Chapitre 8

Opérateurs monotones et inéquations variationnelles

Les opérateurs quasi-linéaires ne correspondent pas toujours à la différentielle au sens de Gâteaux d'une fonctionnelle du calcul des variations. La notion abstraite d'opérateur monotone, et plus généralement d'opérateur pseudo-monotone, permet d'aller plus loin que le calcul des variations dans le cas convexe. Les inéquations variationnelles apparaissent quant à elles dans de nombreux problèmes, notamment ceux qui font intervenir un obstacle.

8.1 Opérateurs monotones, définitions et premières propriétés

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 13 *On dit que*
i) *A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{8.1}$$

ii) *A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = 0$ implique $u = v$.*
iii) *A est hémicontinue si pour tous $u, v \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 71 i) Soit $J \colon V \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable au sens de Gâteaux. Alors sa différentielle $DJ \colon V \to V'$ est monotone. En effet, soit $w = u - v$. Alors

$j(t) = J(v+tw)$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $j(0) = J(v)$, $j(1) = J(u)$, j est différentiable (donc C^1) avec $j'(t) = \langle DJ(v+tw), w\rangle$. Comme j est convexe, j' est croissante, et écrire que $j'(0) \leq j'(1)$ n'est rien d'autre qu'écrire la monotonie de DJ. De plus, comme j est C^1, DJ est hémicontinue.

ii) On peut toujours supposer que $A(0) = 0$. En effet, on remplacera sinon A par $A - A(0)$.

iii) Si A est continue de V fort dans V' faible, alors A est hémicontinue.

iv) Si V est un espace de Hilbert et A est l'opérateur linéaire associé à une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ continue par le théorème de représentation de Riesz, alors A est hémicontinu. Il est monotone si et seulement si a est positive et strictement monotone si et seulement si a est définie positive. □

La remarque iii) admet une réciproque assez surprenante, dans la mesure où l'hémicontinuité est une condition très faible.

Lemme 43 *Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de V fort dans V' faible.*

Démonstration. Soit u_n une suite telle que $u_n \to u$ dans V fort. Cette suite est donc bornée, et comme A envoie les bornés dans les bornés, $A(u_n)$ reste dans un borné de V'. On extrait une sous-suite n' telle que $A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi$ (car V' est réflexif). En raison de la monotonie, pour tout $v \in V$, on a

$$0 \leq \langle A(u_{n'}) - A(v), u_{n'} - v\rangle = \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle - \langle A(v), u_{n'} - v\rangle.$$

Il est bien clair que $\langle A(v), u_{n'} - v\rangle \to \langle A(v), u - v\rangle$. Par ailleurs, comme $A(u_{n'})$ converge faiblement dans V' et $u_{n'}$ fortement dans V, leur crochet de dualité converge :

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \longrightarrow \langle \xi, u - v\rangle.$$

Par conséquent, on obtient à la limite

$$\forall v \in V, \qquad 0 \leq \langle \xi - A(v), u - v\rangle. \tag{8.2}$$

On va montrer que cette inégalité détermine en fait ξ en utilisant un procédé caractéristique des opérateurs monotones et appelé *astuce de Minty*. Soit $w \in V$ quelconque et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquant (8.2) à $v = u + tw$ et divisant l'inégalité obtenue par $t > 0$, on obtient

$$\langle \xi - A(u+tw), w\rangle \leq 0.$$

Faisons alors tendre t vers 0. Comme A est hémicontinu, il vient

$$\forall w \in V, \qquad \langle \xi - A(u), w\rangle \leq 0.$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-w$, donc en fait

$$\forall w \in V, \qquad \langle \xi - A(u), w \rangle = 0,$$

soit

$$\xi = A(u).$$

On conclut par unicité de la limite faible des sous-suites extraites de la suite $A(u_n)$ et faiblement convergentes. □

8.2 Exemples d'opérateurs monotones

Dans cette section, nous donnons quelques exemples d'opérateurs monotones dans le contexte des problèmes aux limites quasi-linéaires.

