NM412 - Optimisation Continue - P. L. Combettes

1/ Aspects historiques et motivations

2/ Rappels et compléments

— Opérateurs multivoques
— Topologie (suites généralisées, adhérence forte/faible/séquentielle, compacité forte/faible, théorèmes de Eberlein-Šmulian et Banach-Alaoglu) [1, Chapitres 1&2], [2]
— Fonctions à valeurs étendues (épigraphe, semicontinuité, suites minimisantes) [1, Chapitres 1&2], [2]
— Ensembles convexes (propriétés topologiques, séparation, meilleure approximation) [1, Chapitres 1&2], [2]
— Post-convolution infimale [1, Chapitre 12]
— Espaces hilbertiens [1, Chapitre 2]

3/ Contractions dans les espaces hilbertiens

— Quasi-contractions, contractions, contractions fermes et leurs points fixes [1, Section 4.1]
— Points fixes communs d'une moyenne de quasi-contractions, d'une composition de contractions fermes [1, Section 4.5]
— Principe de demi-fermeture [1, Thm. 4.17], théorème de Browder–Göhde–Kirk [1, Thm. 4.19]
— Propriétés des suites de Fejér [1, Section 5.1]
— Théorème de Groetsch sur les itérations de sous-relaxations d'un contraction [1, Thm. 5.14]
— Théorème de Martinet sur les itérations de la composition de contractions fermes [1, Thm.5.22] (avec $\alpha_i = 1/2$)
— Applications aux méthodes de projection pour les problèmes d'admissibilité convexe [1, Divers exemples du Chapitre 5]

4/ Optimization dans les Banach réflexifs

— cônes convexes, intérieurs généralisés, opérateur cône normal
— conjugaison : propriétés élémentaires, théorème de Fenchel-Moreau, conjuguée de $f+g\circ L$ sous la condition de qualification $0 \in \operatorname{irf}(L(\operatorname{dom} f) - \operatorname{dom} g)$, théorème de Attouch-Brézis
— Identités de dualité de Fenchel et de Fenchel-Rockafellar
— Sous-différentiabilité des fonctions propres
— Sous-différentiel de $f + g \circ L$ sous la condition de qualification $0 \in \operatorname{irf}(L(\operatorname{dom} f) - \operatorname{dom} g)$
— Différentiabilité des fonctions convexes
— Généralités sur les problèmes de minimisation composites (minimiseurs, existence, unicité)
— Application de la règle de Fermat : caractérisation des solutions de problèmes variationnels convexes, cas particuliers, dualité/Lagrangien/Kuhn-Tucker abstrait pour la minimisation de $f + g \circ L$, exemples de la programmation linéaire et de la programmation convexe sous hypothèse de type Slater

Références : [1, Sections 6.1-6.4, Chapitre 13, Section 15.3-15.4, Chapitre 16, Section 17.2, Proposition 17.26, Sections 11.1-11.4, Sections 26.1-26.5] ; voir aussi [2] pour le cas non-hilbertien.

5/ Opérateurs monotones dans les espaces de Hilbert

— Opérateurs monotones et maximalement monotones, exemples, demi-fermeture séquentielle du graphe, théorème de Minty, monotonie maximale d'une somme composite [1, Sections 20.1-20.2, Section 21.1]
— Résolvante d'un opérateur monotone [1, Sections 23.1-23.2]
— Algorithme du point proximal [1, Sections 23.4]

6/ Algorithmes d'éclatement d'opérateurs monotones

— L'algorithme explicite-implicite et ses applications [1, Sections 25.3]
— L'algorithme de Douglas-Rachford et ses applications [1, Sections 25.2]
— Résolution d'inclusions composites

Références

[1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, New York, 2011.
http://www.springer.com/mathematics/book/978-1-4419-9466-0

[2] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific, River Edge, NJ 2002.