

Chapitre 7

Calcul des variations et points critiques

Nous revenons aux problèmes semi-linéaires, vus sous l'angle du calcul des variations, non seulement en minimisant une fonctionnelle associée au problème comme au chapitre précédent, mais aussi en recherchant les points critiques. On rappelle que si $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle définie sur un espace de Banach V différentiable au sens de Fréchet, un *point critique* de J est un élément u de V qui annule la différentielle DJ de J et un *point régulier* de J est un point u tel que $DJ(u) \neq 0$. Une *valeur critique* de J est un nombre réel c tel qu'il existe $u \in V$ point critique de J tel que $J(u) = c$. Une valeur qui n'est pas critique est appelée *valeur régulière* de J . Tout point de l'image réciproque d'une valeur régulière est régulier. Naturellement, un point de minimum pour une telle fonctionnelle en est un point critique, mais il peut y en avoir d'autres. Enfin, pour montrer l'existence d'un point critique, il suffit manifestement d'exhiber une valeur critique.

7.1 Pourquoi rechercher des points critiques ?

Reprenons le problème semi-linéaire modèle du second chapitre qui consiste à trouver, étant donné Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et f une fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Il est clair que $|F(t)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|t|$. Associons à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx. \quad (7.1)$$

Proposition 21 *La fonctionnelle J est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. Sa différentielle est donnée par*

$$DJ(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(u)v dx. \quad (7.2)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que les deux intégrales de (7.1) sont bien définies pour $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour la deuxième d'entre elles, il suffit d'utiliser la majoration de F et le fait que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ puisque Ω est borné.

Montrons directement que J est différentiable au sens de Fréchet et que sa différentielle est donnée par (7.2). Comme la partie quadratique est trivialement C^1 , il suffit pour cela de montrer la différentiabilité de l'application $u \mapsto I(u) = \int_{\Omega} F(u) dx$. Il vient donc pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} I(u+v) - I(u) - \int_{\Omega} f(u)v dx &= \int_{\Omega} \left(\int_0^1 f(u+tv)v dt - f(u)v \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^1 (f(u+tv) - f(u)) dt \right) v dx. \end{aligned}$$

En effet, $\frac{d}{dt}(F(u+tv)) = f(u+tv)v$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit donc que

$$\left| I(u+v) - I(u) - \int_{\Omega} f(u)v dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^1 (f(u+tv) - f(u)) dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or, toujours par Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_0^1 (f(u+tv) - f(u)) dt \right)^2 \leq \int_0^1 (f(u+tv) - f(u))^2 dt.$$

Donc on a finalement obtenu l'estimation

$$\begin{aligned} \left| I(u+v) - I(u) - \int_{\Omega} f(u)v dx \right| &\leq \|f(u+tv) - f(u)\|_{L^2(\Omega \times [0,1])} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(u+tv) - f(u)\|_{L^2(\Omega \times [0,1])} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que pour toute suite v_n qui tend vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\|f(u+tv_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega \times [0,1])} \rightarrow 0$. On commence par extraire une sous-suite qui réalise la limite supérieure de cette suite et qui converge presque partout. Pour cette suite, on a $|f(u+tv_n) - f(u)|^2 \rightarrow 0$ presque partout dans $\Omega \times [0, 1]$ et $|f(u+tv_n) - f(u)|^2 \leq 4\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \in L^1(\Omega \times [0, 1])$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne donc le résultat.

Il n'est pas difficile pour finir de vérifier, toujours à l'aide du même type d'arguments, que l'application $u \mapsto DJ(u)$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans son dual $(H_0^1(\Omega))'$. \square

Remarque 59 i) On a fait montré que I est de classe C^1 sur $L^2(\Omega)$.

ii) On aurait pu aussi montrer que J est différentiable au sens de Gâteaux (c'est-à-dire sur les droites de la forme $u + tv$), comme on l'avait fait pour la démonstration du théorème 74, et ensuite montrer que sa différentielle au sens de Gâteaux est continue, ce qui implique la classe C^1 au sens de Fréchet. \square