Commençons par un exemple d'opérateur monotone qui n'est pas la différentielle au sens de Gâteaux d'une fonctionnelle. Soit $V = H_0^1(\Omega)$ et $b \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. On pose $A(u) = -\Delta u + b \cdot \nabla u$. L'opérateur (linéaire ici) A envoie bien $H_0^1(\Omega)$ dans son dual $H^{-1}(\Omega)$. Il est monotone. En effet, pour tout $v \in V$

$$\langle A(v), v \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla v) v \, dx.$$

Or, si $v \in H_0^1(\Omega)$, il est clair que $\int_\Omega v \partial_i v \, dx = 0$. Donc en fait

$$\langle A(v), v \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq 0.$$

Comme $B(u) = -\Delta u$ est la différentielle d'une fonctionnelle, on veut en fait montrer que $C(u) = b \cdot \nabla u$ n'est pas une différentielle. Supposons donc qu'il existe $J\colon V \to \mathbb{R}$ telle que $DJ(u)v = \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v \, dx$. Si l'on pose $j(t) = J(tu)$, il vient $j'(t) = DJ(tu)u = t \int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx = 0$. Donc $J(u) = j(1) = j(0) = 0$ pour tout u dans V, soit $DJ(u) = 0$, ce qui n'est clairement pas le cas. □

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in \left]1, +\infty\right[$ et $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. On se donne une application $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et monotone au sens où pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$,

$$(F(\lambda) - F(\mu)) \cdot (\lambda - \mu) \geq 0,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que F satisfait la condition de croissance

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \qquad |F(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|^{p-1})$$

pour une certaine constante C.

Proposition 24 *L'opérateur $A(u) = -\mathrm{div}\,(F(\nabla u))$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Il est borné, hémicontinu et monotone.*

Démonstration. Soit p' l'exposant conjugué de p. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\nabla u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $F(\nabla u) \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. En effet,

$$|F(\nabla u)|^{p'} = |F(\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C(1+|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \leq C'(1+|\nabla u|^p) \in L^1(\Omega).$$

Par conséquent, $-\mathrm{div}\,(F(\nabla u)) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ avec la dualité

$$\langle -\mathrm{div}\,(F(\nabla u)), v\rangle = \int_\Omega F(\nabla u)\cdot\nabla v\,dx,$$

pour tout v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De plus, si u est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors ∇u est dans un borné de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et par le calcul précédent, $F(\nabla u)$ est dans un borné de $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $A(u)$ reste dans un borné de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Par le théorème de Carathéodory, l'application $z \mapsto F(z)$ est continue de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ fort dans $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ fort. Par composition avec des applications linéaires continues, on en déduit que A est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ fort dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ fort, donc *a fortiori* hémicontinu.

Enfin, pour tout couple $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\langle A(u)-A(v), u-v\rangle = \int_\Omega (F(\nabla u)-F(\nabla v))\cdot(\nabla u-\nabla v)\,dx \geq 0$$

puisque l'intégrande est positive par monotonie de F. Donc A est monotone. □

Un exemple d'une telle fonction F est donné par $F(\lambda) = |\lambda|^{p-2}\lambda$. C'est la différentielle de la fonction $|\lambda|^p/p$.

8.3 Inéquations variationnelles

Les opérateurs monotones se prêtent bien à la résolution des inéquations variationnelles abstraites, dont nous donnerons des exemples concrets dans le contexte des problèmes aux limites non linéaires plus loin.

Théorème 94 *Soit $A\colon V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu et monotone et soit K un convexe fermé borné non vide de V. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle : trouver $u \in K$ tel que*

$$\forall v \in K, \qquad \langle A(u)-f, v-u\rangle \geq 0 \tag{8.3}$$

admet au moins une solution.

On utilise la méthode de Galerkin à travers une série de lemmes. Comme V est séparable, il existe une famille dénombrable de sous-espaces de dimension finie V_i tels que $V_i \subset V_{i+1}$ et $\cup_{i=1}^{+\infty} V_i$ est dense dans V. En fait, on peut prendre pour la construction de ces espaces une famille dénombrable w_i dense dans K. De cette façon, les convexes $K_i = K \cap V_i$ sont tels que $\cup_{i=1}^{+\infty} K_i$ est dense dans K.

Lemme 44 *L'inéquation variationnelle : trouver $u_i \in K_i$ tel que*

$$\forall v \in K_i, \qquad \langle A(u_i) - f, v - u_i \rangle \geq 0 \tag{8.4}$$

admet au moins une solution.

