197}$$

où, dans le second membre de (197) on a bien entendu identifié $q\mathbf{v}$ à son extension par 0 en dehors de B_a.

Remarque 15 *D'après ce que nous avons vu sur les équations de Mawxell en milieu homogène, il n'y a bien sûr aucun problème à étendre les définition (**??**) et (196) des opérateurs $\mathcal{R}(\omega)$ et $\mathcal{T}(\omega)$ aux fréquences complexes ω vérifiant :*

$$\mathcal{I}m\ \omega > 0.$$

Dans ce cas, la caractérisation (197) de $\mathcal{T}(\omega)$ devient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{T}(\omega)\mathbf{v} = \mathbf{V}|_{B_a}, \ \textit{où } \mathbf{V} \in H(rot;\mathbb{R}^3) \ \textit{est l'unique solution de}: \\ \\ \qquad rot(rot\,\mathbf{V}) - \dfrac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V} = \omega^2 q\mathbf{v} \end{array}\right. \tag{198}$$

Il est alors facile de voir que la restriction $\mathbf{u}^*$ de $\mathbf{u}$ à B_a est nécessairement solution du problème :

$$\text{Trouver } \ \mathbf{u}^* \in L^2(B_a)^3 \ \text{ tel que}: \quad \mathbf{u}^* - \mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_\infty. \tag{199}$$

On a, comme dans le cas scalaire "équivalence" entre l'équation de Lipman-Schwinger (199) et le problème (188, 189) au sens du résultat suivant (la preuve, essentiellement un jeu d'écriture, est laissée aux soins du lecteur) :

Lemme 10 *Si $\mathbf{u} \in H_{loc}(rot;\mathbb{R}^3)$ est solution de (188, 189), alors $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}|_{B_a}$ est solution de l'équation de Lipman-Schinger vectorielle(199).*

Réciproquement si $\mathbf{u}^* \in L^2(B_a)^3$ est solution de (199) alors

$$\mathbf{u} = \Big[\ \omega^2\ \mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{u}^*\big) + \nabla\ \Big(\ div\big[\mathcal{R}(\omega)\big(q\mathbf{u}^*\big)\big]\Big)\ \Big]$$

est solution de (188, 189).

D'un point de vue abstrait, le problème est similaire à l'equation de Lipman-Schwinger que nous avons rencontrée dans le cas de l'équation de Helmholtz scalaire. Toutefois, une difficulté supplémentaire apparaît : on ne peut utiliser directement l'alternative de Fredholm. Ceci est dû au résultat suivant.

Lemme 11 *L'opérateur $\mathcal{T}(\omega)$ défini par (196) ou (197) n'est pas compact dans $L^2(B_a)^3$.*

Soit Ω un ouvert inclus dans B_a tel que

$$|q(x)| \geq q_- > 0, \quad p.p.\ x \in \Omega$$

Soit $\mathbf{H}$, le sous espace de $L^2(B_a)^3$ défini par

$$\mathbf{H} = \{\ \mathbf{v} = \frac{1}{q}\ \nabla\varphi,\ \ \varphi \in H_0^1(\Omega)\ \}$$

où, de façon tacite, la fonction $\mathbf{v}$ est prolongée par 0 en dehors de Ω. On remarque alors que la restriction de $\mathcal{T}(\omega)$ à $\mathbf{H}$ est presque l'identité. Plus précisément :

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \quad \mathcal{T}(\omega)\mathbf{v} = -c_\infty^2\ q\mathbf{v}. \tag{200}$$

En effet, si $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ avec φ dans $H^1_0(\Omega)$ ($\mathbf{V}$ est prolongé par 0 à l'extérieur de Ω) et

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{c_\infty^2 q}\,\nabla\varphi = -\frac{\mathbf{V}}{c_\infty^2 q},$$

On calcule aisément que

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V} = -\frac{\omega^2}{c_\infty^2}\nabla\varphi = \omega^2 q\mathbf{v}$$

De plus, $\mathbf{V}$ étant à support compact vérifie automatiquement la condition de Sommerfeld à l'infini. Ceci démontre (200) compte denu de la caractérisation (197).

L'espace $\mathbf{H}$ est isomorphe à l'espace $H^1_0(\Omega)$ et donc de dimension infinie. De plus :

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_q = \int_\Omega q^2\;\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\;dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}$ et, sur cet espace, la norme $\|\cdot\|_q$ est équivalente à la norme $L^2(B_a)^3$. On peut construire une suite $\mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ telle que

$$(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_m)_q = \delta_{nm}.$$

Cette suite est bien entendu bornée dans $L^2(B_a)^3$ et, par construction, la suite des images par $\mathcal{T}(\omega)$ est de norme constante et orthogonale

$$\Big(\mathcal{T}(\omega)\mathbf{v}_n,\,\mathcal{T}(\omega)\mathbf{v}_m\Big)_{L^2(B_a)} = c_\infty^4\;(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_m)_q = c_\infty^4\;\delta_{nm}$$

La suite $\mathcal{T}(\omega)\mathbf{v}_n$ ne contient donc aucune sous-suite convergente ce qui démontre que $\mathcal{T}(\omega)$ n'est pas compact. □

5.2 Le cas des fréquences complexes.

Nous allons nous intéresser au cas ou la fréquence ω est complexe, et plus précisément vérifie :

$$\mathcal{I}m\;\omega > 0 \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 \notin \mathbb{R}^+. \tag{201}$$

On peut alors chercher la solution décroissante à l'infini, plus précisément dans $H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$. Nous considérons donc le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) \text{ tel que} \\[2ex] \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) - \dfrac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3. \end{cases} \tag{202}$$

Lemme 12 *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{I}m\;\omega > 0$, le problème (202) admet une solution unique.*

Démonstration : Elle est très classique. Le problème (202) équivaut à (c'est la formulation variationnelle)

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) \text{ tel que : } \quad \forall \mathbf{v} \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3), \quad a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{v}) = L(v),$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} \forall\, (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)^2, & a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{v}) = \displaystyle\int \left(\mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\overline{\mathbf{v}} - \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{u}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right)\,dx, \\ \forall\, \mathbf{v} \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3), & L(\mathbf{v}) = \displaystyle\int \mathbf{f}\cdot\overline{\mathbf{v}}\,dx. \end{cases}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram. Le seul point non complètement trivial est la vérification de la coercivité de la forme bilinéaire $a(\omega;\cdot,\cdot)$, c'est à dire l' existence d'une constante $\nu > 0$ telle que :

$$\forall\, \mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3), \quad |a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{u})| \geq \nu\, \|\mathbf{u}\|^2_{H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)}.$$

Posons $\omega^2 = \alpha + i\beta$. Il vient

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\; a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{u}) = \displaystyle\int \left(|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|^2 - \frac{\alpha}{c^2}\,|\mathbf{u}|^2\right)\,dx, \\ \mathcal{I}m\; a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{u}) = -\beta \displaystyle\int \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\,dx, \end{cases}$$

Nous allons ensuite utiliser l'inégalité (remarquer tout d'abord que $|z| \geq |\mathcal{R}e\; z|$ et $|z| \geq |\mathcal{I}m\; z|$ et additionner)

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \forall\, 0 < \delta \leq 1, \quad |z| \;\geq\; \frac{\delta}{2}\,\mathcal{R}e\; z + \frac{1}{2}\,|\mathcal{I}m\; z|$$

Par conséquent

$$|a(\omega;\mathbf{u},\mathbf{u})| \geq \frac{\delta}{2}\int |\mathrm{rot}\mathbf{u}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{|\beta| - \alpha\delta}{c^2}\,|\mathbf{u}|^2\,dx.$$

Nous distinguons alors deux cas :

(i) $\alpha < 0$. Il suffit de choisir $\delta = 1$ pour obtenir la coercivité.

(ii) $\alpha \geq 0$ et $|\beta| > 0$. En remarquant que $|\beta| - \alpha\delta$ tend vers $|\beta|$ lorsque δ tend vers 0, on obtient la coercivité en choisissant δ assez petit.

□

Grâce à ce résultat, nous en déduisons une propriété importante de l'opérateur $\mathcal{T}(\omega)$ défini par (196) lorsque ω vérifie (201).

Théorème 17 *Soit ω un nombre complexe vérifiant (201), alors l'opérateur $I - \mathcal{T}(\omega)$ défini par (196) est un isomorphisme de $L^2(B_a)^3$ dans lui même.*

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'injectivité de $I - \mathcal{T}(\omega)$. Soit $\mathbf{v} \in L^2(B_a)^3$ tel que :

$$\mathbf{v} = \mathcal{T}(\omega)\mathbf{v}$$

Par définition de $T(\omega)$, $\mathbf{v}$ est la restriction à B_a de la fonction $\mathbf{V} \in H(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3)$ unique solution de

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V}.$$

Comme $\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$ coïncident dur B_a, on en déduit que $\mathbf{V}$ est solution de

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V} = \omega^2\, q\mathbf{V} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{V} = 0,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 12, $\mathbf{V} = 0$ et donc $\mathbf{v} = 0$.

Démontrons la surjectivité de $I - \mathcal{T}(\omega)$. Etant donné $g \in L^2(\Omega)$, Prouvons l'existence de $\mathbf{v} \in L^2(B_a)^3$ tel que

$$\Big(I - \mathcal{T}(\omega)\Big)\,\mathbf{v} = g.$$

Par le lemme 12, nous pouvons introduire $\mathbf{V} \in H(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3)$, unique solution de

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{V} = \omega^2\; q\; g$$

ce que nous pouvons réécrire

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V} = \omega^2 q\,(\mathbf{V} + g)\,.$$

Par définition même de l'opérateur $\mathcal{T}(\omega)$, si nous posons :

$$\mathbf{v} = \chi_a\mathbf{V} + g$$

il vient

$$\mathbf{v} - g = \chi_a\mathbf{V} = \mathcal{T}(\omega)\mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow [\ I - \mathcal{T}(\omega)\ ]\,\mathbf{v} = g$$

ce que nous voulions démontrer. □

5.3 Résolution de l'équation de Lipman-Schwinger vectorielle

On revient au cas $\omega > 0$. Pour contourner le défaut de compacité de l'opérateur $\mathcal{T}(\omega)$, l'astuce consiste à introduire une fréquence complexe ω_* satisfaisant (201) (par exemple $\omega_* = i$). On peut alors réécrire (199) sous la forme :

$$\mathbf{u}^* - \mathcal{T}(\omega_*)\,\mathbf{u}^* + \mathcal{T}(\omega_*)\,\mathbf{u}^* - \mathcal{T}(\omega)\,\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_\infty.$$

Comme d'après le théorème 17, $I - \mathcal{T}(\omega_*)$ est un isomorphisme, on voit que (199) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \ \mathbf{u}^* \in L^2(B_a)^3 \ \text{ tel que :} \\ \\ \Big[\, I - \big(I - \mathcal{T}(\omega_*)\big)^{-1} \, \big(\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)\big) \Big] \, \mathbf{u}^* = \big(I - \mathcal{T}(\omega_*)\big)^{-1} \, \mathbf{u}_\infty. \end{array}\right. \tag{203}$$

Le point clé réside dans le résultat suivant :

Théorème 18 *Pout tout ω_* vérifiant $\mathcal{I}m\ \omega_* > 0$, l'opérateur $\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)$ est compact dans $L^2(B_a)^3$.*

Démonstration. Nous allons montrer que $\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)$ est linéaire continu de $L^2(B_a)^3$ dans $H^2(B_a)$. Etant donné $\mathbf{v} \in L^2(B_a)^3$, soit $\mathbf{V} \in H_{loc}(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$, l'unique solution sortante de

$$\text{rot}(\text{rot}\ \mathbf{V}) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V} = \omega^2\, q\mathbf{v}$$

D'après les proprietés des équations de Maxwell en milieu homogène, nous savons que pour tout $R > 0$, il existe une constante $C(R) > 0$, dépendant également de ω, c_∞ et $q^+ = \sup|q(x)|$ telle que :

$$\|\mathbf{V}^*\|_{H(\text{rot};B_R)} \leq C(R)\ \|\mathbf{v}\|_{L^2(B_a)^3} \tag{204}$$

De même, soit $\mathbf{V}^* \in H_{loc}(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$, l'unique solution de

$$\text{rot}(\text{rot}\ \mathbf{V}^*) - \frac{\omega_*^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{V}^* = \omega_*^2\, q\mathbf{v}$$

Il existe une constante C^*, dépendant de ω^*, c_∞ et $q^+ = \sup|q(x)|$ telle que :

$$\|\mathbf{V}^*\|_{H(\text{rot};\mathbb{R}^3)} \leq C^*\ \|\mathbf{v}\|_{L^2(B_a)^3} \tag{205}$$

Soit $\mathbf{D} = \mathbf{V} - \mathbf{V}^* \in H_{loc}(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$. En regroupant (204) et (205), nous obtenons

$$\|\mathbf{D}^*\|_{H(\text{rot};B_R)} \leq \widehat{C}(R)\ \|\mathbf{v}\|_{L^2(B_a)^3} \tag{206}$$

où la constante $\widehat{C}(R)$ dépend aussi de ω, c_∞ et $q^+ = \sup|q(x)|$. Par ailleurs, on calcule que $\operatorname{div}\mathbf{V} = \operatorname{div}\mathbf{V}^* = c_\infty^2 \operatorname{div} q\mathbf{v}$, ce qui entraîne $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$. Nous nous appuyons alors sur le

Lemme 13 *Soit $\mathbf{\Phi} \in H_{loc}(rot,\mathbb{R}^3)$ tel que $div\mathbf{\Phi} = 0$, alors $\mathbf{\Phi} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ et pour tous $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, il existe une constante $C = C(r_1,r_2)$ telle que, si $D_{r_1,r_2} = B_{r_2} \setminus \overline{B_{r_2}}$,*

$$\|\nabla\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(B_{r_1})} \leq 2\ \|rot\ \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(B_{r_2})} + C\ \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(D_{r_1,r_2})} \tag{207}$$

Si nous appliquons ce lemme à $\mathbf{D}$ nous en désuisons que $\mathbf{D} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ et par ailleurs, choisissant par exemple $r_1 = a$ et $r_2 = 2a$, il existe une constante $C(a) > 0$ telle que :

$$\|\nabla\mathbf{D}\|^2_{L^2(B_a)} \leq 2\ \|\mathrm{rot}\ \mathbf{D}\|^2_{L^2(B_{2a})} + C(a)\ \|\mathbf{D}\|^2_{L^2(D_{a,2a})}.$$

en combinant cette estimation avec (206) avec $R = 2a$, on obtient

$$\|\mathbf{D}\|_{H^1(B_a)^3} \leq \widetilde{C}(a)\ \|\mathbf{v}\|_{L^2(B_a)^3} \tag{208}$$

où, à nouveau, la constante $\widetilde{C}(a)$ dépend aussi de ω, c_∞ et $q^+ = \sup|q(x)|$.

Comme $\big(\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)\big) = \mathbf{D}|_{B_a}$, ceci demontre que

$$\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega) \in \mathcal{L}\big(L^2(B_a)^3, H^1(B_a)^3\big) \tag{209}$$

ce qui suffit à établir la compacité de $\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)$.

On a en fait en résultat un peu meilleur, à savoir

$$\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega) \in \mathcal{L}\big(L^2(B_a)^3, H^2(B_a)^3\big) \tag{210}$$

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que $\mathbf{D}$ vérifie :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \mathbf{D}) = \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\ \mathbf{V} - \frac{\omega_*^2}{c_\infty^2}\ \mathbf{V}^* + (\omega^2 - \omega_*^2)\ q\mathbf{v}.$$

Mais $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ entraine $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \mathbf{D}) = -\Delta\mathbf{D}$ et par conséquent :

$$-\Delta\mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\ \mathbf{V} - \frac{\omega_*^2}{c_\infty^2}\ \mathbf{V}^* + (\omega^2 - \omega_*^2)\ q\mathbf{v} \quad \in L^2_{loc}$$

On conclut grâce à un résultat de régularité elliptique intérieure. On peut par exemple procéder comme dans le cas de l'équation de Helmholtz scalaire. Les détails sont ici laissés au lecteur. $\square$

Démonstration du lemme 13 .