Corollaire 84 *Tout point critique de J est solution du problème modèle et réciproquement.*

Démonstration. Soit u un point critique de J . Si l'on prend $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans l'égalité $DJ(u)v = 0$, on voit que u est solution du problème modèle au sens des distributions. Réciproquement, si u est une telle solution, c'est-à-dire $\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f(u), \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(u) \varphi \, dx,$$

et l'on conclut grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. \square

Remarque 60 Il est donc équivalent de résoudre le problème aux limites et de trouver des points critiques de J , c'est-à-dire en fait des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle J . Notons qu'a priori, J n'est pas convexe en raison du terme $u \mapsto I(u)$ qui n'est pas concave car f n'a aucune propriété de ce type. On peut donc avoir d'autres points critiques qu'un point de minimum, ainsi que d'autres valeurs critiques. \square

On va donc s'attacher à trouver des points critiques, ou ce qui est équivalent des valeurs critiques, pour des fonctionnelles J assez générales. Les applications seront typiquement des problèmes aux limites semi-linéaires.

7.2 La condition de Palais-Smale et le lemme d'Ekeland

Quand nous avons minimisé une fonctionnelle du calcul des variations, un ingrédient essentiel a été la compacité relative (pour une certaine topologie) des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non de valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 11 Soit V un espace de Banach et $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si de toute suite u_n de V telle que

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad DJ(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } V',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

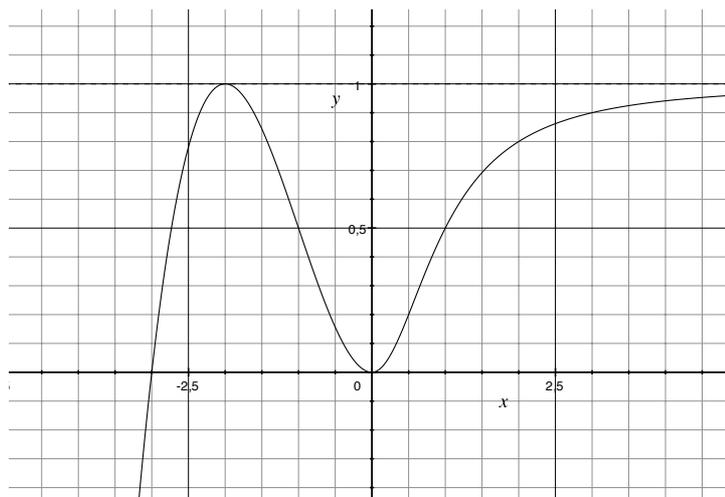
Remarque 61 i) La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite u_n , celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

ii) Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_V J$, on peut parfaitement avoir une suite minimisante u_n telle que $DJ(u_n) \not\rightarrow 0$. Il suffit de prendre $V = \mathbb{R}$, $J(u) = \sin u^2$, $c = -1$ et $u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi + \frac{1}{\sqrt{n2\pi}}\right)^{1/2}$. On a $J(u_n) \rightarrow -1$ et $J'(u_n) \rightarrow 2$.

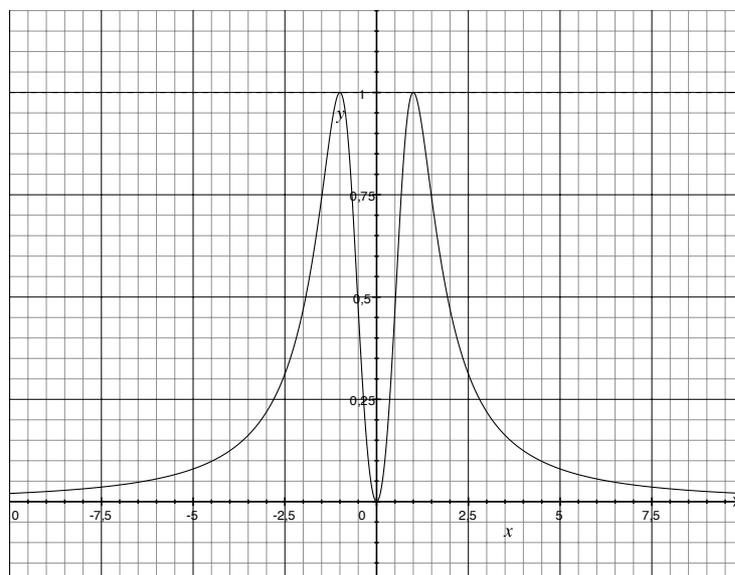
iii) Remarquons que la topologie est ici la topologie forte.