Démonstration. On munit V_i d'une structure euclidienne, dont on note le produit scalaire par $(\cdot|\cdot)_i$. Par le théorème de représentation de Riesz dans V_i, il existe une application linéaire continue J_i de V' faible dans V_i telle que

$$\forall g \in V', \forall v \in V_i, \qquad \langle g, v \rangle = (J_i g | v)_i.$$

Par définition, K_i est un convexe fermé, borné, non vide de V_i pour tout i. On introduit la projection orthogonale sur K_i, notée Π_i, par $\Pi_i(v) \in K_i$ et

$$\forall w \in K_i, \qquad (v - \Pi_i(v) | \Pi_i(v) - w)_i \geq 0. \tag{8.5}$$

C'est une application (non linéaire en général) continue de V_i dans K_i. On définit alors une application $T_i \colon K_i \to K_i$ par

$$\forall v \in K_i, \qquad T_i(v) = \Pi_i(v - JA(v) + Jf). \tag{8.6}$$

Comme A est continue de V fort dans V' faible par le lemme 43, on voit que T_i est continue comme composée d'applications continues. D'après le théorème de Brouwer, T_i admet au moins un point fixe $u_i \in K_i$. En particulier, d'après (8.5) et (8.6), on a pour tout $v \in K_i$,

$$(u_i - JA(u_i) + Jf - T_i(u_i) | T_i(u_i) - v)_i \geq 0,$$

soit, comme u_i est un point fixe,

$$\langle f - A(u_i), u_i - v \rangle = (Jf - JA(u_i) | u_i - v)_i \geq 0,$$

par définition de l'application J. □

Notons que la monotonie ne joue pratiquement aucun rôle dans l'existence d'une solution de l'inéquation variationnelle en dimension finie (elle n'intervient que pour la continuité de A). Le lemme 44 donne l'existence d'une telle solution si V est de dimension finie, sans autre hypothèse sur A que la continuité.

Comme $K_i \subset K$, qui est borné, la suite u_i est bornée dans V. Comme A est bornée, la suite $A(u_i)$ est bornée dans V'. On extrait une sous-suite telle que $u_i \rightharpoonup u$ dans V faible et $A(u_i) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible. De plus, comme K est convexe fermé, $u \in K$.

Lemme 45 *On a l'inégalité* $\liminf \langle A(u_i), u_i \rangle \geq \langle \xi, u \rangle$.

Démonstration. Utilisons la monotonie de A. Pour tout v dans V, il vient

$$\langle A(u_i) - A(v), u_i - v \rangle \geq 0,$$

soit en développant le crochet de dualité

$$\langle A(u_i), u_i \rangle - \langle A(u_i), v \rangle - \langle A(v), u_i \rangle + \langle A(v), v \rangle \geq 0. \tag{8.7}$$

Or, grâce aux convergences faibles, $\langle A(u_i), v \rangle \to \langle \xi, v \rangle$ et $\langle A(v), u_i \rangle \to \langle A(v), u \rangle$. Par conséquent, en passant à la limite inférieure dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\liminf \langle A(u_i), u_i \rangle - \langle \xi, v \rangle - \langle A(v), u \rangle + \langle A(v), v \rangle \geq 0,$$

d'où le résultat en prenant $v = u$. $\square$

Lemme 46 *On a aussi l'inégalité* $\limsup \langle A(u_i), u_i \rangle \leq \langle \xi, u \rangle$.

Démonstration. On utilise cette fois l'inéquation variationnelle en dimension finie (8.4). Soit $v_0 \in K_{i_0}$. Pour tout $i \geq i_0$, $K_{i_0} \subset K_i$, donc

$$\langle A(u_i) - f, v_0 - u_i \rangle \geq 0,$$

soit

$$-\langle A(u_i), u_i \rangle - \langle f, v_0 \rangle + \langle f, u_i \rangle + \langle A(u_i), v_0 \rangle \geq 0. \tag{8.8}$$

Passant à la limite inférieure dans cette inégalité, on obtient

$$-\limsup \langle A(u_i), u_i \rangle - \langle f, v_0 \rangle + \langle f, u \rangle + \langle \xi, v_0 \rangle \geq 0,$$

et cette inégalité a lieu pour tout $v_0 \in K_{i_0}$. Or, comme la réunion des K_{i_0} pour $i_0 \geq 1$ est dense dans K, on peut prendre une suite v_{i_0} qui tend vers u. Passant à la limite sur cette suite, on obtient le lemme. $\square$

Lemme 47 *On a* $\langle A(u_i), u_i\rangle \to \langle \xi, u\rangle$, $A(u) = \xi$ *et* u *est solution de l'inéquation variationnelle* (8.3).