Nous commencons par remarquer que l'on a (remarquer que l'inclusion $\subset$ est évidente)

$$H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) \cap H(\mathrm{div};\mathbb{R}^3) = H^1(\mathbb{R}^3)^3 \tag{211}$$

et que

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3, \quad \|\nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathrm{rot}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}, \tag{212}$$

où par convention (ou par notation)

$$\|\nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{i=1}^{3} \|\nabla \mathbf{v}_i\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}.$$

La démonstration la plus simple de ce résultat consiste à utiliser la transformation de Fourier $\mathbf{v}(x) \to \widehat{\mathbf{v}}(\xi)$. L'identité de Pythagore

$$|\xi|^2\, |\widehat{\mathbf{v}}(\xi)|^2 = |\xi \times \widehat{\mathbf{v}}(\xi)|^2 + |\xi \cdot \widehat{\mathbf{v}}(\xi)|^2$$

montre que si le terme de droite est intégrable (en ξ) sur $\mathbb{R}^3$, le terme de gauche l'est également. Ceci démontre l'inclusion $H^1(\mathbb{R}^3)^3 \subset H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) \cap H(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)$ alors que l'identité (212) résulte du théorème de Plancherel.

Soit $\mathbf{\Phi} \in H_{loc}(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$ tel que div $\mathbf{\Phi} = 0$. Etant donnés $r_2 > r_1 > 0$, considérons $\theta(r) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \theta(r) \leq 1, \quad \theta(r) = 0 \text{ si } r > r_2 \quad \text{et} \quad \theta(r) = 1 \text{ si } r < r_1$$

Introduisons la fonction de troncature

$$\chi(x) = \theta\big(|x|\big) \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{213}$$

Les identités (au sens des distributions)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{div}(\chi\, \mathbf{\Phi}) = \chi \,\mathrm{div}\, \mathbf{\Phi} + \nabla\chi \cdot \mathbf{\Phi} = \nabla\chi \cdot \mathbf{\Phi}, \\ \\ \mathrm{rot}(\chi\, \mathbf{\Phi}) = \chi \,\mathrm{rot}\, \mathbf{\Phi} + \nabla\chi \times \mathbf{\Phi} \end{array} \right.$$

montrent que $\chi\, \mathbf{\Phi}$ appartient à $H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) \cap H(\div;\mathbb{R}^3)$ et donc à $H^1(\mathbb{R}^3)^3$. De plus, en appliquant (212) à $\chi\, \mathbf{\Phi}$, il vient :

$$\left| \begin{array}{rcl} \|\nabla(\chi\, \mathbf{\Phi})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} & = & \|\mathrm{rot}\chi\, \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + \|\mathrm{div}\chi\, \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \\ \\ & \leq & 2\, \|\chi \,\mathrm{rot}\, \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + 2\, \|\nabla\chi \times \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + \|\nabla\chi \cdot \mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \end{array} \right.$$

Grâce aux propriétés de la fonction χ nous avons :

$$\left| \begin{array}{lcl} \|\nabla\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(B_{r_1})} & \leq & \|\nabla(\chi\,\mathbf{\Phi})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \\ \|\chi\,\mathrm{rot}\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} & \leq & \|\mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(B_{r_2})} \\ \\ \|\nabla\chi\cdot\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} & \leq & \|\theta'\|^2_{L^\infty}\,\|\mathbf{\Phi}\|^2_{L^2(D_{r_1,r_2})}. \end{array} \right.$$

Ceci permet d'obternir l'estimation (207) avec

$$C = 2\,\|\theta'\|^2_{L^\infty}.$$

et achève la preuve. □

Résoudre (203) revient à inverser dans $L^2(B_a)^3$ l'opérateur

$$I - T, \quad T = \Big[\, I - \big(I - \mathcal{T}(\omega_*)\big)^{-1}\,\big(\mathcal{T}(\omega_*) - \mathcal{T}(\omega)\big)\Big]$$

L'opérateur T est compact en tant que produit d'un opérateur borné par un opérateur compact (cf. théorèmes 17 et 18). L'équation relève donc de l'alternative de Fredholm. Pour établir l'existence et l'unicité de la solution, il suffit de démontrer l'unicité, c'est à dire, en vertu du résultat d'équivalence (10) montrer l'unicité de la solution de (188, 189). Pour ce faire, nous ferons une hypothèse supplémentaire sur la fonction $\varepsilon(x)$, qui est en fait une hypothèse de régularité par morceaux :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Il existe des ouverts bornés et disjoints } \{\Omega_j, 1 \leq j \leq N\} \text{ tels que} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Omega_j} \subset B_a, \quad \mathcal{O} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \text{ est connexe.} \\ \\ \forall\, 1 \leq \ell \leq N, \quad \overline{\mathcal{O}_\ell} = \quad \overline{\mathcal{O}} \cap \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{\Omega_j} \text{ est connexe.} \\ \\ \forall\, 1 \leq j \leq N, \quad \exists\, \varepsilon_j \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3) \;/\; 0 < \varepsilon_j^- < \varepsilon < \varepsilon_j^+ \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_j \text{ dans } \Omega_j. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{214}$$

Le lecteur remarquera que $\Omega_N = \mathbb{R}^3$.

Théorème 19 *Sous l'hypothèse (214), le problème (188, 189) admet une solution et une seule.*

Démonstration. Soit $\mathbf{u}$ solution de (188, 189) avec $\mathbf{f} = 0$. Il s'agit de montrer que $\mathbf{u}$=0.

Étape 1 : multiplions (188) scalairement (dans $\mathbb{R}^3$) par $\overline{\mathbf{u}}$ et intégrons le résultat sur B_R vec $R > a$. Après application de la formule de Green, nous obtenons :

$$\int_{B_R} \Big(|\text{rot}\mathbf{u}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}|\mathbf{u}|^2\Big)dx + \int_{S_R} \big(\text{rot } \mathbf{u} \times n\big) \cdot \overline{\mathbf{u}}\, d\sigma = 0 \tag{215}$$

Grâce à la condition de Silver-Müller, nous pouvons écrire

$$\text{rot } \mathbf{u} \times n = i\frac{\omega}{c_\infty}\, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \text{avec} \quad \lim_{R\to} \|\mathbf{w}\|_{L^2(S_R)^3} = 0$$

En prenant la partie imaginaire de (215) nous obtenons

$$\frac{\omega}{c_\infty} \int_{S_R} |\mathbf{u}|^2\, d\sigma = \mathcal{I}m \int_{S_R} \mathbf{w} \cdot \overline{\mathbf{u}}\, d\sigma$$

à partir de quoi, on montre aisément que

$$\lim_{R\to} \|\mathbf{w}\|_{L^2(S_R)^3} = 0. \tag{216}$$

Étape 2 : nous montrons que $\mathbf{u}$ s'annule dans l'ouvert extérieur $\mathcal{O}$. En effet dans $\mathcal{O}$, $c = c_\infty$ et donc div$\mathbf{u} = 0$ (prendre la divergence de (188)). Par suite, nous savons que $\mathbf{u}$ appartient à $H^2_{loc}(\mathcal{O})^3$ (voir le lemme - la démonstration s'adapte aisément si om remplace $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{O}$) et que :

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\mathbf{u} = 0$$

Comme $\mathcal{O}$ est connexe par hypothèse, nous pouvons appliquer le théorème de Rellich qui entraîne, compte tenu de (216), que $\mathbf{u}$ s'annule dans $\mathcal{O}$.

Étape 3 : nous montrons, par récurrence sur ℓ, que $\mathbf{u}$ s'annule dans l'ouvert extérieur $\mathcal{O}_\ell$, $\ell = 1,2,\cdots,N$.

Admettons que $\mathbf{u}$ est nul dans $\mathcal{O}_{\ell-1}$. Il est facile de vérifier que, dans $\mathcal{O}_\ell$, $\mathbf{u}$ est solution de

$$\text{rot}\big(\text{rot}\mathbf{u}\big) - \mu_0\, \varepsilon_\ell\, \omega^2\mathbf{u} = 0.$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\ell)$, nous avons :

$$\left|\begin{array}{rcl} \big\langle \text{rot}\big(\text{rot}\mathbf{u}\big) - \mu_0\, \varepsilon_\ell\, \omega^2\mathbf{u},\varphi\big\rangle & = & \langle \text{rot}\mathbf{u},\text{rot}\varphi\rangle - \mu_0\, \omega^2 \big\langle \varepsilon_\ell\, \omega^2\mathbf{u},\, \varphi\big\rangle \\ & = & \displaystyle\int_{\mathcal{O}_\ell} \text{rot}\mathbf{u} \cdot \text{rot}\varphi\, dx - \mu_0\, \omega^2 \int_{\mathcal{O}_\ell} \varepsilon_\ell\, \omega^2\mathbf{u},\, \varphi \\ & = & \displaystyle\int_{\mathcal{O}_\ell} \text{rot}\mathbf{u} \cdot \text{rot}\varphi\, dx - \mu_0\, \omega^2 \int_{\mathcal{O}_\ell} \varepsilon\, \omega^2\mathbf{u},\, \varphi \\ & = & \langle \text{rot}\mathbf{u},\text{rot}\varphi\rangle - \mu_0\, \omega^2 \big\langle \varepsilon\, \omega^2\mathbf{u},\, \varphi\big\rangle = 0. \end{array}\right.$$

Nous en déduisons que :

$$\operatorname{div}\big(\varepsilon_\ell \mathbf{u}\big) = 0$$

ce qui, compte tenu des propiétés de ε_ℓ, entraîne que div$\mathbf{u}$ appartient à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = -\frac{\nabla \varepsilon_\ell}{\varepsilon_\ell} \cdot \mathbf{u}$$

Par conséquent

$$-\Delta \mathbf{u} - \nabla\Big(\frac{\nabla \varepsilon_\ell}{\varepsilon_\ell} \cdot \mathbf{u}\big) - \mu_0\, \varepsilon_\ell\, \omega^2 \mathbf{u}$$

ce qui peut se réécrire, compte tenu de la régularité de ε_ℓ

$$-\Delta \mathbf{u}_j - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\varepsilon_\ell} \frac{\partial^2 \varepsilon_\ell}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{\varepsilon_\ell^2} \frac{\partial \varepsilon_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial \varepsilon_\ell}{\partial x_j} \right) \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon_\ell} \frac{\partial \varepsilon_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} - \mu_0\, \varepsilon_\ell\, \omega^2 \mathbf{u}_j = 0, \quad j = 1{,}2{,}3.$$

Il existe donc une constante $K_{ell} > 0$ telle que

$$|\Delta \mathbf{u}| \leq K_{ell} \Big(|\mathbf{u}| + |\nabla \mathbf{u}| \Big), \quad \text{p. p. dans } \mathcal{O}_\ell.$$

Il suffit alors d'utiliser la version vectorielle du théorème de prolongement unique pour conclure. □

5.4 Diffraction d'une onde plane électromagnétique par une hétérogénéité locale

Considérons d'abord le milieu homogène de vitesse c_∞. Une onde plane électromagnétique est une solution particulière des équations de Maxwell homogènes :

$$\operatorname{rot}\big(\operatorname{rot}\mathbf{u}\big) + \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\, \mathbf{u} = 0, \tag{217}$$

de la forme :

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{d}\, e^{ik.x}, \tag{218}$$

où k est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ appelé vecteur d'onde et où $\mathbf{d}$ est un vecteur de $\mathbb{C}^3$ appelé vecteur polarisation. Il est immédiat de vérifier que pour que (218) soit solution de (217) il faut et il suffit que k et $\mathbf{d}$ satisfassent la relation

$$k \times (\mathbf{d} \times k) = \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\, \mathbf{d}$$

ce qui équivaut à

$$|k|^2 = \frac{\omega^2}{c_\infty^2} \quad \text{et} \quad k \cdot \mathbf{d} = 0, \tag{219}$$

où on rapelle ici que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathbf{u}_j\ \mathbf{v}_j\ dx$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{C}^3$.

Autrement dit k doit appartenir à la sphère centrée à l'origine de rayon ω/c_∞ et $\mathbf{d}$ doit être orthogonal dans $\mathbb{C}^3$ à k. Autrement dit, une onde plane est entièrement déterminée par la donnée d'un couple $(\phi,\mathbf{d}) \in S^2 \times \mathbb{C}^3$ avec $\mathbf{d}\cdot\phi = 0$. Nous noterons l'onde de direction $\phi \in S^2$ et de polarisation $\mathbf{d} \in \Pi(\phi) = \Big\{\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3,\mathbf{d}\cdot\phi = 0\Big\}$:

$$\mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d};x) = \mathbf{d}\ e^{i\frac{\omega}{c_\infty}\ \phi\cdot x}. \tag{220}$$

Si maintenant on introduit une perturbation locale du milieu de propagation comme au chapitre précédent (variation locale de la permittivité électrique $\varepsilon(x)$), on remplace dans (217) la vitesse uniforme c_∞ par une distribution de vitesse $c(x)$ constante à l'infini. Comme dans le cas scalaire, il est naturel de se demander ce que "devient" l'onde plane (220). Pour cela, on cherche une solution des équations de Maxwell en milieu hétérogène :

$$\mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}\mathbf{u}\big) - \frac{\omega^2}{c^2}\ \mathbf{u} = 0, \tag{221}$$

sous la forme

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\phi,\mathbf{d}) = \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d}) + \mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}), \tag{222}$$

où :

$$\begin{cases} \bullet\ \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d};x) = e^{ik.x} \text{ est l'onde plane incidente,} \\ \\ \bullet\ \mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};x) \text{ est l'onde diffractée.} \end{cases}$$

Il est facile, en injectant (222) dans (221), de voir que $\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})$ est solution de l'équation avec second membre :

$$\mathrm{rot}\big(\ \mathrm{rot}\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})\big) - \frac{\omega^2}{c^2}\ \mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}) = (\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - \frac{\omega^2}{c^2})\ \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d}). \tag{223}$$

En outre, on va demander que l'onde diffractée satisfasse la condition de Silver-Müller sortante

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} |\ \mathrm{rot}\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}) \times n + i\ \frac{\omega}{c_\infty}\ \mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})\ |^2\ d\sigma = 0. \tag{224}$$

Le lecteur remarquera aisément que le problème (226,224) relève de l'application du théorème (19) si bien que pour chaque $\phi \in S^2$ et $\mathbf{d} \in \Pi(\phi)$, on est assuré de l'existence et l'unicité de

$$\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}) \in H_{loc}(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3). \tag{225}$$

Nous allons conclure ce paragraphe par la notion d'amplitude de diffusion vectorielle. Pour cela, nous allons étudier le comportement asymptotique à l'infini du champ diffracté $\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})$. Pour cela, il suffit de remarquer que $\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})$ est aussi solution de :

$$\mathrm{rot}\big(\ \mathrm{rot}\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})\big) - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\,\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}) = (\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - \frac{\omega^2}{c^2})\,\mathbf{u}(\phi,\mathbf{d}). \tag{226}$$

pour en déduire que

$$\mathbf{u}_D(\phi; r\Theta) = \frac{\mathbf{u}_\infty^D(\Theta;\phi,\mathbf{d})}{r}\,e^{i\frac{\omega}{c_\infty}r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big). \tag{227}$$

avec

$$\Big|\ \mathbf{u}_\infty^D(\Theta;\phi,\mathbf{d}) \ = \ \frac{1}{4\pi}\int e^{-i\frac{\omega}{c_\infty}\Theta.y}\,(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\big(\Theta\times\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\big)\times\Theta\,dy \tag{228}$$