iv) On rencontre dans la littérature plusieurs variantes de la condition de Palais-Smale. □

Donnons quelques exemples. Tout d'abord, il est clair que la fonction $J(u) = e^u$ définie sur \mathbb{R} ne satisfait pas la condition de Palais-Smale pour $c = 0$. Par contre, elle la vérifie pour toute autre valeur réelle (puisque'il n'existe aucune suite qui vérifie les deux conditions dans ce cas). Il est instructif de regarder d'autres exemples en dimension finie.



Condition de Palais-Smale satisfaite au niveau $c = 0$ et pas en $c = 1$



Condition de Palais-Smale satisfaite au niveau $c = 1$ et pas en $c = 0$

Voici un exemple plus intéressant dans le contexte des EDP. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné et régulier et $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ l'opérateur qui à $f \in H_0^1(\Omega)$ associe la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f$, c'est-à-dire $T = (-\Delta)^{-1}$. En raison de la régularité elliptique $u \in H^3(\Omega)$ et le théorème de Rellich-Kondrašov implique que cet opérateur est compact (ce qui reste d'ailleurs vrai sans hypothèse de régularité sur l'ouvert). Par ailleurs

$$(Tu|v) = \int_{\Omega} \nabla Tu \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} uv dx = (u|Tv)$$

par la caractérisation variationnelle de ce problème aux limites, donc T est auto-adjoint, positif sur $H_0^1(\Omega)$. La théorie des opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert permet donc de dire que son spectre est formé de 0 et d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie qui tend vers 0 (voir Le Dret). Comme T est positif, les valeurs propres sont positives. On voit donc qu'il existe une suite $\lambda_k > 0$ qui tend vers $+\infty$ telle que pour $\lambda \neq \lambda_k$, l'opérateur $T_\lambda = (-\Delta)^{-1} - \frac{1}{\lambda} Id$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 22 Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, la fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega)$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 - \lambda u^2) dx - \int_{\Omega} f u dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale (pour tout niveau c) si $\lambda \neq \lambda_k$ et ne la satisfait pas si $\lambda = \lambda_k$.

Démonstration. Contrairement à l'habitude et de façon exceptionnelle, on va identifier le dual de $H_0^1(\Omega)$ avec $H_0^1(\Omega)$ lui-même par l'intermédiaire du produit scalaire (et non avec $H^{-1}(\Omega)$). On a

$$(DJ(u)|v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv) dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

c'est-à-dire que $DJ(u) \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} \nabla(DJ(u)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv) dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, soit en d'autres termes

$$-\Delta(DJ(u)) = -\Delta u - \lambda u - f,$$

soit encore

$$DJ(u) = u - \lambda(-\Delta)^{-1}u - (-\Delta)^{-1}f \in H_0^1(\Omega).$$

Donnons-nous une suite u_n telle que $DJ(u_n) \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (l'autre condition ne joue aucun rôle). Pour $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_k$ pour tout k , on a donc

$$DJ(u_n) = -\lambda \left((-\Delta)^{-1}u_n - \frac{1}{\lambda}u_n \right) - (-\Delta)^{-1}f = -\lambda T_{\lambda}u_n - (-\Delta)^{-1}f.$$

Comme on a vu que T_{λ} est un isomorphisme, il vient

$$u_n = -\frac{1}{\lambda}T_{\lambda}^{-1}(DJ(u_n) + (-\Delta)^{-1}f) \rightarrow -\frac{1}{\lambda}T_{\lambda}^{-1}((-\Delta)^{-1}f) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite. Pour $\lambda = 0$, on a $u_n = DJ(u_n) + (-\Delta)^{-1}f \rightarrow (-\Delta)^{-1}f$, d'où Palais-Smale également.