Démonstration. La convergence provient immédiatement des lemmes 45 et 46. Reprenant alors l'inégalité de monotonie (8.7), il vient

$$\langle \xi, u\rangle - \langle \xi, v\rangle - \langle A(v), u\rangle + \langle A(v), v\rangle \geq 0,$$

soit

$$\langle \xi - A(v), u - v\rangle \geq 0,$$

pour tout v dans V. On applique alors l'astuce de Minty pour en déduire que $\xi = A(u)$. Reprenant l'inégalité (8.8) et passant à la limite en i, on voit donc que pour tout v dans $\cup_{i=1}^{+\infty} K_i$,

$$-\langle A(u), u\rangle - \langle f, v\rangle + \langle f, u\rangle + \langle A(u), v\rangle \geq 0,$$

soit

$$\langle A(u) - f, v - u\rangle \geq 0,$$

d'où le résultat par densité de $\cup_{i=1}^{+\infty} K_i$ dans K. □

Remarque 72 Notons la difficulté essentielle : la suite u_i converge faiblement, mais l'opérateur A est non linéaire. Il n'y a donc aucune raison en général pour que $A(u_i)$ tende en aucun sens vers $A(u)$. Il est remarquable que l'astuce de Minty et la monotonie permettent à elles seules ce passge à la limite quand u_i est solution de l'inéquation variationnelle sur une suite de convexes dont la réunion est dense dans K. □

Théorème 95 *Si* A *est strictement monotone alors la solution de l'inéquation variationnelle* (8.3) *est unique.*

Démonstration. Soient $u_1, u_2 \in K$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in K$,

$$\langle A(u_1) - f, v_1 - u_1\rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle A(u_2) - f, v_2 - u_2\rangle \geq 0.$$

On prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$, d'où

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle \leq 0.$$

Par conséquent, comme A est monotone,

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0,$$

d'où $u_1 = u_2$ par stricte monotonie. □

Pour traiter le cas d'un convexe K non borné, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire.

Définition 14 *On dit que A est coercif s'il existe $v_0 \in K$ ($v_0 = 0$ si $K = V$) tel que*

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle A(v), v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} = +\infty. \tag{8.9}$$

Théorème 96 *Soit $A\colon V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif et soit K un convexe fermé non vide de V. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle* (8.3) *admet au moins une solution.*

Démonstration. Pour $R > 0$, on pose $K_R = \{v \in K; \|v\|_V \leq R\}$. C'est un convexe fermé borné de V, non vide si R est assez grand. Grâce au théorème 94, il existe au moins une solution u_R à l'inéquation sur K_R. En particulier, on peut prendre R assez grand pour que $v_0 \in K_R$ et donc

$$\langle A(u_R) - f, v_0 - u_R \rangle \geq 0,$$

soit

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle \leq \langle f, u_R - v_0 \rangle \leq \|f\|_{V'}(\|u_R\|_V + \|v_0\|_V).$$

Montrons que u_R reste bornée dans V indépendamment de R. Divisant la dernière inégalité par $\|u_R\|_V$ (que l'on suppose non nul, sinon il n'y a rien à montrer), il vient

$$\frac{\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle}{\|u_R\|_V} \leq \|f\|_{V'} \Big(1 + \frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V}\Big).$$

Supposons qu'il existe une suite $R_n \to +\infty$ telle que $\|u_{R_n}\|_V \to +\infty$. Alors on a $\|v_0\|_V / \|u_{R_n}\|_V \to 0$ et l'inégalité ci-dessus contredit la coercivité. Il existe donc une constante C telle que $\|u_R\|_V \leq C$ pour tout R.

On prend maintenant $R = C + 1$. Montrons que u_R est alors solution de l'inéquation variationnelle (8.3). Pour tout $v \in K$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda v + (1-\lambda)u_R$ appartient à K. De plus,

$$\|\lambda v + (1-\lambda)u_R\|_V \leq \lambda \|v\|_V + (1-\lambda)\|u_R\|_V \leq \lambda \|v\|_V + C.$$

En particulier, si l'on prend $0 < \lambda \leq 1/\|v\|_V$, on voit que $\lambda v + (1-\lambda)u_R$ appartient à K_R. Donc, par l'inéquation variationnelle sur K_R,

$$\langle A(u_R) - f, \lambda v + (1-\lambda)u_R - u_R \rangle \geq 0,$$

soit

$$\lambda \langle A(u_R) - f, v - u_R \rangle \geq 0,$$

d'où le résultat en divisant par λ. $\square$

Corollaire 97 *Soit $A\colon V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.*