Comme le vecteur $\Theta\times\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\big)\times\Theta$ appartient à $\Pi(\Theta)$ pour tout y, après avoir remarqué que la dépendance $\mathbf{d}\to\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d})$ (et donc $\mathbf{d}\to\mathbf{u}_\infty^D(\Theta;\phi,\mathbf{d})$) est linéaire, on déduit l'existence d'un opérateur linéaire :

$$\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\in\mathcal{L}\big(\Pi(\phi),\Pi(\theta)\big) \tag{229}$$

tel que

$$\forall\ \phi\in S^2,\quad \forall\ \mathbf{d}\in\Pi(\phi),\quad \mathbf{u}_\infty^D(\Theta;\phi,\mathbf{d}) = \mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d} \tag{230}$$

c'est à dire tel que

$$\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}; r\Theta) = \frac{\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d}}{r}\,e^{i\frac{\omega}{c_\infty}r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big). \tag{231}$$

Cet opérateur est défini par :

$$\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d} = \frac{1}{4\pi}\int e^{-i\frac{\omega}{c_\infty}\Theta.y}\,(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ \big(\Theta\times\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\big)\times\Theta\,dy \tag{232}$$

Remarquons que si on prend le produit scalaire de cette identié avec un vecteur appartenant à $\Pi(\Theta)$, il vient, pour tout couple $(\mathbf{d},\mathbf{d}')\in\Pi(\phi)\times\Pi(\Theta)$,

$$\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{d}' = \frac{1}{4\pi}\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ \mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}';y)\cdot\big(\Theta\times\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\big)\times\Theta\,dy$$

Comme $\big(\Theta\times\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\big)\times\Theta$ n'est autre que la projection orthogonale sur $\Pi(\Theta)$ de $\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)$ et comme $\mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}';y)$ appartient à $\Pi(\Theta)$, ceci se réécrit

$$\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{d}' = \frac{1}{4\pi}\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2})(y)\ \mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}';y)\cdot\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d};y)\,dy \tag{233}$$

Théorème 20 *Les opérateurs $\mathbf{A}_\infty(\Theta,\phi)$ vérifie :*

$$\forall\ (\Theta,\phi)\in S^2\times S^2 \quad \mathbf{A}_\infty(\Theta,\phi) = \mathbf{A}_\infty(-\phi,-\theta)^*. \tag{234}$$

où $\mathbf{A}_\infty(-\phi,-\theta)^*$ désigne l'adjoint de $\mathbf{A}_\infty(-\phi,-\Theta)$, les plans $\Pi(\Theta)$ et $\Pi(\Theta)$ étant munis de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{C}^3$.

Démonstration : Le résultat est une conséquence du lemme suivant (dont la démonstration, très semblable à celle du lemme 6 est laissée au soin du lecteur).

Lemme 14 *Soit $f_i \in L^2_c(\mathbb{R}^3)^3$, $i = 1{,}2$ à support inclus dans B_a. Soit $\mathbf{u}_i$ l'unique solution du problème de Maxwell*

$$rot\big(rot\,\mathbf{u}_i\big) - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, \quad dans\ \mathbb{R}^3, \tag{235}$$

satisfaisant la condition de Silver-Müller (189). Alors, on a l'identité :

$$\int \mathbf{f}_1(x)\cdot\mathbf{u}_2(x)\,dx = \int \mathbf{f}_2(x)\ \cdot\mathbf{u}_1(x)\,dx\ . \tag{236}$$

Appliquons ensuite le lemme avec :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = (\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d}_\phi), & \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}_\phi), \\ \mathbf{f}_2 = (\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta), & \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_D(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta), \end{cases}$$

pour obtenir l´egalité

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d}_\phi)\cdot\mathbf{u}_D(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta)\,dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta)\cdot\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}_\phi)\,dx.$$

Comme, par définition de l'onde diffractée,

$$\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}_\phi) = \mathbf{u}(\phi,\mathbf{d}_\phi) - \mathbf{u}_I(\phi,\mathbf{d}_\phi)\ \text{et}\ \mathbf{u}_D(-\Theta),\mathbf{d}_\Theta = \mathbf{u}(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta) - \mathbf{u}_I(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta),$$

ceci peut se réécrire

$$\int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}(\phi,\mathbf{d}_\phi)\cdot\mathbf{u}_D(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta)\,dx = \int (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2_\infty})\ \mathbf{u}(-\Theta,\mathbf{d}_\Theta)\cdot\mathbf{u}_D(\phi,\mathbf{d}_\phi)\,dx,$$

soit encore, compte tenu de (233),

$$\mathbf{A}_\infty(\Theta;\phi)\ \mathbf{d}_\phi\cdot\mathbf{d}_\Theta = \mathbf{A}_\infty(-\phi;-\Theta)\ \mathbf{d}_\Theta\cdot\mathbf{d}_\phi.$$

c'est à dire (234), puisque ceci est vrai pour tout $(\mathbf{d}_\phi,\mathbf{d}_\Theta) \in \Pi(\phi)\times\Pi(\Theta)$. $\square$

A Alternative de Fredholm

A.1 Quelques rappels préliminaires

Nous rappelons tout d'abord quelques notions relatives à la théorie des opérateursd linéaires bornés dans les espaces de Hilbert. Soit X un espace ed Hilbert associé à un produit scalaire $(\cdot;\cdot)$ (on note $\|\cdot\|$ la norme associée). A tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$, on associe son adjoint défini par:

Définition 2 *L'adjoint A^* de $A \in \mathcal{L}(X)$ est l'opérateur borné défini par:*

$$\forall\,(u,v) \in X \times X, \quad (Au,v) = (u,A^*v), \tag{1}$$

ce qui, grâce au théorème de Riesz, définit un opérateur de même norme que A.

De facon évidente on a:

$$\forall\,A \in \mathcal{L}(X), \quad A^{**} = A. \tag{2}$$

On a par ailleurs le résultat bien connu:

Théorème 21 *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$, on a*

$$\begin{cases} \big(KerA^*\big)^\perp = \overline{ImA}, & \big(ImA^*\big)^\perp = KerA, \\[2ex] \big(KerA\big)^\perp = \overline{ImA^*}, & \big(ImA\big)^\perp = KerA^*. \end{cases} \tag{3}$$

Démonstration : La suite d'équivalences

$$\left| \begin{array}{lll} Au = 0 & \Longleftrightarrow & (Au,v) = 0, \quad \forall v \in X \\[3ex] & \Longleftrightarrow & (u,A^*v) = 0, \quad \forall v \in X \\[3ex] & \Longleftrightarrow & u \in \big(ImA^*\big)^\perp \end{array} \right.$$

montre que $KerA = \big(ImA^*\big)^\perp$. On obtient $\big(KerA\big)^\perp = \overline{ImA^*}$ en passant aux orthogonaux. Les deux autres égalités s'obtiennent en remplaçant A par A^*. □

Définition 3 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit compact si l'image par T de la boule unité de X est relativement compacte dans X. De façon équivalente, T est compact si, u_n désignant une suite bornée dans X, on peut extraire une sous-suite de la suite Tu_n qui soit fortement convergente dans X.*

Théorème 22 *Un opérateur T est compact si et seulement si*

$$u_n \to u \text{ (faiblement)} \quad \Longrightarrow \quad Tu_n \to Tu \text{ (fortement)} \tag{4}$$

Démonstration : Comme toute suite bornée d'un espace de Hilbert contient une sous-suite faiblement convergeante, il est clair que la propriété (4) entraine la compacité de T.

Réciproquement, soit u_n satisfaisant (4) avec $u = 0$ (ce à quoi on peut se ramener sans perte de généralité, quitte à raisonner sur $u_n - u$). Comme T est borné, il est clair que la suite Tu_n converge faiblement vers 0. Si la suite Tu_n ne convergeait pas fortement vers 0, on pourrait trouver une suite d'indices $n_k \to +\infty$ telle que

$$\|Tu_{n_k}\| \geq \delta > 0. \tag{5}$$

Mais par ailleurs, la suite u_{n_k} étant bornée et l'opérateur T compact, la suite Tu_{n_k} contient une sous-suite fortement convergente dant la limite, qui ne peut que coïncider avec la limite faible de la suite Tu_n, est nécessairement 0, ce qui contredit (5). $\square$

Théorème 23 *L'adjoint d'un opérateur compact est lui-même compact.*

Démonstration : Supposons que u_n converge faiblement vers u dans X, de façon évidente T^*u_n converge vers T^*u. Pour montrer la convergence forte, il suffit de montrer qu'on peut extraire de u_n une sous-suite (toujours notée u_n pour simplifier) telle que $\|T^*u_n\|$ converge vers $\|T^*u\|$. Or

$$\|T^*u_n\|^2 = (u_n, TT^*u_n). \tag{6}$$

La suite u_n étant bornée dans X, il en est de même pour T^*u_n. Par conséquent, par compacité de T, on peut extraire de la suite u_n une sous suite convergeant vers u telle TT^*u_n converge fortement vers TT^*u. Par passage à la limite dans (6), il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^*u_n\|^2 = (u,TT^*u) = \|T^*u\|^2,$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

A.2 L'alternative de Fredholm

En dimension finie, il est bien connu que, pour qu'un opérateur linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même soit inversible,il suffit qu'il soit injectif ou surjectif. Il est également bien connu qu'en dimension infinie cette propriété est fausse en général. Il existe néanmoins une classe d'opérateurs pour lesquels cette propriété redevient vraie, à savoir les opérateurs qui sont des perturbaytions compactes de l'identité. Cette propriété est connue sous le nom d'alternative de Fredholm.

Théorème 24 *Soit X un espace de Banach et T un opérateur compact de X dans lui-même alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$I - T$ est un isomorphisme,*
(ii) *$I - T$ est surjectif,*
(iii) *$I - T$ est injectif.*

Remarque 16 *Dans l'énoncé ci-dessus on paut bien évidemment remplacer $I - T$ par $A - T$ où A est un isomorphisme de X (écrire $A - T = A\,(I - A^{-1}T)$).*

Nous allons donner une preuve de ce théorème dans le cas où X est un espace de Hilbert, ce qui est suffisant pour le propos de ce cours et permet de raccourcir quelque peu les démonstrations. Nous commençons par un lemme :

Lemme 15 *Si T est compact dans X alors $Im(I - T)$ est fermée et donc $Im(I - T) = Ker(I - T^*)^\perp$, où T^* désigne l'adjoint de T.*

Démonstration : Soit $v \in= \overline{Im(I - T)}$, il existe une suite u_n dans X telle que

$$v = \lim_{n \to +\infty} (u_n - Tu_n).$$

Si nous savions que la suite u_n était bornée, ce serait terminé. Or nous remarquons que l'on peut remplacer u_n par $u_n - w_n$ où w_n désigne n'importe quel élément de $Ker(I - T)$. L'idée est donc de choisir w_n telle que la suite $u_n - w_n$ reste bornée. Le meilleur choix est bien sûr tel que

$$\|u_n - w_n\| = \inf_{w \in Ker(I-T)} \|u_n - w\|$$

c'est à dire $w_n = Pu_n$ où P désigne la projection orthogonale sur $Ker(I - T)$. Il s'agit donc de montrer que la suite $u_n - Pu_n$ reste bornée. Si tel n'était pas le cas on pourrait extraire de u_n une sous suite u_{n_k} telle que :

$$\|u_{n_k} - Pu_{n_k}\| \to +\infty.$$

Posons alors :

$$w_k = \frac{u_{n_k} - Pu_{n_k}}{\|u_{n_k} - Pu_{n_k}\|}.$$

Nous avons :

$$\|w_k\| = 1, \qquad \lim_{k \to +\infty} (w_k - Tw_k) = 0.$$

Par compacité de T, on peut extraire une sous suite, toujours notée w_k pour simplifier, telle que Tw_k converge fortement dans X. En écrivant

$$w_k = Tw_k + \big(w_k - Tw_k\big)$$

on voit que la suite w_k converge elle-même fortement et que sa limite w vérifie

$$\|w\| = 1 \quad \text{et} \quad w - Tw = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w \in Ker(I-T).$$

Mais, par construction même, $w_k \in Ker(I-T)^\perp$ qui est un sous-espace fermé de X. Par passage à la limite $w \in Ker(I-T)^\perp$ ce qui, joint à $w \in Ker(I-T)$, entraine $w = 0$, ce qui est impossible puisque $\|w\| = 1$.

La suite $u_n - Pu_n = \tilde{u}_n$ est donc bien bornée et $v = \lim_{n\to+\infty} (\tilde{u}_n - T\tilde{u}_n)$.

En utilisant la compacité de T et en raisonnant exactement comme avec la suite w_k, on peut extraire de $\tilde{u}_n$ une sous suite toujours notée $\tilde{u}_n$ pour simplifier, telle que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightharpoonup u & \text{dans } X \quad \text{fort,} \\ \\ T\tilde{u}_n \to Tu & \text{dans } X \quad \text{fort.} \end{cases}$$

bien entendu par passage à la limite $v = u - Tu$ ce qui prouve que $\overline{Im(I-T)} \subset Im(I-T)$ et donc que $Im(I-T)$ est fermée. L'égalité $Im(I-T) = Ker(I-T^*)^\perp$ se déduit alors du théorème 21. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 24.

Etape 1 $(I-T)$ injectif $\Longrightarrow$ $(I-T)$ surjectif

> Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $X_1 = Im(I-T) \neq X$. Alors, comme X_1 est fermé d'après le lemme 15, X_1 est un espace de Hilbert et la restriction de T à X_1, notée T_1, est un nouvel opérateur compact dans X_1 qui vérifie à nouveau la propriété $Im(I-T_1) \neq X_1$. En effet, soit $v \in X$, $v \neq 0$, tel que $v \notin X_1$ (ceci est possible puisque $X_1 \neq X$), on a $v - Tv \in X_1 = Im(I-T)$. Si $I - T_1$ était surjectif, on pourrait trouver v_1 dans X_1 tel que $v_1 - Tv_1 = v - Tv$. $I - T$ étant par hypothèse injectif ceci entrainerait $v = v_1$ ce qui est impossible puisque $v \notin X_1$. Par conséquent en réitérant le raisonnement précédent $X_2 = Im(I - T_1)$ est un espace de Hilbert strictement inclus dans X_1 et la restriction de T (ou T_1) à X_2, soit T_2, est un opérateur compact dans X_2 vérifiant $Im(I-T_2) \neq X_2$. De proche en proche on construit ainsi une famille X_n d'espaces de Hilbert et une suite d'opérateurs compacts dans X_n, soit T_n, vérifiant :
>
> $$\begin{cases} X_{n+1} = Im(I-T_n) \subset X_n \text{ strictement} \\ \\ T_{n+1} = T_n|_{X_{n+1}} = T|_{X_{n+1}} \end{cases}$$

Comme $X_{n+1} \subset X_n$ strictement et que X_n est fermé, on peut trouver un vecteur unitaire dans X_n, soit u_n, qui est orthogonal à X_{n+1}. En effet, soit $v_n \in X_n \setminus X_{n+1}$, si P_{n+1} désigne la projection orthogonale sur X_{n+1} (qui existe bien puisque X_{n+1} est fermé), alors $P_{n+1}\, v_n \neq v_n$ et le vecteur

$$u_n = \frac{v_n - P_{n+1}\, v_n}{\|v_n - P_{n+1}\, v_n\|},$$

convient. On construit ainsi une suite de vecteurs u_n qui est orthonormée car si $m > n$, le fait que $u_m \in X_m$ entraine $u_m \in X_{n+1}$ ($X_m \subset X_{n+1}$) et donc $(u_m, u_n) = 0$. Pour arriver à une contradiction, nous allons montrer que la suite Tu_m ne peut avoir de sous suite convergente, ce qui contredit le fait que T est compact.