Supposons maintenant que $\lambda = \lambda_k$ pour un certain k et traitons le cas $f = 0$. Il existe une fonction propre associée $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ non nulle telle que $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$. La suite $u_n = n\varphi_k$ est telle que $J(u_n) = 0$, $DJ(u_n) = 0$, mais elle ne contient certainement aucune sous-suite convergente. \square

Remarque 62 Notons que dès que $\lambda > \lambda_1$, la fonctionnelle J n'est pas bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$ (considérer la suite $n\varphi_1$). Cela ne l'empêche pas de satisfaire la condition de Palais-Smale. \square

Passons à un exemple encore plus intéressant car nettement moins linéaire que le précédent.

Proposition 23 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ pour $N \geq 3$ et $1 < p < +\infty$ pour $N \leq 2$. Alors la fonctionnelle sur $H_0^1(\Omega)$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale (pour tout niveau c).

Démonstration. Sous les hypothèses faites sur p , on a $p+1 < 2^*$, l'exposant critique de Sobolev ($2^* = 2N/(N-2)$ pour $N \geq 3$), donc $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ et la fonctionnelle est bien définie sur $H_0^1(\Omega)$. On montre à l'aide d'arguments semblables à ceux déjà vus précédemment qu'elle est en fait de classe C^1 avec

$$DJ(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-1} uv dx,$$

soit en identifiant le dual de $H_0^1(\Omega)$ avec $H^{-1}(\Omega)$, comme d'habitude cette fois-ci,

$$DJ(u) = -\Delta u + |u|^{p-1}u.$$

Donnons-nous une suite u_n telle que $J(u_n) \rightarrow c$ et $DJ(u_n) \rightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme u_n appartient à $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} DJ(u_n)u_n &= \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx + \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \\ &= (p+1)J(u_n) - \frac{p-1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx. \end{aligned}$$

Or, par définition de la norme duale, on a

$$|DJ(u_n)u_n| \leq \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit donc l'estimation

$$\frac{p-1}{2} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (p+1)J(u_n) + \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

On voit donc que pour n assez grand pour que $J(u_n) \leq c+1$ et $\|DJ(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 1$, la quantité $X_n = \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ satisfait l'inégalité

$$\frac{p-1}{2} X_n^2 - X_n - (p+1)(c+1) \leq 0.$$

Comme $p-1 > 0$, on en déduit que X_n est bornée indépendamment de n , c'est-à-dire que u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Comme $p+1 < 2^*$, l'injection de Sobolev

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ est compact. On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée u_n) et trouver un $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_n \rightarrow u \text{ dans } L^{p+1}(\Omega).$$

Notant que si $v \in L^{p+1}(\Omega)$, on a trivialement $|v|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, et raisonnant comme pour la démonstration du théorème de Carathéodory, on s'aperçoit que

$$|u_n|^{p-1}u_n \rightarrow |u|^{p-1}u \text{ dans } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

Or l'exposant conjugué de $p+1$ n'est autre que $\frac{p+1}{p}$ et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, par dualité, il vient $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Finalement on a obtenu que

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n \rightarrow -|u|^{p-1}u \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

On a déjà noté que $(-\Delta)^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ ce qui montre que

$$u_n \rightarrow (-\Delta)^{-1}(-|u|^{p-1}u) \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite. \square

Remarque 63 On obtenu en fait une information supplémentaire qui est que $u = (-\Delta)^{-1}(-|u|^{p-1}u)$, soit encore $-\Delta u = -|u|^{p-1}u$. On pourrait penser avoir résolu ce problème semi-linéaire, mais en fait il n'en est rien puisqu'on n'a pas montré l'existence de la suite u_n ! En réalité, il en existe toujours une, qui n'est pas très passionnante, c'est $u_n = 0$. Pour faire dire quelque chose d'intéressant à cette proposition, il faudrait montrer l'existence d'une suite u_n avec $c \neq 0$ par exemple, puisque cela exclut que l'on puisse avoir $u = 0$. \square

Nous allons maintenant donner un lemme abstrait qui joue un grand rôle dans un certain nombre de situations faisant intervenir le calcul des variations, le lemme d'Ekeland (en anglais *Ekeland's variational principle*).