Démonstration. On prend $K = V$. Pour tout $f \in V'$, il existe donc $u \in V$ tel que, pour tout v dans V, on a

$$\langle A(u) - f, v - u\rangle \geq 0.$$

Prenant $v = u + w$, on en déduit que pour tout w dans V

$$\langle A(u) - f, w\rangle \geq 0,$$

d'où, comme cette inégalité a aussi lieu pour $-w$,

$$\langle A(u) - f, w\rangle \leq 0,$$

d'où $A(u) = f$ et A est surjectif. □

8.4 Exemples d'inéquations variationnelles

Reprenons l'exemple de la proposition 24. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in \,]1, +\infty[$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et monotone qui satisfait la condition de croissance

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \qquad |F(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|^{p-1})$$

pour une certaine constante C. On suppose en outre qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \qquad F(\lambda)\cdot\lambda \geq \alpha|\lambda|^p.$$

Théorème 98 *Pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que*

$$-\mathrm{div}\,(F(\nabla u)) = f \text{ au sens de } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Si F est strictement monotone, cette solution est unique.

Démonstration. Il nous reste à montrer que l'opérateur $A(v) = -\mathrm{div}\,(F(\nabla v))$ est coercif. On prend comme norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la norme L^p du gradient. Il vient

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|} = \frac{\int_\Omega F(\nabla v)\cdot\nabla v\,dx}{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}} \geq \alpha\|\nabla v\|^{p-1}_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \longrightarrow +\infty$$

quand $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \to +\infty$. □

Remarque 73 Pour $F(\lambda) = |\lambda|^{p-2}\lambda$, on retrouve le théorème d'existence et d'unicité déjà obtenu par les méthodes du calcul des variations. □

Donnons maintenant des exemples où le convexe K n'est pas l'espace tout entier. Une classe importante de problèmes est constituée par les problèmes d'*obstacle*, dont le prototype est défini par la donnée d'une fonction ψ mesurable sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On pose alors

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \psi \text{ presque partout dans } \Omega\}.$$

Cet ensemble est visiblement convexe. Montrons qu'il est fermé. Soit $v_n \in K$ une suite telle que $v_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$. On peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout, et donc $v \geq \psi$ presque partout, *i.e.*, $v \in K$. On a donc par exemple le théorème suivant.

Théorème 99 *Supposons que ψ est telle que K soit non vide. Alors pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq \psi$ presque partout, tel que*

$$\langle -\Delta u - f, v - u \rangle \geq 0$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq \psi$ presque partout.

Remarque 74 Pour interpréter cette inéquation variationnelle, plaçons nous dans le cas unidimensionnel, $N = 1$, avec $\psi \in H_0^1(\Omega)$. À cause des injections de Sobolev, toutes les fonctions qui interviennent sont continues et l'ensemble $E = \{x \in \Omega; u(x) > \psi(x)\}$ est un ouvert, donc une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Soit I un tel intervalle. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I)$, il existe ε tel que $v = u \pm \varepsilon\varphi \in K$. Par conséquent, $-u'' = f$ sur I, donc sur E. En dehors de E, $u = \psi$. Dans le cas où $f = 0$, on voit que u est affine sur chaque composante connexe de E et égale à ψ ailleurs. Le graphe de u réalise donc l'(unique) forme que prend un fil dont on fixe les deux extrémités et que l'on tend au maximum au dessus d'un obstacle constitué par le graphe de ψ, d'où la dénomination de ce type de problèmes. □

Donnons un autre exemple, qui intervient dans le problème de la torsion élasto-plastique d'une poutre. On se donne Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est la section de la poutre) et le convexe

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); |\nabla v| \leq 1 \text{ presque partout dans } \Omega\},$$

avec l'opérateur $A(v) = -\Delta v$ et $f = 1$. La solution u de ce problème fait apparaître deux régions, celle où $|\nabla u| < 1$, où le matériau reste élastique, et celle où $|\nabla u| = 1$, où apparaissent des phénomènes de plasticité.

8.5 Opérateurs pseudo-monotones

Les opérateurs monotones généralisent les gradients de fonctionnelles convexes. Néanmoins, en observant la démonstration d'existence de solution d'une inéquation variationnelle, on s'aperçoit que l'on peut encore franchir un pas dans l'abstraction, donc dans la généralité, en exhibant les ingrédients qui sont vraiment essentiels dans les démonstrations de convergence pour la méthode de Galerkin (on a déjà vu que l'existence en dimension finie n'avait rien à voir avec la monotonie). Une telle généralisation n'a bien sûr d'intérêt que si elle trouve des applications et nous reviendrons plus loin sur ce point. On est donc amenés à introduire les définitions suivantes.