Soit alors $m \neq n$, par exemple $m > n$, nous avons :

$$Tu_m - Tu_n = (I - T)u_n - (I - T)u_m + u_m - u_n$$

Or $(I - T)u_n \in X_{n+1}$ et $(I - T)u_m \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$. Par ailleurs $u_m \in X_m \subset X_{n+1}$ et donc le vecteur $(I - T)u_n - (I - T)u_m + u_m$ est dans X_{n+1} et donc orthogonal à u_n. Il s'ensuit que :

$$\|Tu_m - Tu_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_m\|^2 \geq 1$$

ce qui montre que Tu_n ne peut avoir de sous suite convergente, ce que l'on voulait démontrer.

Etape 2 $(I - T)$ surjectif $\Longrightarrow (I - T)$ injectif.

Si $Im(I - T) = X$, d'après le théorème 21, $Ker(I - T^*) = 0$. Or si T est compact, T^* l'est également (théorème 23) et d'après la première partie de la démonstration $Im(I - T^*) = X$. En utilisant à nouveau le théorème 21, $Ker(I - T) = 0$ ce qui signifie que $(I - T)$ est injectif.

B Théorème de prolongement unique

Cette annexe est consacré à la démonstration du théorême de prolongement unique qui permet de montrer que si une fonction assez régulière (en l'occurence H^2_{loc}) satisfait dans un ouvert connexe $\mathcal{O}$ une inégalité du type:

$$|\Delta u| \leq \ C\ (|u| + |grad\ u|)$$

(ce qui en particulier est le cas si u est solution d'une équation du type $\Delta u + b.grad\ u + a\ u = 0$ avec a et b bornés) et s'annule au voisinage d'un point $x_\circ$ de cet ouvert $\mathcal{O}$, alors u s'annule identiquement dans $\mathcal{O}$. L'idée de la preuve est fondée sur le résultat suivant: si u satisfait l'inégalité précédente et s'annule sur une boule de centre $x_\circ$ et de rayon $\epsilon < 1/2$, alors u s'annule dans une boule de rayon un peu plus grand (voir la démonstration du lemme 3); puis, il suffit d'utiliser un argument de connexité et de relier n'importe quel point x de $\mathcal{O}$ à $x_\circ$ par une suite finie de boules ouvertes B_j telle que B_j et B_{j+1} ont une intersection non vide (c'est ce dernier argument qui est développé dans la rédaction du théorème 1). Rappelons qu'une des conséquences des théorèmes de prolongement unique est l'unicité pour les problèmes de Cauchy pour les opérateurs elliptiques (ce qui généralise le théorème de Holmgren dans le cas des coefficients constants et le théorème de Cauchy-Kowalevska dans le cas des coefficients analytiques).

La partie la plus technique de la démonstration est l'obtention des estimations *a priori* qui servent à établir le résultat préliminaire (lemme 3). Ces estimations de u et $grad\ u$ dans des normes L^2 à poids (le poids dépendant d'un paramètre β autorisé à varier dans un intervalle du type $[\beta_\circ, +\infty[$) en fonction de Δu sont l'objet des lemmes 4 et 5. Les constantes intervenant dans ces inégalités tendent vers 0 lorsque β tend vers l'infini et obligent de ce fait la fonction à s'annuler au voisinage de $x_\circ$. Pour simplifier la rédaction, on choisit $x_\circ = 0$.

Lemme 1 *: Soit $u \in H^2_{loc}(I\!R^N)(N \geq 2)$ satisfaisant:*

$$supp\ u \subset \ \bar{D}_{\epsilon,r_\circ} = \{x \in I\!R^N; \epsilon \leq |x| \leq r_\circ\}$$

avec $0 < \epsilon < r_\circ \leq 1$. Alors il existe une constante $\beta_\circ > 0$ et il existe $C_\circ$, ne dépendant que de $\beta_\circ$, tels que pour tout $\beta > \beta_\circ$:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}\ \leq\ \frac{C_\circ}{\beta^4}\ \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ |x|^{\beta+2} dx \qquad (7)$$

Démonstration : Posons $\psi_\beta(x) = \exp(\frac{1}{|x|^\beta})$ et $\phi_\beta(x) = \exp(-\frac{1}{|x|^\beta})$, puis introduisons la fonction $w = \psi_\beta\ u$ (soit $u = \phi_\beta\ w$). Notons que:

$$\Delta u = \phi_\beta \Delta w + 2 grad\ \phi_\beta . grad\ w + \Delta \phi_\beta\ w$$

avec $grad\ \phi_\beta = \frac{\beta x}{|x|^{\beta+2}}\ \phi_\beta$ et $\Delta\phi_\beta = \frac{\beta}{|x|^{\beta+2}}(N-2-\beta+\frac{\beta}{|x|^\beta})\ \phi_\beta$. On évalue alors:

$$|\Delta u|^2 = \ {\phi_\beta}^2|\Delta w|^2 + 4|grad\ \phi_\beta.grad\ w|^2 + (\Delta\phi_\beta)^2|w|^2 + 2\phi_\beta\Delta\phi_\beta\mathcal{R}e(\Delta w\ \bar{w})$$

$$+4\phi_\beta\ grad\ \phi_\beta.\mathcal{R}e(\Delta w\ grad\ \bar{w}) + 4\Delta\phi_\beta\ grad\ \phi_\beta.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})$$

En particulier, on a:

$$|\Delta u|^2 \geq 4\frac{\beta{\phi_\beta}^2}{|x|^{\beta+2}}\ x.\mathcal{R}e(\Delta w\ grad\ \bar{w}) + 4\frac{\beta^2{\phi_\beta}^2}{|x|^{2\beta+4}}(N-2-\beta+\frac{\beta}{|x|^\beta})\ x.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})$$

Supposons maintenant, quitte à conclure par densité, que $u \in \mathcal{D}(D_{\epsilon,r_\circ})$; par construction $w \in \mathcal{D}(D_{\epsilon,r_\circ})$. Aprés multiplication par ${\psi_\beta}^2$ et intégration de l'inégalité précédente, nous avons:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2\ {\psi_\beta}^2\ |x|^{\beta+2}dx \geq 4\beta \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(\Delta w\ grad\ \bar{w})\ dx +$$

$$+4\beta^2(N-2-\beta)\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})\ \frac{dx}{|x|^{\beta+2}} + 4\beta^3\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

Nous allons évaluer les trois termes à gauche de l'inégalité. Par la formule de Green, on établit les identités suivantes (voir exercice ci-après):

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(\Delta w\ grad\ \bar{w})\ dx = (\frac{N}{2}-1)\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ w|^2\ dx$$

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})\ \frac{dx}{|x|^\gamma} = \frac{\gamma-N}{2}\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |w|^2\ \frac{dx}{|x|^\gamma}$$

On en déduit, compte tenu de $w = \psi_\beta\ u$:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2\ {\psi_\beta}^2\ |x|^{\beta+2}dx \geq 2\beta(N-2)\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad({\psi_\beta}^2\ u)|^2\ dx +$$

$$+2\beta^3(2\beta+2-N)\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ {\psi_\beta}^2\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} - 2\beta^2(N-2-\beta)^2\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ {\psi_\beta}^2\ \frac{dx}{|x|^{\beta+2}}$$

Le premier terme à gauche de l'inégalité est positif dés que $N > 2$ et nul lorsque $N = 2$. De plus, comme $supp\ u \subset\ \bar{D}_{\epsilon,r_\circ}$, il vient:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ {\psi_\beta}^2\ \frac{dx}{|x|^{\beta+2}} \leq {r_\circ}^\beta\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ {\psi_\beta}^2\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

Par conséquent on obtient:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2\ {\psi_\beta}^2\ |x|^{\beta+2}dx \geq \beta^4F(\beta)\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ {\psi_\beta}^2\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

où nous avons posé:

$$F(\beta) = \frac{4\beta^4 - 2\beta^3(N-2) - 2{r_\circ}^\beta \beta^2 (N-2-\beta)^2}{\beta^4}$$

Remarquons que, pour $r_\circ < 1$, $\lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) = 4$. On établit donc l'inégalité (B.1) pour β assez grand, i.e. pour tout $\beta > \beta_\circ$ avec $F(\beta_\circ) \geq 1/C_\circ$.

$\blacksquare$

Exercice 9 *Démontrer que pour tout* $u \in H^2_{loc}(I\!R^N)$,$(N \geq 2)$ *satisfaisant:*

$$supp\ u \subset \ \bar{D}_{\epsilon, r_\circ} = \{x \in I\!R^N; \epsilon \leq |x| \leq r_\circ\}$$

on a les deux identités :

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(\Delta w\ grad\ \bar{w})\ dx = (\frac{N}{2} - 1) \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ w|^2\ dx$$

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} x.\mathcal{R}e(w\ grad\ \bar{w})\ \frac{dx}{|x|^\gamma} = \frac{\gamma - N}{2} \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |w|^2\ \frac{dx}{|x|^\gamma}$$

Lemme 2 *: Soit* $u \in H^2_{loc}(I\!R^N)(N \geq 2)$ *satisfaisant:*

$$supp\ u \subset \ \bar{D}_{\epsilon, r_\circ} = \{x \in I\!R^N; \epsilon \leq |x| \leq r_\circ\}$$

avec $0 < \epsilon < r_\circ \leq 1$. *Alors il existe* $\beta_\circ > 0$ *et il existe une constante* C_1*, ne dépendant que de* $r_\circ$ *et de* $\beta_\circ$*, tels que, pour tout* $\beta > \beta_\circ$*, l'inégalité (10) est satisfaite et:*

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ dx\ \leq\ \frac{C_1}{\beta^2} \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ |x|^{\beta+2} dx \tag{8}$$

Démonstration : De même qu'au lemme précédent nous démontrons l'inégalité pour $u \in \mathcal{D}(D_{\epsilon,r_\circ})$, puis on conclut par densité. On remarque que l'on a par la formule de Green:

$$-\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} (\Delta u\bar{u} + \Delta\bar{u}u){\psi_\beta}^2 dx = 2\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\, u|^2 {\psi_\beta}^2 dx + \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} (\bar{u} grad\, u + u grad\, \bar{u}).grad({\psi_\beta}^2) dx$$

soit:

$$-\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} (\Delta u\ \bar{u} + \Delta\bar{u}\ u)\ {\psi_\beta}^2\ dx = 2\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2\ {\psi_\beta}^2\ dx + \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} grad(|u|^2).grad({\psi_\beta}^2)\ dx$$

et en utilisant une seconde fois la formule de Green:

$$-\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} (\Delta u\ \bar{u} + \Delta\bar{u}\ u)\ {\psi_\beta}^2\ dx = 2\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2\ {\psi_\beta}^2\ dx - \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2\ \Delta({\psi_\beta}^2)\ dx$$

Par ailleurs, on calcule:

$$\Delta({\psi_\beta}^2) = \frac{4\beta^2}{|x|^{2\beta+2}}(1 - \frac{N+\beta+2}{2\beta}|x|^\beta){\psi_\beta}^2$$

et il existe $\beta_\circ$ (assez grand) et C_1' tels que pour tout $|x| < r_\circ < 1$ et pour tout $\beta > \beta_\circ$:

$$\Delta({\psi_\beta}^2) \leq C_1' \ \frac{\beta^2}{|x|^{2\beta+2}} \ {\psi_\beta}^2$$

(en particulier $\beta_\circ$ est choisi de sorte que $1 - r_\circ^\beta(N+\beta+2)/(2\beta) > 0$). Ainsi on obtient l'inégalité:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ dx \leq \frac{C_1'}{2}\beta^2 \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} + \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} \frac{|\Delta u \ \bar{u} + u \ \Delta\bar{u}|}{2} \ {\psi_\beta}^2 \ dx$$

Enfin, on montre par l'inégalitéde Young que:

$$|\Delta u \ \bar{u} + u \ \Delta\bar{u}| \leq \frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |x|^{2\beta+2}|\Delta u|^2$$

et donc:

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ dx \leq \frac{1}{2}(C_1'\beta^2+1) \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} + \frac{1}{2}\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ |x|^{2\beta+2} \ dx$$

Ainsi, en utilisant l'estimation du lemme 1 et le fait que *supp* $u \subset \ \bar{D}_{\epsilon,r_\circ}$, nous avons pour tout $\beta > \beta_\circ$ (avec $\beta_\circ > N+2$):

$$\int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |grad\ u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ dx \leq \frac{1}{2\beta^4}(r_\circ^\beta\beta^4 + C_\circ C_1'\beta^2 + C_\circ) \int_{D_{\epsilon,r_\circ}} |\Delta u|^2 \ {\psi_\beta}^2 \ |x|^{\beta+2} \ dx$$

L'inégalité (B.2) s'obtient en choisissant C_1 tel que $C_1 > (1/2)(C_\circ C_1' + C_\circ/{\beta_\circ}^2 + C_2')$ où la constante C_2' est déterminée de façon à majorer $\beta^2 \exp(-\beta|\ln\ r_\circ|)$ pour tout $\beta > \beta_\circ$.

■

Lemme 3 *: Soit $B(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r. Soit $\epsilon < r_\circ/2 < 1/2$ et soit u une fonction de $H^2_{loc}(I\!R^N)$ s'annulant dans la boule $B(0,\epsilon)$. On suppose qu'il existe une constante C telle que l'on ait presque partout dans $B(0,r_\circ)$:*

$$|\Delta u| \leq \ C \ (|u| + |grad\ u|) \tag{9}$$

Alors $u \equiv 0$ presque partout dans $B(0,r_\circ/2)$.

Démonstration : Soit φ une fonction *cut-off* satisfaisant $\varphi \in C_\circ^\infty(I\!R^N)$,*supp* $\varphi \subset B(0,r_\circ)$,$\varphi(x) = 1$ dans $B(0,r_\circ/2)$. En appliquant les estimations des lemmes 1 et 2 à la fonction $\varphi\ u$, il existe une constante positive C_2 telle que (pour tout $\beta > \beta_\circ$):

$$\int_{B(0,r_\circ)} (\frac{|\varphi|^2|u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |grad(\varphi u)|^2) \ \exp(\frac{2}{|x|^\beta}) \ dx \ \leq \ \frac{C_2}{\beta^2} \int_{B(0,r_\circ)} |\Delta(\varphi u)|^2 \ \exp(\frac{2}{|x|^\beta}) \ |x|^{\beta+2}dx$$

En particulier:

$$\int_{B(0,r_\circ/2)} (\frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}}+|grad\, u|^2)\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ dx\ \leq\ \frac{C_2}{\beta^2}\int_{B(0,r_\circ/2)} |\Delta u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ |x|^{\beta+2}dx\ +$$

$$+\ \frac{C_2}{\beta^2}\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ |x|^{\beta+2}dx$$

En utilisant l'estimation (B.3), on a:

$$\int_{B(0,r_\circ/2)} (\frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}}+|grad\, u|^2)\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})dx \leq \frac{2C^2C_2}{\beta^2}\int_{B(0,r_\circ/2)} (|u|^2+|grad\, u|^2)\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})|x|^{\beta+2}dx$$

$$+\ \frac{C_2}{\beta^2}\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ |x|^{\beta+2}dx$$

En choisissant β assez grand pour que $2C^2C_2(r_\circ/2)^{\beta+2}/\beta^2 < 1$, il vient notamment:

$$(1-\frac{2C^2C_2}{\beta^2}(\frac{r_\circ}{2})^{3\beta+4})\int_{B(0,r_\circ/2)} |u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}\ \leq$$

$$\leq\ \frac{C_2}{\beta^2}\ r_\circ^{3\beta+4}\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

Or, la fonction $|x| \rightarrow\ \exp(2/|x|^\beta)/|x|^{2\beta+2}$ étant décroissante, on voit facilement que:

$$\int_{B(0,r_\circ/2)} |u|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}\ \geq\ C_3\int_{B(0,r_\circ/2)} |u|^2\ dx$$

$$\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ \exp(\frac{2}{|x|^\beta})\ \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} \leq\ C_3\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ dx$$

où $C_3 = \exp(2^{\beta+1}/r_\circ^\beta)(2/r_\circ)^{2\beta+2}$. On en déduit alors:

$$\int_{B(0,r_\circ/2)} |u|^2\ dx \leq\ \frac{C_2\ r_\circ^{3\beta+4}}{\beta^2-2C^2C_2(\frac{r_\circ}{2})^{3\beta+4}}\int_{D_{r_\circ/2,r_\circ}} |\Delta(\varphi u)|^2\ dx$$

On établit le lemme en faisant tendre β vers $+\infty$, i.e.

$$\int_{B(0,r_\circ/2)} |u|^2\ dx = 0$$

$\blacksquare$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de prolongement unique:

Théorème 1 *: Soit $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $I\!R^N$ et soit u une fonction de $H^2_{loc}(I\!R^N)$ satisfaisant:*

i. $\exists x_\circ \in \mathcal{O},\ \exists \epsilon > 0,\quad |x-x_\circ| < \epsilon \Longrightarrow\ u(x) = 0$

ii. $\exists C > 0$, *pour presque tout* $x \in \mathcal{O}, |\Delta u(x)| \leq \; C \; (|u(x)| + |grad \; u(x)|)$
alors $u(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}$.