Lemme 37 Soit (X, d) un espace métrique complet et $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle s.c.i. bornée inférieurement sur X . Soit $c = \inf_X J$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que

$$\begin{cases} c \leq J(x_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \forall x \in X, x \neq x_\varepsilon, J(x) - J(x_\varepsilon) + \varepsilon d(x, x_\varepsilon) > 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Remarque 64 Remarquons tout de suite que le lemme d'Ekeland sous cette forme n'a d'intérêt que quand la borne inférieure n'est pas atteinte, ou à tout le moins quand on ne sait pas encore qu'elle est atteinte. En effet, si on sait qu'il existe un point de minimum, alors il suffit de prendre pour x_ε un tel point et les relations (7.3) sont trivialement satisfaites. \square

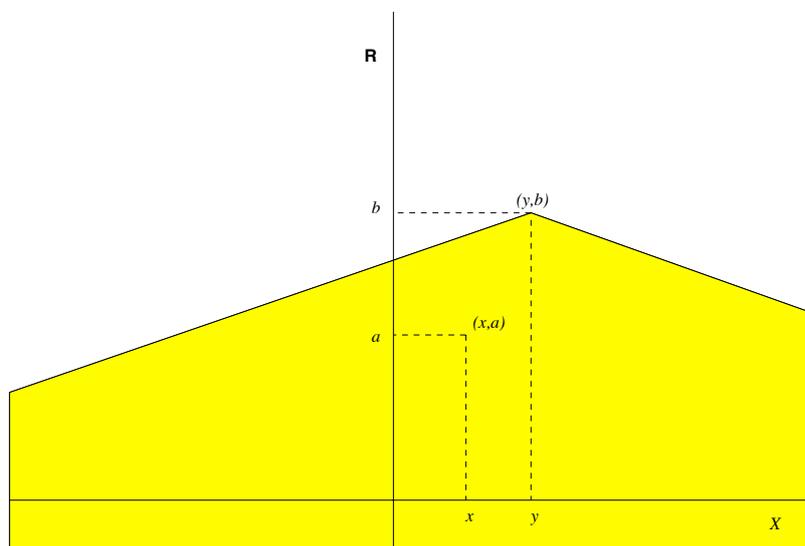
Démonstration. Soit

$$\text{Epi}J = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R}; J(x) \leq a\}$$

l'épigraphe de J , c'est-à-dire l'ensemble des points de $X \times \mathbb{R}$ situés « au dessus » du graphe de J . C'est un fermé de $X \times \mathbb{R}$ car J est s.c.i. On va introduire une relation d'ordre sur $X \times \mathbb{R}$ de la façon suivante. Nous dirons que $(x, a) \preceq (y, b)$ si et seulement si on a

$$\varepsilon d(x, y) \leq b - a. \quad (7.4)$$

C'est manifestement une relation d'ordre, *i.e.*, réflexive, transitive, et $(x, a) \preceq (y, b)$ et $(y, b) \preceq (x, a)$ impliquent $(x, a) = (y, b)$. C'est bien sûr une relation d'ordre partielle et nous allons construire une partie totalement ordonnée.



L'ensemble des (x, a) tels que $(x, a) \preceq (y, b)$

Choisissons un point $x_1 \in X$ tel que

$$c \leq J(x_1) \leq c + \varepsilon.$$

Un tel point existe par définition de ce qu'est une borne inférieure. On pose alors $a_1 = J(x_1)$ et

$$A_1 = \{(x, a) \in \text{Epi}J; (x, a) \preceq (x_1, a_1)\}.$$

C'est un fermé comme intersection de fermés, non vide car $(x_1, a_1) \in A_1$. On note P la projection canonique de $X \times \mathbb{R}$ sur X . Remarquons que si $x \in P(A_1)$, alors $c \leq J(x) \leq c + \varepsilon$. En effet, comme $A_1 \subset \text{Epi}J$, on a