Définition 15 i) *On dit que* $A\colon V \to V'$ *est de type M si*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ A(u_n) \rightharpoonup \xi \text{ dans } V' \text{ faible} \\ \limsup \langle A(u_n), u_n\rangle \le \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi = A(u). \tag{8.10}$$

ii) *On dit que A est pseudo-monotone* (*au sens* 1) *si*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ A(u_n) \rightharpoonup \xi \text{ dans } V' \text{ faible} \\ \limsup \langle A(u_n), u_n\rangle \le \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi = A(u) \text{ et } \langle A(u_n), u_n\rangle \to \langle A(u), u\rangle. \tag{8.11}$$

iii) *On dit que A est pseudo-monotone* (*au sens* 2) *si*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ \limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle \le 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall v \in V,\ \liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \ge \langle A(u), u - v\rangle. \tag{8.12}$$

Remarque 75 La définition i) est utile pour les équations ($K = V$) et les définitions ii) et iii) pour les inéquations ($K \neq V$). Pour la définition iii), on peut se restreindre à $v \in K$. □

Les deux définitions de pseudo-monotonie sont essentiellement équivalentes. Plus précisément,

Proposition 25 *Si A est borné, alors A est pseudo-monotone au sens* 1 *si et seulement si il est pseudo-monotone au sens* 2.

Démonstration. Supposons d'abord que A soit pseudo-monotone au sens 2 (mais pas nécessairement borné). Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$, $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ et $\limsup\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$. On en déduit que

$$\limsup\langle A(u_n), u_n - u\rangle = \limsup(\langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(u_n), u\rangle) \leq 0.$$

Donc, par pseudo-monotonie au sens 2, il vient que pour tout $v \in V$,

$$\liminf\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle,$$

d'où en développant le crochet de gauche,

$$\liminf\langle A(u_n), u_n\rangle - \langle \xi, v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Prenant $v = u$, on en déduit que $\liminf\langle A(u_n), u_n\rangle \geq \langle \xi, v\rangle$, d'où $\langle A(u_n), u_n\rangle \to \langle \xi, u\rangle$, et en reportant dans l'inégalité ci-dessus,

$$\langle \xi, u - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Prenant $v = u + w$, on en déduit que $\xi = A(u)$ et que A est pseudo-monotone au sens 1.

Supposons maintenant que A soit pseudo-monotone au sens 1 et borné. Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$. Soit $v \in V$. Comme A est borné, on peut extraire une sous-suite telle que

$$A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi \quad \text{et} \quad \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \to \liminf\langle A(u_n), u_n - v\rangle.$$

Comme $\langle A(u_{n'}), u\rangle \to \langle \xi, u\rangle$, on a d'abord $\limsup\langle A(u_{n'}), u_{n'}\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$. Donc, par pseudo-monotonie au sens 1, il vient que $\xi = A(u)$ et $\langle A(u_{n'}), u_{n'}\rangle \to \langle A(u), u\rangle$. On voit donc que

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \to \langle A(u), u - v\rangle,$$

donc A est pseudo-monotone au sens 2. □

Remarque 76 Remarquons que si A est pseudo-monotone au sens 1, alors A est trivialement de type M. De plus, la pseudo-monotonie est une généralisation de la monotonie. □

Théorème 100 *Si A est hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone au sens* 1.

Démonstration. Soit A un opérateur hémicontinu monotone et soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$, $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ et $\limsup\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$. Comme

$$\langle A(u_n) - A(u), u_n - u\rangle \geq 0,$$

il vient en développant

$$\langle A(u_n), u_n\rangle \geq \langle A(u_n), u\rangle + \langle A(u), u_n - u\rangle.$$

Le membre de droite converge vers $\langle \xi, u\rangle$. Par conséquent, en passant à la limite inférieure, on obtient

$$\liminf\langle A(u_n), u_n\rangle \geq \langle \xi, u\rangle,$$

d'où

$$\langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle \xi, u\rangle.$$

Pour montrer que $\xi = A(u)$, on utilise encore l'astuce de Minty. Pour tout $w \in V$,

$$\langle A(u_n) - A(w), u_n - w\rangle \geq 0,$$

d'où en développant, puis passant à la limite,

$$\langle \xi - A(w), u - w\rangle \geq 0.$$

Prenons $w = u + tv$ avec $t > 0$. Il vient

$$-t\langle \xi, v\rangle + t\langle A(u + tv), v\rangle \geq 0.$$

Divisant par t puis faisant tendre t vers 0, on obtient par hémicontinuité

$$\langle A(u), v\rangle \geq \langle \xi, v\rangle,$$

pour tout v dans V, d'où $A(u) = \xi$. □

Donnons maintenant les théorèmes d'existence.