Démonstration : Soit x un point de $\mathcal{O}$. Par connexité, on peut toujours trouver $r_\circ < 1$ et une suite de n points $x_\circ, x_1, \ldots, x_n = x$ tels que: pour tout $j \leq n$, $B(x_j, r_\circ) \subset \mathcal{O}$, et, de plus, pour tout $j \leq (n-1)$, $|x_{j+1} - x_j| < r_\circ/2$. Sachant que u s'annule dans un voisinage de $x_\circ$, d'aprés le lemme 3, u s'annule donc dans la boule de centre $x_\circ$ et de rayon $r_\circ/2$ et en particulier dans un voisinage de x_1. Par récurrence, on montre ainsi que, si u s'annule dans un voisinage de x_j, alors u s'annule dans un voisinage de x_{j+1}. L'opération peut être menée jusqu'à x ce qui achève la démonstration.

■

Comme application du théorème 1, nous allons démontrer un théorême d'unicité pour le problème de Cauchy associé à l'équation:

$$\Delta u + b.grad \; u + a \; u = f$$

Théorème 2 *: Soit $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. On suppose qu'il existe $x_\circ$ de $\partial\mathcal{O}$ et $\epsilon > 0$ tel que $\Gamma_\epsilon(x_\circ) = \partial\mathcal{O} \cap B(x_\circ, \epsilon)$ soit suffisamment régulière (au moins Lipschitz-continue). Soit alors $u \in H^2_{loc}(\mathcal{O})$ solution au sens des distributions de*

$$\Delta u + b.grad \; u + a \; u = 0$$

où les coefficients a et b sont mesurables bornés dans $\mathcal{O}$, satisfaisant à:

$$u_{|\Gamma_\epsilon(x_\circ)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_\epsilon(x_\circ)} = 0$$

Alors $u \equiv \; 0$ dans $\mathcal{O}$.

Démonstration : Soit $\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{O} \cup B(x_\circ, \epsilon)$, et soit u_ϵ la fonction définie par: $u_{\epsilon|\mathcal{O}} = u$ et $u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$. Il est facile de vérifier que $u_\epsilon \in H^2_{loc}(\mathcal{O}_\epsilon)$. De plus: $grad \; u_{\epsilon|\mathcal{O}} = grad \; u$ et $grad \; u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$; $\Delta u_{\epsilon|\mathcal{O}} = \Delta u$ et $\Delta u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$. En prolongeant les coefficients par 0, on a même

$$\Delta u_\epsilon + b.grad \; u_\epsilon + a \; u_\epsilon = 0 \quad \text{dans } L^2_{loc}(\mathcal{O}_\epsilon)$$

Le théorême de prolongement unique nous permet alors de conclure que $u_\epsilon \equiv 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon$.

■

C Fonctions de Bessel et harmoniques sphériques. Théorème d'addition

C.1 Préambule

C.2 Polynômes harmoniques et harmoniques sphériques

Nous commençons par quelques notations. Sauf mention explicite du contraire, nous nous intéressons à des fonctions de trois variables (i. e. définies sur tout ou partie de $\mathbb{R}^3$) à valeurs réelles. Dans ce qui suit $x = (x_1, x_2, x_3)$ désigne le point courant de $\mathbb{R}^3$.

Nous désignons par $\mathcal{I} = \mathbb{N}^3$ l'ensemble des multi-indices à trois composantes et désignons par $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ l'élément courant de $\mathcal{I}$. Nous posons par ailleurs :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, x_3^{\alpha_3}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \tag{10}$$

Pout tout entier $n \geq 0$, nous désignons par $\mathbf{P}_n$ l'espace des polynômes (sur $\mathbb{R}$) de trois variables dont le degré est inférieur où égal à n. Autrement dit :

$$\mathbf{P}_n = \Big\{ \, p(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \, x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \forall \, |\alpha| \leq n \, \Big\}. \tag{11}$$

Rappelons que $\mathbf{P}_n$ est de dimension finie donnée par :

$$\mathbf{d}_n = \dim \mathbf{P}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \qquad (\mathbf{d}_0 = 1, \mathbf{d}_1 = 4, \mathbf{d}_2 = 10, \mathbf{d}_3 = 20, \cdots) \tag{12}$$

Nous désignons par $\mathbf{P}$ l'espace (de dimension infinie) des polynômes de 3 variables :

$$\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_n \, . \tag{13}$$

Introduisons également $\mathbb{P}_n$, le sous-espace de $\mathbf{P}_n$ des polynômes homogènes de degré n :

$$\mathbb{P}_n = \Big\{ \, p(x) = \sum_{|\alpha| = n} a_\alpha \, x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \forall \, |\alpha| = n \, \Big\}. \tag{14}$$

De facon évidente, chacune des fonctions de $\mathbb{P}_n$ est homogène de degré n au sens classique des fonctions

$$\forall \, p \in \mathbb{P}_n, \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad p(\lambda x) = \lambda^n \, p(x), \tag{15}$$

et satisfait l'identité d'Euler, valable pour n'importe quelle fonction dérivable (sauf peut-être à l'origine):

$$\forall \, p \in \mathbb{P}_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x \cdot \nabla p(x) = n \, p(x), \tag{16}$$

Remarque 17 *Il est facile de voir qu'un polynôme ne peut être homogène que d'ordre entier et que la propriété (15) caractérise les éléments de l'espace $\mathbb{P}_n$.*

Il est évident que $\mathbb{P}_n$ est isomorphe à l'espace $\widetilde{P}_n$ des polynômes de *deux* variables de degré inférieur à n (penser que dans chaque monome x^α, α_3 est connu dès que α_1 et α_2 le sont). Par conséquent :

$$d_n = \dim \mathbb{P}_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (d_0 = 1,\, d_1 = 3,\, d_2 = 6,\, d_3 = 10, \cdots) \tag{17}$$

Les espaces $\mathbb{P}_n$ sont en somme directe (i. e. $\mathbb{P}_n \cap \mathbb{P}_m = \{ 0 \}$ si $m \neq n$) et par ailleurs

$$\mathbf{P}_n = \mathbb{P}_0 \oplus \mathbb{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{P}_n \,. \tag{18}$$

Nous définissons enfin le sous-espace $\mathbb{H}_n$ de $\mathbb{P}_n$ des polynômes homogènes de degré n qui sont également harmoniques :

$$\mathbb{H}_n = \Big\{ p \in \mathbb{P}_n \;/\; \Delta p = 0 \Big\} \,. \tag{19}$$

Lemme 16 *Le sous-espace* $\mathbb{H}_n$ *est de dimension* $2n+1$.

Démonstration : Pour démontrer ce résultat, nous donnons un rôle particulier à la variable x_3 en disant que pour tout polynome homogène dans $\mathbb{P}_n$, il existe des polynomes homogènes de 2 variables $a_j(x_1,x_2)$, $0 \le j \le n$ tels que le degré de a_j est égal à $n-j$ (c'est à dire $a_j \in \widetilde{P}_{n-j}$) et tels que

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x_1,x_2)\, x_3^j.$$

En écrivant que p est à laplacien nul, nous obtenons (avec des notations évidentes, Δ peut désigner le laplacien bi-dimensionnel, selon le contexte) :

$$\sum_{j=0}^{n} \Delta a_j(x_1,x_2)\, x_3^j + \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\, a_j(x_1,x_2)\, x_3^{j-2} = 0,$$

soit encore, avec la convention $a_{-2} = a_{-1} = 0$

$$\sum_{j=0}^{n} \Delta a_j(x_1,x_2)\, x_3^j + \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2)\, a_{j+2}(x_1,x_2)\, x_3^j.$$

Ceci équivaut aux conditions (remarquer que $(a_n,a_{n-1}) \in \widetilde{P}_0 \times \widetilde{P}_1 \implies \Delta a_n = \Delta a_{n-1} = 0$):

$$a_{j+2} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)}\, \Delta a_j \quad \text{ for } j = 0, \cdots, n-2.$$

Autrement dit, les polynômes a_j sont entièrement déterminés par les polynômes a_0 et a_1 qui sont respectivement homogènes de degrés n et $n-1$. On conclut aisément aprés avoir rappelé que la dimension de l'espace des polynômes homogènes de deux variables et de degré inférieur ou égal à k cas n'est autre que $k+1$.

$\blacksquare$

Bien entendu l'espace des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à n:

$$\mathbf{H}_n = \Big\{ \, p \in \mathbf{P}_n \; / \; \Delta p = 0 \Big\}. \tag{20}$$

est encore caractérisé par:

$$\mathbf{H}_n = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{H}_n. \tag{21}$$

Ceci résulte du fait que que si

$$p = p_0 + p_1 + \cdots + p_n, \quad p_j \in \mathbb{P}_j, \quad j = 0,1, \cdots ,n.$$

alors

$$\Delta p = \Delta p_2 + \Delta p_3 + \cdots + \Delta p_n \quad \text{avec } \Delta p_j \in \mathbb{P}_{j-2}, \quad j = 2,3, \cdots ,n.$$

ce qui entraine que chaque Δp_j est nul, les espaces $\mathbb{P}_j$ étant en somme directe.

La suite $\mathbf{H}_n$ est, comme la suite $\mathbf{P}_n$, croissante au sens de l'inclusion et on peut définir l'espace des polynômes harmoniques

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{H}_n \; = \Big\{ \, p \in \mathbf{P} \; / \; \Delta p = 0 \Big\}. \tag{22}$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux traces des fonctions de $\mathbb{H}_n$ sur la sphère unité $S_2 = \partial \mathbf{B}$ où $\mathbf{B}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Nous introduisons donc l'application trace :

$$\gamma : \quad u \in C^0(\mathbb{R}^3) \mapsto \gamma u = u|_{S_2} \; \in C^0(S_2). \tag{23}$$

Rappelons que cette application se prolonge (de manière unique) en une application linéaire et continue de $H^1(\mathbb{R}^3)$ (ou $H^1(\mathbf{B})$) à valeurs dans $L^2(S_2)$ (et plus précisément de façon surjective dans $H^{\frac{1}{2}}(S_2)$).

Rappelons enfin le théorème d'unicité de Cauchy pour le problème de Dirichlet associé au Laplacien :

Lemme 17 *Soit $u \in H^1(\mathbf{B})$ tel que $\Delta u = 0$ et $\gamma u = 0$, alors $u = 0$.*

Nous introduisons maintenant l'espace image de $\mathbb{H}_n$ (respectivement par γ, c'est à dire l'espace des traces sur la sphère unité des polynômes harmoniques homogènes de degré n (respectivement de degré inférieur ou égal à n)).

$$\mathcal{H}_n = \gamma \mathbb{H}_n = \Big\{ \, \varphi \in C^0(S_2) \; / \; \exists \, p \in \mathbb{H}_n \text{ tel que } \gamma p = \varphi \Big\}, \tag{24}$$

$$\mathcal{V}_n = \gamma \mathbf{H}_n = \Big\{ \, \varphi \in C^0(S_2) \; / \; \exists \, p \in \mathbf{H}_n \text{ tel que } \gamma p = \varphi \Big\}, \tag{25}$$

lesquels sont bien sur reliés par (c'est une conséquence de (21))

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \ . \tag{26}$$

Par définition, $\mathcal{H}_n$ est l'espace des harmoniques sphériques d'ordre n. (i.e. chaque élément de $\mathcal{H}_n$ est une harmonique sphérique d'ordre n).

On peut bien entendu définir l'espace des harmoniques sphériques à partir de la suite croissante $\mathcal{V}_n$

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{V}_n = \gamma \mathbf{H}. \tag{27}$$

Théorème 25 *L'espace $\mathcal{H}_n$ est isomorphe à $\mathbb{H}_n$ et l'intersection de deux espaces $\mathcal{H}_n$ différents est réduite à 0. De plus, on a également:*

$$\mathcal{V}_n = \gamma \mathbf{P}_n = \Big\{ \ \varphi \in C^0(S_2) \ / \ \exists \ p \in \mathbf{P}_n \ \textit{tel que} \ \gamma p = \varphi \Big\}, \tag{28}$$

et par voie de conséquence

$$\mathcal{V} = \gamma \mathbf{P} = \Big\{ \ \varphi \in C^0(S_2) \ / \ \exists \ p \in \mathbf{P} \ \textit{tel que} \ \gamma p = \varphi \Big\}, \tag{29}$$

Démonstration : Le résultat d'isomorphisme résulte directement du fait que l'application $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_n, \mathcal{H}_n)$, surjective par construction de $\mathbb{H}_n$, est également injective. Ceci est une conséquence directe du lemme d'unicité 17.

Le fait que les espaces $\mathcal{H}_n$ soient deux à deux disjoints repose sur le même argument. En effet, soit $m < n$ et $\varphi \in \mathcal{H}_m \cap \mathcal{H}_n$. Il existe alors $(p_m, p_n) \in \mathbb{H}_m \times \mathbb{H}_n$ tel que $\varphi = \gamma p_m = \gamma p_n$. On peut alors appliquer le lemme 17 à $p_m - p_n$ pour conclure que $p_m = p_n$. Ceci n'est possible que si ces deux polynômes sont nuls puisque, en tant que polynomes homogènes de degrés différents, ils sont linéairement indépendants dans $\mathbf{P}$.

L'inclusion $\mathbf{H}_n \subset \mathbf{P_n}$ entraine automatiquement l'inclusion :

$$\mathcal{V}_n \subset \gamma \mathbf{P_n}.$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons $\varphi \in \gamma \mathbf{P_n}$. Il existe donc un polynôme $p \in \mathbf{P}_n$ tel que $\gamma p = \varphi$. Si $n \leq 1$, le polynome est automatiquement harmonique. Si $n \geq 2$, pour construire un polynôme harmonique de même trace et de même degré, il suffit de le chercher de la forme $p - q \ (1 - |x|^2)$ où $q \in P_{n-2}$ est construit de telle sorte que :

$$\Delta \Big\{ q \ (1 - |x|^2) \Big\} = \Delta p.$$

Pour montrer l'existence d'un tel polynôme q, il suffit de montrer que l'application linéaire $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{P})$ définie par :

$$\Psi q = \Delta \Big\{ q \ (1 - |x|^2) \Big\}.$$

est une bijection de P_{n-2} dans lui-même.

Il est évident que Ψ envoie P_{n-2} dans P_{n-2}. Il suffit pour conclure de montrer que Ψ est injective. Or, en appliquant le lemme à $u = q\ (1 - |x|^2)$, on voit que si $q \in \mathrm{Ker}\ \Psi$, $u = 0$ dans $\mathbf{B}$ et par suite $q = 0$, ce qui achève la démonstration.