$$J(x) \leq a \leq a_1 - \varepsilon d(x, x_1) \leq J(x_1).$$

On raisonne maintenant par récurrence. Supposons construite une suite (x_i, a_i) pour $i = 1, \dots, n$ telle que les ensembles non vides $A_i = \{(x, a) \in \text{Epi}J; (x, a) \preceq (x_i, a_i)\}$ soient emboîtés, c'est-à-dire $A_{i+1} \subset A_i$ pour $i \leq n-1$ et telle que posant $c_i = \inf_{x \in P(A_i)} J(x)$, on ait

$$0 \leq a_i - c_i \leq 2^{1-i}(a_1 - c_1).$$

Nous venons de voir que ceci est réalisable pour $n = 1$.

Premier cas : $c_n < a_n$. Dans ce cas, on choisit $x_{n+1} \in A_n$ tel que

$$0 \leq J(x_{n+1}) - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n),$$

(il en existe par définition de ce qu'est une borne inférieure) et l'on pose

$$a_{n+1} = J(x_{n+1}).$$

Trivialement, A_{n+1} est non vide, $A_{n+1} \subset A_n$ et l'on a $c \leq c_n \leq c_{n+1}$. On en déduit que

$$0 \leq a_{n+1} - c_{n+1} \leq a_{n+1} - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n) \leq \frac{1}{2^n}(a_1 - c_1),$$

ce qui établit la récurrence.

Deuxième cas : $c_n = a_n$. Dans ce cas, on prend $x_{n+1} = x_n$ et $a_{n+1} = a_n$, satisfaisant ainsi trivialement les conditions de la récurrence.

Nous allons maintenant montrer que le diamètre des ensembles A_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Soient donc $(x, a), (y, b) \in A_n$. On a $a \geq c_n$ et par définition de la relation d'ordre, il vient

$$\varepsilon d(x, x_n) \leq a_n - a \leq a_n - c_n \leq 2^{1-n}(a_1 - c_1),$$

et de même pour y , d'où par l'inégalité triangulaire

$$d(x, y) \leq \frac{1}{\varepsilon} 2^{2-n}(a_1 - c_1) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, comme $c_n \leq a, b \leq a_n$, on a aussi

$$|a - b| \leq 2^{2-n}(a_1 - c_1) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

d'où l'assertion sur les diamètres.

Nous avons donc construit une famille dénombrable de fermés non vides d'un espace métrique complet $X \times \mathbb{R}$, emboîtés et dont le diamètre tend vers 0. On en déduit que l'intersection de ces fermés est égale à un singleton, voir Le Dret,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{(x_\varepsilon, a_\varepsilon)\}.$$

Par construction, on a $(x_\varepsilon, a_\varepsilon) \in A_1$, d'où

$$c \leq J(x_\varepsilon) \leq a_\varepsilon \leq c + \varepsilon$$

comme on l'a déjà noté plus haut.

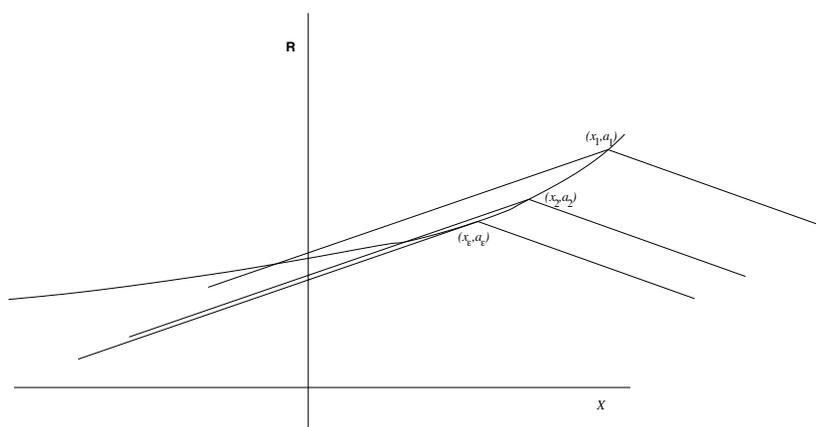
Montrons maintenant que le point $(x_\varepsilon, a_\varepsilon)$ est minimal dans $\text{Epi}J$ pour la relation d'ordre, c'est-à-dire que tout point qui lui est inférieur, lui est en fait égal. Soit donc $(y, b) \in \text{Epi}J$ tel que $(y, b) \preceq (x_\varepsilon, a_\varepsilon)$. Par construction, la famille (x_n, a_n) est totalement ordonnée. De plus, comme $(x_\varepsilon, a_\varepsilon) \in A_n$, il est clair que $(x_\varepsilon, a_\varepsilon) \preceq (x_n, a_n)$ pour tout n . Par transitivité de la relation d'ordre, on en déduit que $(y, b) \preceq (x_n, a_n)$ pour tout n . Comme $(y, b) \in \text{Epi}J$, ceci implique que $(y, b) \in A_n$ pour tout n . Mais l'intersection des A_n est réduite à $\{(x_\varepsilon, a_\varepsilon)\}$. Par conséquent, $(y, b) = (x_\varepsilon, a_\varepsilon)$ qui est la minimalité annoncée.