Théorème 101 *Tout opérateur A de type M borné et coercif est surjectif.*

Démonstration. On utilise la méthode de Galerkin. Montrons d'abord que A est continu de V fort dans V' faible. Soit donc une suite $v_n \to v$ fortement. Comme $A(v_n)$ est borné, on peut extraire une sous-suite $v_{n'}$ telle que $A(v_{n'}) \rightharpoonup \zeta$ faiblement. On a donc $\langle A(v_{n'}), v_{n'}\rangle \to \langle \zeta, v\rangle$ et comme A est de type M, on en déduit que $\zeta = A(v)$. On conclut par unicité de la limite.

Grâce à la coercivité, on démontre facilement l'existence en dimension finie par la variante du théorème de Brouwer 26, *i.e.*, pour tout $f \in V'$ il existe $u_i \in V_i$ tel que pour tout $v \in V_i$

$$\langle A(u_i), v\rangle = \langle f, v\rangle. \tag{8.13}$$

En particulier,

$$\langle A(u_i), u_i\rangle = \langle f, u_i\rangle.$$

De plus, toujours grâce à la coercivité, la suite u_i est bornée. La suite $A(u_i)$ est donc aussi bornée, et l'on peut supposer que $u_i \rightharpoonup u$ et $A(u_i) \rightharpoonup \xi$. Passant à la limite dans la dernière égalité, on voit que

$$\langle A(u_i), u_i\rangle \to \langle f, u\rangle. \tag{8.14}$$

D'autre part, d'après (8.13), pour tout v dans $\cup V_i$, on a

$$\langle f, v\rangle = \langle A(u_i), v\rangle \to \langle \xi, v\rangle.$$

Donc, par densité, pour tout v dans V, on a

$$\langle f, v\rangle = \langle \xi, v\rangle,$$

soit $\xi = f$. Combinant cette relation avec (8.14), il vient

$$\langle A(u_i), u_i\rangle \to \langle \xi, u\rangle,$$

et comme A est de type M, on obtient finalement $\xi = A(u) = f$. $\square$

On démontre un résultat analogue pour les inéquations variationnelles.

Théorème 102 *Soit K un convexe fermé non vide de V et $A\colon V \to V'$ un opérateur pseudo-monotone borné* (*coercif si K est non borné*)*. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle* (8.3) *admet au moins une solution.*

Remarque 77 Si A est pseudo-monotone borné, alors A est hémicontinu. En effet, il est de type M et on vient de voir que tout opérateur de type M borné est continu de V fort dans V' faible. Cette continuité entraîne trivialement l'hémicontinuité. $\square$

8.6 Exemples, les opérateurs de Leray-Lions

On travaille dans les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que

i) F est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, continue par rapport à $(s, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
ii) Il existe $k \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante C tels que

$$\forall (x, s, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \qquad |F(x, s, \lambda)| \le k(x) + C(|s|^{p-1} + |\lambda|^{p-1}),$$

iii) Pour x et s fixés, F est monotone par rapport à λ,
iv) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x, s, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \qquad F(x, s, \lambda) \cdot \lambda \ge \alpha |\lambda|^p.$$

Théorème 103 *L'opérateur* $A(u) = -\operatorname{div}(F(x,u,\nabla u))$ *est borné, pseudo-monotone et coercif de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Cette famille d'opérateurs contient ce qu'on appelle les opérateurs de Leray-Lions.

Démonstration. Grâce à la condition de croissance ii), l'opérateur A agit bien entre ces deux espaces par

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\cdot \nabla v(x)\,dx.$$

De plus, par le théorème de Carathéodory, il est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ fort dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ fort et borné. Enfin, il est visiblement coercif par la condition iv).