$\blacksquare$

L'espace $\mathcal{V}$ est bien entendu un sous-espace de $L^2(S_2)$. En fait, chacune des sommes (26) est non seulement une somme directe mais orthogonale dans $L^2(S^2)$.

Théorème 26 *Pour $m \neq n$, les sous-espaces $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ sont orthogonaux dans $L^2(S_2)$.*

Démonstration : Soit $(\varphi_n,\varphi_m) \in \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_m$. Par définition, il existe $(p_n,p_m) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{H}_m$ tels que $\varphi_n = \gamma p_n$ et $\varphi_m = \gamma p_m$. Les polynômes p_n et p_m étant harmoniques, on a en particulier

$$\Delta p_n\, p_m - p_n\, \Delta p_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbf{B}} \big(\Delta p_n\, p_m - p_n\, \Delta p_m\big)\, dx = 0.$$

Après application de la formule de Green, ν désignant la normale unitaire le long de S_2, sortante par rapport à $\mathbf{B}$ et $d\sigma$ la mesure superficielle le long de S_2, il vient:

$$\int_{S^2} \left\{ \frac{\partial p_n}{\partial \nu}\, p_m - p_n \frac{\partial p_m}{\partial \nu} \right\} d\sigma = 0. \tag{30}$$

Or, sur la sphère unité, pour $k = m$ ou n

$$\forall\, x \in S_2, \quad \frac{\partial p_k}{\partial \nu}(x) \equiv x \cdot \nabla p_k(x) = k\ p_k(x),$$

compte tenu de l'identité d'Euler (16). Comme $p_k = \varphi_k$, $(k = m,n)$ sur S_2, l'égalité (30) se réécrit simplement

$$(m - n) \int_{S^2} \varphi_m\, \varphi_n\, dx = 0,$$

ce qui permet de conclure.

$\blacksquare$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un résultat fondamental de densité des harmoniques sphériques. Pour cela, nous allons nous appuyer sur un célèbre théorème d'analyse, connu sous le nom de théorème de Stone-Weierstrass, relatif à la densité de l'espace des polynômes dans l'espace des fonctions continues définies sur un compact. Nous l'utiliserons sous la forme suivante:

Lemme 18 *(Densité des polynômes dans les fonctions continues) Etant donné un compact K de $\mathbb{R}^3$ et u une fonction continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_\varepsilon \in \mathbf{P}$ tel que :*

$$\sup_{x \in K} |u(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon. \tag{31}$$

Remarque 18 *En toute rigueur, le théorème de Stone-Weierstrass est un théorème abstrait dont le lemme 18 est une application. La version mono-dimensionnelle du lemme 18 est également connue sous le nom de théorème de Weierstrass.*

Théorème 27 *L'espace $\mathcal{V}$ est dense dans $C^0(\Gamma)$ et dans $L^2(\Gamma)$.*

Démonstration : Une conséquence du lemme 18 est la densité de $\mathbf{P}$ dans $C^0(\bar{B})$. L'application γ étant continue de $C^0(\bar{B})$ et surjective dans $C^0(\Gamma)$, on en déduit la densité de $\gamma\mathbf{P}$ dans $\gamma C^0(\bar{B}) \equiv C^0(\Gamma)$. On conclut grâce au théorème 25 (voir (29)).

Pour la densité dans $L^2(\Gamma)$, il suffit d'utiliser la densité de $C^0(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$ et la continuité de l'injection canonique $C^0(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in L^2(\Gamma)$, il existe $\varphi_\varepsilon \in C^0(\Gamma)$ telle que:

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction φ_ε étant fixée, par densité de $\mathcal{V}$ dans $C^0(\Gamma)$, on peut trouver $p_\varepsilon \in \mathbf{P}$ tel que

$$\|\varphi_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4\pi}} .$$

Pour conclure, on utilise l'inégalité triangulaire, ce qui nous donne:

$$\|\varphi - p_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \|\phi_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4\pi}}\, mes(S_2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

■

On déduit de ce résultat et du théorème 26, le corollaire suivant

Corollaire 3 *Soit $\left\{Y_n^m,\ -n \leq m \leq n\right\}$ une base orthogonale (dans $L^2(S_2)$) de $\mathcal{H}_n$, alors la famille $\left\{Y_n^m, n \in \mathbb{N},\ -n \leq m \leq n\right\}$ est une base hilbertienne de $L^2(S_2)$.*

C.3 L'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère.

Coordonnées sphériques. Nous introduisons les coordonnées sphériques associées à un repère $Ox_1x_2x_3$. Les coordonnées sphériques sont les coordonnées $(r,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ associées aux coordonnées cartésiennes par:

$$\left\{\begin{aligned} & x_1 = r\ \sin\theta\ \cos\phi, \\ & x_2 = r\ \sin\theta\ \sin\phi, \\ & x_3 = r\ \cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Les coordonnées angulaires (ϕ,θ) fournissent une paramétrisation de la sphère unité :

$$S_2 = \left\{ \ x = (\sin\theta \ \cos\phi, \sin\theta \ \sin\phi, \cos\theta), \ (\phi,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,\pi] \ \right\}. \tag{33}$$

Le Jacobien de la transformation de l'application

$$F : \quad (r, \phi, \theta) \quad \longrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) \tag{34}$$

est donné par

$$J(r,\phi,\theta) = r^2 \ \sin\theta. \tag{35}$$

On peut ainsi caractériser l'espace $H^1(\mathbb{R}^2)$ en coordonnées sphériques (avec des notations évidentes).

$$u \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u(r,\phi,\theta)|^2 \ r^2 \ \sin\theta \ dr \ d\phi \ d\theta < +\infty. \tag{36}$$

En utilisant la paramétrisation (ϕ,θ), on peut également exprimer la mesure superficielle de la sphère unité :

$$d\sigma(\phi,\theta) = \sin\theta \ d\theta \ d\phi,$$

et ainsi caractériser l'espace $L^2(S_2)$:

$$u \in L^2(S_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u(r,\phi,\theta)|^2 \ \sin\theta \ d\phi \ d\theta < +\infty. \tag{37}$$

Remarque 19 *Dans ce qui précède, nous avons implicitement "identifié" via F, l'espace $\mathbb{R}^3$ à l'ensemble $\mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$*

Par abus de notation, mais aussi par souci de simplicité, nous avons choisi de garder la même lettre pour une fonction exprimée dans les coordonnées sphériques ou cartésiennes :

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(r,\phi,\theta).$$

L'application F est surjective dans $\mathbb{R}^3$ et bijective de $\mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\times[0,\pi[$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus D_3$ 0ù D_3 désigne la droite $x_1 = x_2 = 0$, qui correspond aussi à $r\sin\theta = 0$ (lieu d'annulation de J). L'inverse de l'application F s'obtient aisément.

Le nombre r n'est autre que la distance à l'origine

$$r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

L'angle θ s'obtient alors par

$$r \ \cos\theta = x_3, \tag{39}$$

et on peut déduire ϕ à partir des deux premières équations de (32).

On peut, et cela nous sera utile, calculer la différentielle de cette application inverse, c'est à dire les gradient ∇r, $\nabla\theta$, $\nabla\phi$.

En différenciant l'identité $r^2 = |x|^2$, on obtient aisément

$$\nabla r = \frac{x}{r} = e_r \quad \text{où par définition} \quad (\sin\theta\ \cos\phi,\ \sin\theta\ \sin\phi,\ \cos\theta)^t. \tag{40}$$

En différenciant l'identité $r\cos\theta = x_3$, on obtient aisément

$$\cos\theta\ \nabla r - r\sin\theta\ \nabla\theta = e_3.$$

On calcule aisément, à partir de (40), que :

$$e_3 - \cos\theta\ \nabla r = (-\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\phi, -\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\phi, 1-\cos^2\theta) = -\sin\theta\ e_\theta,$$

$$\text{où par définition} \quad e_\theta = (\cos\theta\ \cos\phi, \cos\theta\ \sin\phi,\ -\sin\theta)^t\ . \tag{41}$$

Ceci entraine

$$\nabla\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\ e_\theta\ . \tag{42}$$

A partir des deux premières équations de (32) on obtient :

$$\tan\phi = \frac{x_2}{x_1}\ .$$

Par différenciation

$$\frac{1}{\cos^2\phi}\ \nabla\phi = (\ -\frac{x_2}{x_1^2}\ ,\ \frac{1}{x_1}\ ,\ 0\ ).$$

On calcule facilement à partir de (32)

$$-\cos^2\phi\ \frac{x_2}{x_1^2} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}, \quad \cos^2\phi\ \frac{1}{x_1} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta},$$

ce qui donne

$$\nabla\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\ e_\phi \quad \text{où } e_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0). \tag{43}$$

On vérifie aisément que, en tout point $x \notin D_3$, les vecteurs $(e_r,\ e_\phi,\ e_\theta)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et que par ailleurs

$$x \times e_r = 0, \quad x\cdot e_\phi = x\cdot e_\theta = 0. \tag{44}$$

Opérateurs différentiels et opérateur de Laplace-Beltrami. A l'aide de la formule de dérivation composée :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\nabla r + \frac{\partial u}{\partial \phi}\,\nabla \phi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\nabla \theta$$

et des expressions (40,43,42), on peut alors exprimer le gradient en coordonnées polaires (supposons $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$):

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\, e_r + \frac{1}{r sin(\theta)}\,\frac{\partial u}{\partial \phi}\, e_\phi + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\, e_\theta\ , \tag{45}$$

ce que l'on réécrit souvent

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\, e_r + \frac{1}{r}\,\nabla_s u, \tag{46}$$

où ∇_s est l'opérateur "gradient surfacique" défini par :

$$\nabla_S u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\, e_\phi + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\, e_\theta \tag{47}$$

Ceci permet de caractériser $H^1(\mathbb{R}^3)$:

$$u \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{et}$$

$$\int_0^{+\infty}\!\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial r}(r,\phi,\theta)\right|^2 + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\left|\frac{\partial u}{\partial \phi}(r,\phi,\theta)\right|^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\phi,\theta)\right|^2\right]\, r^2\,\sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta < +\infty.$$

On définit l'espace $H^1(S_2)$:

$$u \in H^1(S_2) \quad \Longleftrightarrow (u,\nabla_S\, u) \in L^2(S^2)\times L^2(S^2)^3, \tag{48}$$

que l'on munit ainsi de sa structure hilbertienne naturelle. Par ailleurs, on démontre que:

L'injection canonique de $H^1(S_2)$ dans $L^2(S^2)$ est compacte. (49)

Enfin, on obtient aisément l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées phériques:

$$\Delta u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2}\,\Delta_S\, u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta_S\, u, \tag{50}$$

où l'opérateur Δ_S est l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou Laplacien tangentiel) qui "n'agit" que sur les variables (ϕ,θ):

$$\Delta_S\, u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \tag{51}$$

Remarque 20 *Pour trouver les expressions (50, 51), un moyen simple consiste à utiliser l'identité (par exemple pour* (u,v) *à régulières support compact):*

$$-\int \Delta u\, v\, dx = \int \nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

puis à utiliser (45) pour exprimer le membre de droite en coordonnées sphérique et comme une intégrale sur les variables (r,ϕ,θ)*. Il suffit alors d'effectuer des intégrations par parties en* r*,* ϕ *et* θ *pour aboutie au résultat. Nous invitons le lecteur à faire cet exercice.*

Il est facile de vérifier (et immédiat si on procède comme dans la remarque 20) que:

$$\forall\ (\varphi,\psi) \in C^2(S^2)^2, \quad -\int_{S^2} \Delta_S\ \varphi\ \psi\ d\sigma = \int_{S^2} \nabla_S\ \varphi \cdot \nabla_S\ \psi\ d\sigma. \tag{52}$$

Cette formule permet de prolonger (en utilisant la densité de $C^2(S_2)$ dans $H^1(S_2)$) l'opérateur Δ_S à l'espace $H^1(S_2)$:

$$\Delta_S \in \mathcal{L}(H^1(S_2),H^{-1}(S_2)). \tag{53}$$

puis de le définir en tant qu'opérateur non borné dans $L^2(S_2)$, de domaine

$$D(-\Delta_S) = \Big\{\varphi \in H^1(S_2)\ /\ \Delta_S u \in L^2(S_2)\ \Big\} := H^2(S_2). \tag{54}$$

Il est facile détablir que $-\Delta_S$ est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte, en vertu de (49). On sait donc que $-\Delta_S$ admet une suite de valeurs propres réelles positives (la première valeur propre est évidemment 0, les fonctions constantes appartiennent de toute évidence au noyau de $-\Delta_S$)

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots\ , \quad \text{avec } \lambda_k \to +\infty \quad \text{quand } k \to +\infty, \tag{55}$$

et il est en outre diagonalisable en base orthonormée.

Les harmoniques sphériques, introduites au paragraphe précédent, vont nous permettre de préciser ce résultat :

Lemme 19 *Pour toute fonction* φ *de l'espace* $\mathcal{H}_n$*, on a:*

$$-\Delta_S\ \varphi = n(n+1)\ \varphi \tag{56}$$

En d'autres termes, pout tout $n \in \mathbb{N}$*,* $n(n+1)$ *est une valeur propre de* $-\Delta_S$ *et le sous-espace propre associé contient* $\mathcal{H}_n$*.*

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{H}_n$, il existe $p \in \mathbb{H}_n$ tel que $\varphi = \gamma p$. Par homogénéité, on a

$$p(x) = |x|^n\ \varphi\Big(\frac{x}{|x|}\Big),$$

ou encore, en coordonnées sphériques:

$$p(r,\phi,\theta) = r^n \ \varphi(\phi,\theta).$$

En utilisant la formule (50), il vient

$$\Delta p(r,\phi,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(r^{n+1}\Big)\ \varphi(\phi,\theta) + \frac{1}{r^2}\ \Delta_S\,\varphi(\phi,\theta) = \frac{n(n+1)}{r^2}\ \varphi(\phi,\theta) + \frac{1}{r^2}\ \Delta_S\,\varphi(\phi,\theta).$$

On obtient le résultat annoncé en écrivant que (p est harmonique) $\Delta p(1,\phi,\theta) = 0$.

■

Nous en déduisons le principal théorème de cette section:

Théorème 28 *Le spectre de l'opérateur $-\Delta_S$ est donné par*

$$\sigma(-\Delta_S) = \Big\{n(n+1),\, n \in \mathbb{N}\Big\}. \tag{57}$$

De plus, le sous-espace propre associé à $n(n+1)$ est l'espace $\mathcal{H}_n$.

Par suite, si $\big\{Y_n^m,\, n \in \mathbb{N}, -n \leq m \leq n\big\}$ est une base hilbertienne d'harmoniques sphériques au sens du corollaire, l'opérateur $-\Delta_S$ est diagonalisé dans cette base:

$$-\Delta_S\ Y_n^m = n(n+1)\ Y_n^m. \tag{58}$$

Démonstration : Soit λ une valeur propre de $-\Delta_S$. Soit $\varphi \in H^2(S_2)$, $\varphi \neq 0$ un vecteur propre associé:

$$-\Delta_S\,\varphi = \lambda\ \varphi$$

En particulier, pout tout entier k

$$-\int \Delta_S\,\varphi\ \psi_k\ d\sigma = \lambda \int \varphi\ \psi_k\ d\sigma.$$

c'est à dire, en utilisant le caractère autoadjoint de $-\Delta_S$ et le lemme 19

$$\big(\lambda - k(k+1)\big)\ \int \varphi\ \psi_k\ d\sigma = 0, \quad \forall\ \psi_k \in \mathcal{H}_k. \tag{59}$$

1. Si λ n'est pas un nombre de la forme $n(n+1)$ avec n entier, on en déduit que:

   $$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \int \varphi\ \psi_k\ d\sigma = 0, \quad \forall\ \psi_k \in \mathcal{H}_k.$$

   Si $\mathcal{P}_n$ désigne la projection orthogonale dans L^2 sur l'espace $\mathcal{V}_n$, cela signifie que

   $$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n\varphi = 0.$$

   Or le résultat de densité du théorème 27 signifie que $\mathcal{P}_n\varphi$ converge dans L^2 vers φ quand n tend vers $+\infty$. En passant a la limite, on obtient $\varphi = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On a donc démontré (57).

2. Si $\lambda = n(n+1)$, (59) signifie que φ est orthogonal à tous les espaces $\mathcal{H}_k$ pour $k \neq n$, et donc, grâce au résultat de complétude du théorème 27, que φ appartient à $\mathcal{H}_n$.

Ceci achève la démonstration compte tenu du lemme 19.

∎

Remarque 21 *A posteriori, l'orthogonalité (dans $L^2(S_2)$) des espaces $\mathcal{H}_n$ entre eux, que nous avons démontrée directement (voir thorème 26) apparait aussi comme une conséquence des propriétés des opérateurs autoadjoints: deus sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont nécessairement orthogonaux.*

Bien sûr, une des conséquences utiles du théorème est la décomposition en harmoniques sphériques d'une fonction de $L^2(S_2)$:

$$\forall\, \varphi \in L^2(S_2), \quad \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} \varphi_{m,n}\, Y_n^m, \quad \varphi_{mn} = \int_{S_2} \varphi(\phi,\theta)\, Y_n^m(\phi,\theta)\, d\sigma(\phi,\theta). \tag{60}$$

A priori, c'est à dire sans hypothèse supplémentaire sur la fonction φ, la convergence de la série (60) n'a lieu qu'au sens de $L^2(S_2)$. On a une bien meilleure convergence d'es que φ appartient à un espace de Sobolev $H^s(S_2)$ avec $s > 0$. Rappelons que la définition classique de cet espace est

$$H^s(S_2) = D\big((-\Delta_S)^{\frac{s}{2}}\big), \tag{61}$$

ce qui, en utilisant une base spectrale d'harmoniques sphériques

$$H^s(S_2) = \Big\{\ \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} \varphi_{m,n}\, Y_n^m\ /\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} \big[n(n+1)\big]^s\, |\varphi_{m,n}|^2 < +\infty\ \Big\}. \tag{62}$$

La norme usuelle de l'espace $H^s(S_2)$ est définie par :

$$\|\varphi\|^2_{H^s(S^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big[1 + n^2(n+1)^2\Big]^{\frac{s}{2}}\, |\varphi_{m,n}|^2. \tag{63}$$

C.4 Fonctions de Bessel sphériques

Les fonctions de Bessel sphériques sont par définition les solutions de l'équation de Bessel sphérique qui apparaît naturellement quand on cherche les solutions de l'équation de Helmholtz $3D$

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{64}$$

qui sont à variables séparées en coordonnées sphériques, c'est à dire de la forme:

$$v(r\,\phi,\theta) = u(r)\, Y(\Phi,\theta). \tag{65}$$

En injectant (65) dans (64), on obtient, compte tenu de (50)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)\, Y + \frac{1}{r^2}\, u\, \Delta_S Y \; + k^2\, u\, Y = 0.$$

c'est à dire après division par v (que l'on suppose non nulle)

$$-\Big[\ \frac{\Delta_S Y}{Y}\ \Big](\Phi,\theta) = r^2\ \Big[\ \frac{1}{ru}\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2\Big](r) \tag{66}$$

Les variables r et (Φ,θ) étant indépendantes, chacun des termes de cette égalité est constant. On en déduit en particulier que Y doit être une fonction propre de $-\Delta_S$ et donc d'après le théorème (28), qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que:

$$Y \in \mathcal{H}_n \quad (\Longrightarrow \quad -\Delta_S Y = n(n+1)\, Y\ )$$

Par suite, u doit être solution de l'équation différentielle appelée équation de Bessel sphérique d'ordre n et de fréquence ω:

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2 u - \frac{n(n+1)}{r^2}\ u = 0, \tag{67}$$

qui s' écrit encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r} + k^2 u - \frac{n(n+1)}{r^2}\ u = 0, \tag{68}$$

Par définition, les fonctions de Bessel sphériques sont les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}_*^+$, l' inconnue u étant supposée à valeurs dans $\mathbb{C}$. Elles forment bien sûr, en vertu des théorèmes classiques sur les équations différentielles linéaires, un sous-espace de dimension 2 de $C^\infty(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{C})$ que nous allons maintenant décrire. Notons tout d'abord que, par un simple argument d'homogénéité montre que l'ensemble des solutions de (67) est décrit par

$$u(r) = \mathbf{u}(kr) \tag{69}$$

où $\mathbf{u}$ décrit l'espace des solutions de l'équation de Bessel sphérique d'ordre n et fréquence 1:

$$\frac{1}{r\mathbf{u}}\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\mathbf{u}) + \mathbf{u} - \frac{n(n+1)}{r^2}\ \mathbf{u} = 0, \tag{70}$$

soit encore

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \mathbf{u} - \frac{n(n+1)}{r^2}\ \mathbf{u} = 0. \tag{71}$$

Bien entendu, la forme (70) de l'équation suggère d'introduire la nouvelle fonction:

$$U(r) = r\, \mathbf{u}(r), \tag{72}$$

qui satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]\ U = 0 \tag{73}$$

On voit immédiatement que le cas $n = 0$ joue un rôle particulier.

Fonctions de Bessel spheriques d'ordre 0.

L"equation satisfaite par U est simplement

$$\frac{d^2U}{dr^2} + U = 0. \tag{74}$$

Toute solution est donc de la forme

$$U(r) = A\, e^{ir} + B\, e^{-ir}.$$

ce qui, en revenant à l'inconnue originelle u, donne

$$u(r) = A\, \frac{e^{ir}}{r} + B\, \frac{e^{-ir}}{r},$$

Cette forme justifie de donner un statut particulier aux fonctions de Hankel d'order 0.

$$h_0^{(1)}(r) = \frac{e^{ir}}{r}, \quad h_0^{(2)}(r) = \frac{e^{-ir}}{r}, \quad \big(= \overline{h_0^{(1)}(r)}\,\big) \tag{75}$$

On notera que $h_0^{(1)}$ est la seule des fonctions de Bessel d'ordre 0 qui satisfait

$$\Big[h_0^{(1)}\Big]'(r) - \frac{i}{r}\, h_0^{(1)}(r) = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \quad r \to +\infty. \tag{76}$$

raison pour laquelle on l' appelle $h_0^{(1)}$ la fonction de Hankel sphérique sortante alors que $h_0^{(2)}$, qui vérifie

$$\Big[h_0^{(2)}\Big]'(r) + \frac{i}{r}\, h_0^{(2)}(r) = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \quad r \to +\infty, \tag{77}$$

est la fonction de Hankel entrante.

Il est facile de voir que la seule solution qui soit, à une constante multiplicative près, régulière à l'origine est la fonction de Bessel

$$j_0(r) = \frac{h_0^{(1)}(r) - h_0^{(2)}(r)}{2i} = \frac{\sin r}{r}. \tag{78}$$

Enfin, si on introduit

$$y_0(r) = \frac{h_0^{(1)}(r) + h_0^{(2)}(r)}{2} = \frac{\cos r}{r}, \tag{79}$$

on a introduit les deux bases classiquement utilisées pour décrire l'espace des solutions de l'équation de Bessel d' ordre 0 et fréquence 1, à savoir

$$\big(\, h_0^{(1)}, h_0^{(2)} \big) \quad \text{ou} \quad \big(\, j_0, y_0 \big). \tag{80}$$

Notons que, si $h_0^{(1)}$ et $h_0^{(2)}$ se distinguent de façon naturelle par leur comportement à l'infini (cf. (76) et (77)), j_0 et y_0 se distinguent par leur comportement à l'origine

$$\lim_{r \to 0}\, j_0(r) = 1, \quad y_0(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{quand } r \to 0\,. \tag{81}$$

La fonction j_0 est développable en série entière (avec un rayon de convergence infini). C' est, à une constante multiplicative près, la seule solution de l'équation (74) qui admette une limite finie à l'origine.

Fonctions de Bessel sphériques d'ordre supérieur à 1.

Nous revenons à l'équation (73). Lorsque r tend vers $+\infty$, le terme $n(n+1)/r^2$ devient négligeable devant 1 et l'équation se comporte donc comme l'équation d'ordre 0 (74). On peut donc s'attendre à ce que (73) admette une solution $U^{(1)}$ qui vérifie

$$U^{(1)}(r) \sim e^{ir} \quad \text{quand } r \to +\infty\ . \tag{82}$$

Evidemment, dès qu'on a construit une telle solution, en posant

$$U^{(2)}(r) = \overline{U^{(1)}(r)},$$

on construit une autre solution de (73) qui vérifie

$$U(2)(r) \sim e^{-ir} \quad \text{quand } r \to +\infty \tag{83}$$

et une base de solutions de (73) est donnée par

$$\left(U^{(1)}, U^{(2)}\right).$$

Pour construire $U^{(1)}$, nous effectuons le changement de fonction inconnue

$$U(r) = e^{ir}\, V(r),$$

auquel cas l'équation satisfaite par V est

$$\frac{d^2V}{dr^2} + 2i\frac{dV}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\, V = 0. \tag{84}$$

Conformément à (82), nous cherchons une solution qui satsifait

$$\lim_{r\to+\infty} V(r) = 1. \tag{85}$$

Il est naturel, vu la forme de l' équation, d'effectuer le changement de variable

$$r = \frac{1}{t},$$

et de poser

$$V(r) = W(t), \quad r = \frac{1}{t}.$$

On calcule aisément que

$$\frac{dV}{dr}(r) = -t^2\, \frac{dW}{dt}(t), \quad \frac{d^2V}{dr^2}(r) = t^4\, \frac{d^2W}{dt^2}(t) + 2\, t^3\, \frac{dW}{dt}(t),$$

ce qui permet de d'eduire l' équation en W

$$t^2\, \frac{d^2W}{dt^2}(t) + 2t\, \frac{dW}{dt}(t) - 2i\, \frac{dW}{dt}(t) - n(n+1)W(t) = 0,$$

que l' on peut écrire

$$B\left(\frac{d}{dt}\right) W = n(n+1)\, W, \quad \text{avec} \quad B\left(\frac{d}{dt}\right) := t^2\, \frac{d^2}{dt^2} + 2\,(t-i)\, \frac{d}{dt}\,. \tag{86}$$

Autrement dit, W est une fonction propre de l'opérateur différentiel $B\left(\frac{d}{dt}\right)$ associée à la valeur propre $n(n{+}1)$. Cet opérateur apparaît comme une combinaison linéaire d'opérateurs élémentaires du type

$$t^p\, \frac{d^q}{dt^q} \quad \text{avec} \quad q \geq p.$$

En conséquence, $B\left(\frac{d}{dt}\right)$ préserve l'espace $P_k(\mathbb{R})$ des polynômes d'une variable de degré inférieur à k. En effet

$$\begin{cases} \text{Pour } \ell = 0, \quad B\left(\dfrac{d}{dt}\right)\, \left[t^\ell\right] = 0, \\[2ex] \text{Pour } \ell \geq 1, \quad B\left(\dfrac{d}{dt}\right)\, \left[t^\ell\right] = \ell(\ell+1)\, t^\ell - 2i\ell\, t^{\ell-1}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B\left(\frac{d}{dt}\right) \in \mathcal{L}\big(P_k(\mathbb{R}),P_k(\mathbb{R})\big).$$

Mieux, la matrice qui représente $B\left(\frac{d}{dt}\right)$ dans la base $\{1,t,\cdots,t^k\}$ de $P_k(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure et bidiagonale, les élements diagonaux étant

$$\ell(\ell+1), \quad \ell = 0,1,\cdots,k\ .$$

Si on introduit $P(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k(\mathbb{R})$, l'opérateur $B\left(\frac{d}{dt}\right)$ est donc "triangulaire" dans $P(\mathbb{R})$.

Ses valeurs propres sont simples et données par

$$\ell(\ell+1), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

le vecteur propre associé à $\ell(\ell+1)$ étant un polynôme de degré ℓ.

Comme la condition (85) se traduit pour la fonction W par

$$W(0) = 1. \tag{87}$$

Nous avons donc exhibé une solution W ayant les propriétés recherchées, à savoir $W := W_n$ où W_n est le polynôme de degré n qui est fonction propre de $B\left(\frac{d}{dt}\right)$ associée à la valeur propre $n(n+1)$ et qui vérifie $W_n(0) = 1$. En cherchant

$$W_n(t) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \beta_p^n\, t^p \tag{88}$$

on aboutit à (avec la convention $\beta_n^0 = 1$):

$$\beta_0^n = 1, \quad \beta_{p+1}^n = i\, \frac{n(n+1) - p(p+1)}{2(p+1)}\, \beta_p^n\ , \quad p = 0,1,\cdots n-1, \tag{89}$$

ce qui définit entièrement W_n. Le lecteur remarquera que:

– Si p est pair, β_p^n est réel,

– Si p est impair, β_p^n est imaginaire,

ce qui revient à dire que W_n est un polyôme à coefficients réels de la variable it. Nous pouvons résumer ce que nous venons de faire avec le théorème suivant.

Théorème 29 *Etant donné $n \geq 1$, nous définissons les fonctions de Hankel sphériques d'ordre n et de fréquence 1, respectivement entrante et sortante, par*

$$h_n^{(1)}(r) = \frac{e^{ir}}{r}\, \left[1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\beta_p^n}{r^p} \right], \quad h_n^{(2)}(r) = \frac{e^{-ir}}{r}\, \left[1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\overline{\beta_p^n}}{r^p} \right]. \tag{90}$$

où les coefficients β_n^p sont déterminés par (89). La solution générale de l'équation de Bessel (70) s'écrit:

$$\mathbf{u}(r) = \mathbf{A}\ h_n^{(1)}(r) + \mathbf{B}\ h_n^{(2)}(r), \quad (\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}. \tag{91}$$

De plus, la fonction $h_n^{(1)}$ est, à une constante multiplicative près la seule solution de (70) qui satisfait la condition dite sortante à l' infini:

$$\big[h_n^{(1)}\big]'(r) - \frac{i}{r}\, h_n^{(1)}(r) = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \quad r \to +\infty. \tag{92}$$

et la fonction $h_n^{(2)}$ est, à une constante multiplicative près la seule solution de (70) qui satisfait la condition dite entrante à l' infini:

$$\big[h_n^{(2)}\big]'(r) + \frac{i}{r}\, h_n^{(2)}(r) = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \quad r \to +\infty, \tag{93}$$

Remarque 22 *Il est bien sur facile de calculer les β_n^p à partir de (89) qui se réécrit:*

$$\beta_0^n = 1, \quad \beta_{p+1}^n = \frac{i}{2}\, \frac{(n-p)(n+p+1)}{(p+1)}\, \beta_p^n\ , \quad p = 0,1,\cdots n-1, \tag{94}$$

Ainsi

$$\beta_1^n = \frac{i}{2}\, \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \quad \beta_2^n = \frac{i^2}{2^2}\, \frac{(n-2)(n-1)(n+2)(n+3)}{2 \times 3}$$

et de proche en proche

$$\beta_p^n = \frac{i^p}{2^p}\, \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!}\, \frac{(n+p+1)!}{(n+p)!}\, \frac{1}{(p+1)!} \tag{95}$$

de telle sorte que (96se réécrit:

$$\left\{\begin{aligned} h_n^{(1)}(r) &= \frac{e^{ir}}{r}\ \left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-p-1)!}\ \frac{(n+p+1)!}{(n+p)!}\ \frac{1}{(p+1)!}\ \big(\frac{i}{2r}\big)^p\right], \\ h_n^{(2)}(r) &= \frac{e^{-ir}}{r}\ \left[1+\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\ \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!}\ \frac{(n+p+1)!}{(n+p)!}\ \frac{1}{(p+1)!}\ \big(\frac{i}{2r}\big)^p\right]. \end{aligned}\right. \tag{96}$$

De la même façon que pour $n=0$, on définit les fonctions de Bessel:

$$j_n(r) = \frac{h_n^{(1)}(r)-h_n^{(2)}(r)}{2i}, \quad y_n(r) = \frac{h_n^{(1)}(r)+h_n^{(2)}(r)}{2}\ . \tag{97}$$

Au contraire des fonctions $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ qui se distinguent par leur comportement á l'infini, les fonctions j_n et y_n se distinguent par leur comportement à l'origine. Détaillons un peu davantage de point.