Montrons que A est pseudo-monotone au sens 1. Soit donc une suite $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$, $-\operatorname{div}(F(x,u_n,\nabla u_n)) \rightharpoonup \xi$ et $\limsup \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \nabla u_n\,dx \le \langle \xi, u\rangle$. Par la condition de croissance ii), $F(x,u_n,\nabla u_n)$ est borné dans $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Nous pouvons donc extraire une sous-suite (toujours notée u_n) telle que

$$F(x,u_n,\nabla u_n) = g_n \rightharpoonup g \text{ dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N),$$

et il vient immédiatement

$$\xi = -\operatorname{div} g.$$

Par hypothèse, on a donc

$$\limsup \int_\Omega g_n\cdot \nabla u_n\,dx \le \int_\Omega g\cdot \nabla u\,dx. \tag{8.15}$$

Utilisons maintenant la monotonie de F par rapport à sa troisième variable. Pour tout ϕ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ (notons que ϕ n'est pas forcément un gradient), on a

$$\int_\Omega [F(x,u_n,\nabla u_n) - F(x,u_n,\phi)]\cdot[\nabla u_n - \phi]\,dx \ge 0,$$

soit

$$\int_\Omega g_n\cdot \nabla u_n\,dx - \int_\Omega g_n\cdot \phi\,dx - \int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n - \phi]\,dx \ge 0. \tag{8.16}$$

Par le théorème de Rellich-Kondrašov, $u_n \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et nous pouvons donc extraire une autre sous-suite telle que $u_n \to u$ presque partout dans Ω et est dominée par une fonction de $L^p(\Omega)$. Comme F est continue par rapport à s et satisfait la condition de croissance ii), on déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$F(x,u_n,\phi) \longrightarrow F(x,u,\phi) \text{ dans } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \text{ fort.}$$

Par conséquent

$$\int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n-\phi]\,dx \longrightarrow \int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]\,dx,$$
$$\int_\Omega g_n\cdot\phi\,dx \longrightarrow \int_\Omega g\cdot\phi\,dx,$$

si bien que, passant à la limite supérieure dans (8.16) et utilisant l'inégalité (8.15), on obtient

$$\int_\Omega g\cdot\nabla u\,dx-\int_\Omega g\cdot\phi\,dx-\int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]\,dx\geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega [g-F(x,u,\phi)]\cdot[\nabla u-\phi]\,dx\geq 0.$$

On applique alors l'astuce de Minty, encore une fois. Pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on prend $\phi=\nabla u+t\varphi$ avec $t>0$. Il vient

$$\int_\Omega [g-F(x,u,\nabla u+t\varphi)]\cdot\varphi\,dx\geq 0,$$

d'où, en faisant tendre t vers 0 et en utilisant le théorème de convergence dominée,

$$\int_\Omega [g-F(x,u,\nabla u)]\cdot\varphi\,dx\geq 0.$$

On en déduit que $g=F(x,u,\nabla u)$, c'est à dire $\xi=A(u)$.

Reprenons alors la monotonie de F.

$$\int_\Omega [F(x,u_n,\nabla u_n)-F(x,u_n,\nabla u)]\cdot[\nabla u_n-\nabla u]\,dx\geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,dx\geq\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u\,dx+\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx. \tag{8.17}$$

Comme précédemment,

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u)\cdot\nabla(u_n-u)\,dx\longrightarrow 0,$$
$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u\,dx\longrightarrow\int_\Omega g\cdot\nabla u\,dx=\int_\Omega F(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx,$$

par conséquent, passant à la limite inférieure dans (8.17), il vient

$$\liminf\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,dx\geq\int_\Omega F(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx=\langle A(u),u\rangle.$$

Par hypothèse

$$\limsup \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \nabla u_n\,dx \leq \langle \xi, u\rangle = \langle A(u), u\rangle,$$

puisque par l'étape précédente $\xi = A(u)$. Nous avons donc montré que

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \nabla u_n\,dx = \langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle A(u), u\rangle,$$

donc que A est pseudo-monotone au sens 1. □

Remarque 78 i) L'équation $-\mathrm{div}\,(F(x,u,\nabla u)) = f$ s'écrit, au moins formellement,

$$-\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}(x,u,\nabla u)\partial_{ik}u - \frac{\partial F_i}{\partial s}(x,u,\nabla u)\partial_i u - \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x,u,\nabla u) = f.$$

ii) On peut introduire les mêmes notions dans $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ pour traiter les systèmes. Il existe également une notion de fonction quasi-monotone qui généralise les gradients de fonctions quasi-convexes, tout comme les fonctions monotones généralisent les gradients de fonctions convexes. Néanmoins, on ne connaît pas d'analogue de la polyconvexité, qui permettrait de construire des fonctions quasi-monotones non triviales. □