Quand $r \to 0$, 1 devient négligeable devant $n(n+1)/r^2$ et l'équation (73) se comporte comme l'équation:

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\ U = 0 \tag{98}$$

Dériver deux fois r^β fait "perdre" deux puissances de r. Il est naturel de chercher des solutions de (98) de la forme $r^{\alpha+1}$ ce qui mène à l'équation en α:

$$\left|\begin{aligned} \alpha(\alpha+1)-n(n+1)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\alpha-n)(\alpha+n+1)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = n \quad \text{ou} \quad \alpha = -n-1. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

Comme les solutions U de (73) sont liées aux solutions $\mathbf{u}$ de (70) par $U = r\ \mathbf{u}$, on peut donc s'attendre à ce que (70) admette deux solutions $\mathbf{u}^R$ (R comme "régulière à l'origine") et $\mathbf{u}^S$ (S comme "singulière à l'origine") telles que

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{u}^R(r) &= r^n\ \big(1+O(r)\big), \qquad r \to 0, \\ \mathbf{u}^S(r) &= r^{-n-1}\ \big(1+O(r)\big), \qquad r \to 0, \end{aligned}\right. \tag{100}$$

ces fonctions constituant bien entendu une autre base des solutions de (70). Nous allons voir que ces fonctions existent bien et coincident avec les fonctions de Bessel j_n et y_n.

Compte tenu de (100), on va chercher une solution u de (70) de la forme:

$$\mathbf{u}(r) = r^{\alpha}\left(1 + a_1\, r + a_2\, r^2 + \cdots\right) = r^{\alpha}\left(1 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\, r^p\right), \quad \text{avec} \ \ \alpha = n \ \ \text{ou} \ \ -n-1.$$

On calcule alors facilement que, en posant $a_0 = 0$:

$$\left|\begin{array}{lcl} r\dfrac{d^2}{dr^2}\,(r\mathbf{u}) & = & r^{\alpha}\left(\,\alpha(\alpha+1) + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(p+\alpha)(p+\alpha+1)\,a_p\,r^p\,\right), \\ n(n+1)\,\mathbf{u} & = & r^{\alpha}\left(\,n(n+1) + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} n(n+1)\,a_p\,r^p\right), \\ r^2\,\mathbf{u} & = & r^{\alpha}\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2}\,r^p\,\right), \end{array}\right.$$

Par conséquent, $\mathbf{u}$ est solution de (70) si et seulement si:

$$[(p+\alpha)(p+\alpha+1) - n(n+1)\,]\;a_p = a_{p-2}. \Longrightarrow a_{p+2} = \frac{a_p}{p^2 + (2\alpha+1)\,p}$$

$$\lim_{r\to 0} j_n(r) = 1, \quad y_n(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{quand } r \to 0. \tag{101}$$

Le Wronskien de fonctions de Bessel du même ordre.

Rappelons que le wronskien de deux fonctions d'une variable, de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est défini par:

$$\mathcal{W}(u,v) = u'\,v - u\,v' \quad \big(\in C^0(I)\big). \tag{102}$$

L'application $(u,v) \mapsto \mathcal{W}(u,v)$ est bilinéaire, antisymétrique et poss'ede la propriété:

$$u \text{ et } v \text{ sont linéairement indépendantes} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{W}(u,v) \neq 0. \tag{103}$$

Considérons deux solutions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ de l'équation de Bessel:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2\mathbf{u}_1}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\,\dfrac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial r} - \mathbf{u}_1 - \dfrac{n(n+1)}{r^2}\,\mathbf{u}_1 = 0 & \quad (i) \\ \dfrac{\partial^2\mathbf{u}_2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\,\dfrac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial r} - \mathbf{u}_2 - \dfrac{n(n+1)}{r^2}\,\mathbf{u}_2 = 0 & \quad (ii) \end{array}\right. \tag{104}$$

Multiplions (104-(i)) par $\mathbf{u}_2$ et (104-(ii)) par $\mathbf{u}_1$. Après différence, nous obtenons:

$$\frac{d}{dr}\,\mathcal{W}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) + \frac{2}{r}\,\mathcal{W}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr}\big[\,r^2\,\mathcal{W}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = 0\,\big].$$

Par conséquent, il existe une constante $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ telle que:

$$\left[\ \mathcal{W}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\ \right](r) = \frac{\mathbf{C}}{r^2}\ . \tag{105}$$

Par conséquent, si nous cherchons à déterminer le wronskien de $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$, il ne reste plus qu'à déterminer la constante $\mathbf{C}$. Or, à partir de la formule nous déduisons:

$$\frac{dh_n^{(1)}}{dr}(r) = i\ \frac{e^{ir}}{r}\ \left[1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\beta_p^n}{r^p}\right] - \frac{e^{ir}}{r^2}\left[1 + \sum_{p=1}^{n}(p+1)\frac{\beta_p^n}{r^p}\right] = i\ \frac{e^{ir}}{r}\left[1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\right] \tag{106}$$

Comme $h_n^{(2)}(r) = \frac{e^{-ir}}{r}\ \left[1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\right]$, il vient

$$\frac{dh_n^{(1)}}{dr}(r)\ h_n^{(2)}(r) = \frac{i}{r^2}\ \left[1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\right].$$

Comme $h_n^{(2)}(r) = \overline{h_n^{(1)}(r)}$, on a $\mathcal{W}(h_n^{(1)},h_n^{(2)}) = 2\ \mathcal{I}m\ \left[\frac{dh_n^{(1)}}{dr}(r)\ h_n^{(2)}(r)\right]$ et donc

$$\mathcal{W}(h_n^{(1)},h_n^{(2)}) = \frac{2}{r^2}\ \left[1 + O\big(\frac{1}{r}\big)\right]. \tag{107}$$

En confrontant (105) et (107), on déduit que $\mathbf{C} = 2$ et que par conséquent

$$\mathcal{W}(h_n^{(1)},h_n^{(2)}) = \frac{2}{r^2}\ . \tag{108}$$

De façon générale, étant données deux solutions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ de (70), il existe $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})$ tels que

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\ h_n^{(1)} + a_{12}\ h_n^{(2)}, \quad \mathbf{u}_2 = a_{21}\ h_n^{(1)} + a_{22}\ h_n^{(2)}\ .$$

et en utilisant les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du wronskien, on obtient

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = 2\ \frac{a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}}{r^2}\ . \tag{109}$$

C.5 Le théorème d'addition

Ce théorème a pour but de donner une expression du noyau de Green de l'équation de Helmholtz

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\ , \tag{110}$$

sous la forme d'une somme (infinie) de fonctions à variables séparées en (x,y), autrement dit de produits d' une fonction de x par une fonction de y. Ce théorème a des conséquences sur la théorie du scattering inverse mais aussi sur les méthodes numériques pour la résolution des problèmes de diffraction puisque la formule dite de Gegenbauer est à la base du développement des algorithmes multi-pôles pour la résolution des équations intégrales apparaissant avec ce type de problème.

L'idée pour obtenir cette formule consiste à remarquer que, y étant donné, la fonction

$$x \mapsto u^y(x) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

n'est autre que la solution élémentaire sortante de l'équation de Hemholtz avec source localisée en y :

$$\Delta u^y + k^2\, u^y = \delta(x-y), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{111}$$

Le principe consiste alors à résoudre l'équation (111) en coordonnées sphériques (r,θ,Φ) (pour la variable x) et à identifier le résultat obtenu, sous forme d'une série, à (110). Les étapes du calcul consistent donc à

1. Chercher la solution sous la forme :

$$u^y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} u^y_{mn}(r)\, Y_n^m(\phi,\theta). \tag{112}$$

2. Injecter (112) dans (111) et en déduire une équation différentielle (en r) pour chaque u^y_{mn} (en l' occurrence une équation de Bessel sphérique).
3. Résoudre explicitement cette équation différentielle en tenant compte de la condition d'onde sortante à l'infini et reporter l'expression obtenue dans la formule (111).

L'idée pour obtenir l'équation satisfaite par u^y_{mn} consiste à "tester" l'équation (111) contre une fonction test $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ de la forme

$$\Phi(x) = \varphi(r)\, Y_n^m(\phi,\theta), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Nous écrivons donc :

$$\left\langle \Delta u^y + k^2 u^y, \Phi \right\rangle = \Phi(y)$$

c'est à dire, si (ρ,θ',ϕ') désignent les coordonnées sphériques de y

$$\langle u^y, \Delta\Phi\rangle + k^2\, \langle u^y, \Phi\rangle = \varphi(\rho)\, Y_n^m(\phi',\theta')$$

soit encore, puisque $u^y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^y(x)\, \Delta\Phi(x)\, dx + k^2 \int_{\mathbb{R}^3} u^y(x)\, \Phi(x)\, dx = \varphi(\rho)\, Y_n^m(\phi',\theta') \tag{113}$$

En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées sphériques, nous obtenons :

$$\left|\begin{array}{lll} \Delta\Phi(x) & = & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)\, Y_n^m(\phi,\theta) + \dfrac{\varphi(r)}{r^2}\, \Delta_S\, Y_n^m(\phi,\theta) \\[2ex] & = & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)\, Y_n^m(\phi,\theta) - n(n+1)\, \dfrac{\varphi(r)}{r^2}\, Y_n^m(\phi,\theta), \end{array}\right.$$

de telle sorte que (113) se réécrit, puisque $u^y_{mn}(r) = \displaystyle\int_{S_2} u^y(r,\theta,\phi)\; Y^n_m(\phi,\theta)\; d\sigma(\theta,\phi)$:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)\; u^y_{mn}(r)\; r^2\; dr \quad - \quad n(n+1) \displaystyle\int_0^{+\infty} u^y_{mn}(r)\; \phi(r)\; dr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \quad k^2 \displaystyle\int_0^{+\infty} u^y_{mn}(r)\; r^2\; dr \;=\; \varphi(\rho)\; Y^m_n(\phi',\theta') \end{array} \right.$$

En écrivant cela au sens des distributions d'une variable, il vient

$$\Big\langle\, r\; u^y_{mn}, \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)\,\Big\rangle - n(n+1)\;\; \langle u^y_{mn},\varphi\rangle + k^2\;\; \big\langle r^2\; u^y_{mn},\varphi\big\rangle = \varphi(\rho)\; Y^m_n(\phi',\theta')$$

ceci se réinterprète au sens des distributions de la manière suivante :

$$r\; \frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\, u^y_{mn}\big) - n(n+1)\; u^y_{mn} + k^2\; r^2\; u^y_{mn} = Y^m_n(\phi',\theta')\; \delta(r-\rho).$$

Ceci équivaut à :

$$\frac{1}{r}\;\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\, u^y_{mn}\big) - \frac{n(n+1)}{r^2}\; u^y_{mn} + k^2\; u^y_{mn} = 0, \quad \text{dans } [0,\rho\,[\text{ et }]\rho,+\infty]$$

avec les conditions de saut (moyennent des notations évidentes)

$$u^y_{mn}(\rho^+) = u^y_{mn}(\rho^-), \quad \frac{du^y_{mn}}{dr}(\rho^+) - \frac{du^y_{mn}}{dr}(\rho^-) = Y^m_n(\phi',\theta') \tag{114}$$

Dans l'intervalle $]\rho,+\infty[$, d'après la section précédente (et plus précisément le théorème 29), nous savons que u^y_{mn} est une combinaison linéaire de $h^{(1)}_n(kr)$ et de $h^{(2)}_n(kr)$. Compte tenu du comportement à l' infini des fonctions de Hankel, la condition d'onde sortante nous amène à ne conserver que $h^{(1)}_n(kr)$, autrement dit :

$$u^y_{mn}(r) = A_{mn}\; h^{(1)}_n(kr), \quad A_{mn} \in \mathbb{C}. \tag{115}$$

Dans l'intervalle $[0,\rho[$, nous savons que u^y_{mn} est une combinaison linéaire de $j_n(kr)$ et de $y_n(kr)$. Le fait que u^y soit régulière au voisinage de l'origine nous amène à ne conserver que j_n, autrement dit :

$$u^y_{mn}(r) = B_{mn}\; j_n(kr), \quad B_{mn} \in \mathbb{C}. \tag{116}$$

Il reste à injecter (115) et (116) dans les conditions de saut (114) pour déterminer les constantes A_{mn} et B_{mn}. On obtient le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{mn}\; h^{(1)}_n(k\rho) - B_{mn}\; j_n(k\rho) = 0, \\ \\ A_{mn}\; k\; \Big[h^{(1)}_n\Big]'(k\rho) - B_{mn}\; k\; j'_n(k\rho) = Y^m_n(\phi',\theta'), \end{array} \right. \tag{117}$$

système dont le déterminant, qui ne dépend que de n a priori, est donné par :

$$D_n = k\ \left[\mathcal{W}\big(h_n^{(1)},j_n\big)\right](k\rho) \tag{118}$$

En appliquant la formule (109) avec ($a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = \dfrac{1}{2i}, a_{22} = -\dfrac{1}{2i}$), nous obtenons

$$D_n = \frac{i}{k\rho^2}\ .$$

et la résolution du système (117) mène à :

$$\left\{\begin{array}{lll} D_n\ A_{mn} = j_n(k\rho)\ Y_n^m(\phi',\theta') & \Longrightarrow & A_{mn} = \dfrac{k\rho^2}{i}\ j_n(k\rho)\ Y_n^m(\phi',\theta') \\ & & \\ D_n\ B_{mn} = h_n^{(1)}(k\rho)\ Y_n^m(\phi',\theta') & \Longrightarrow & B_{mn} = \dfrac{k\rho^2}{i}\ h_n^{(1)}(k\rho)\ Y_n^m(\phi',\theta'). \end{array}\right. \tag{119}$$

On déduit alors de (116) et (115) que

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{mn}^y(r) = \dfrac{k\rho^2}{i}\ j_n(k\rho)\ h_n^{(1)}(kr)\ Y_n^m(\phi',\theta') & \text{si } r \geq \rho, \\ & \\ u_{mn}^y(r) = \dfrac{k\rho^2}{i}\ h_n^{(1)}(k\rho)\ j_n(kr)\ Y_n^m(\phi',\theta') & \text{si } r \leq \rho. \end{array}\right. \tag{120}$$

Il ne reste plus, pour conclure, qu'à reporter cette expression dans (112). Exprimons le résultat final sous la forme d'un théorème :
Théorème 30 *Si $|x| \leq |y|$ et si on pose $\hat{x} = \dfrac{x}{|x|}$ et $\hat{y} = \dfrac{y}{|y|}$, on a la formule :*

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{k|y|^2}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} j_n(k|x|)\ h_n^{(1)}(k|y|)\ Y_n^m(\hat{x})\ Y_n^m(\hat{y}), \tag{121}$$

où la série (121) converge uniformément dans tout sous-ensemble compact de $\big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\ /\ |x| < |y|\ \big\}$.

Pour $|y| = |x|$, la convergence a lieu au sens de $L_x^2(S_r)$ pout tout $y \in S_r$ (au sens de $L_y^2(S_r)$ pout tout $x \in S_r$).