On en déduit qu'aucun point de $\text{Epi}J$ distinct de $\{(x_\varepsilon, a_\varepsilon)\}$ n'est inférieur à $\{(x_\varepsilon, a_\varepsilon)\}$, c'est-à-dire en particulier que si $x \neq x_\varepsilon$,

$$\varepsilon d(x_\varepsilon, x) > a_\varepsilon - J(x) \geq J(x_\varepsilon) - J(x),$$

ce qui termine la démonstration du lemme. \square

Remarque 65 Comme $x_n \rightarrow x_\varepsilon$, $a_n \rightarrow a_\varepsilon$ et $a_n = J(x_n)$, on en déduit que $a_\varepsilon = J(x_\varepsilon)$, c'est-à-dire que le point en question est situé sur le graphe de J . \square



Comment fonctionne la démonstration par l'image

Dans le cas d'une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach, le lemme d'Ekeland prend une forme plus frappante qui permet de mieux en apprécier la puissance.

Corollaire 85 Soit J une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach V minorée et $c = \inf_V J$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in V$ tel que

$$\begin{cases} c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \|DJ(u_\varepsilon)\|_{V'} \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (7.5)$$

Démonstration. Dans ce cas, la deuxième relation de (7.3) s'écrit

$$J(u) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon \|u - u_\varepsilon\| > 0$$

pour tout $u \neq u_\varepsilon$. Prenons $u = u_\varepsilon + tv$ avec $\|v\| = 1$ et $t > 0$, il vient

$$J(u_\varepsilon + tv) - J(u_\varepsilon) > -\varepsilon t,$$

d'où en divisant par t ,

$$-\frac{J(u_\varepsilon + tv) - J(u_\varepsilon)}{t} < \varepsilon.$$

Comme J est de classe C^1 , faisant tendre t vers 0, on en déduit que

$$-DJ(u_\varepsilon)v \leq \varepsilon,$$

puis en changeant v en $-v$ que

$$|DJ(u_\varepsilon)v| \leq \varepsilon,$$

pour tout $v \in V$ tel que $\|v\| = 1$, d'où le résultat par définition de la norme duale comme sup sur la sphère unité. \square

Remarque 66 Il est instructif de revoir l'exemple ii) de la remarque 61 à la lumière de cette version du lemme d'Ekeland. On peut le pimenter un peu en regardant $J(u) = \sin u^2 + \frac{1}{1+u^2}$. \square

Ce corollaire suggère immédiatement d'utiliser conjointement la condition de Palais-Smale et du lemme d'Ekeland.

Théorème 86 Soit J une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach V minorée et satisfaisant la condition de Palais-Smale. Alors J atteint son minimum.

Démonstration. C'est presque évident. On prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et le lemme d'Ekeland nous assure de l'existence d'une suite minimisante u_n telle que $DJ(u_n) \rightarrow 0$. Grâce à la condition de Palais-Smale, cette suite contient une sous-suite convergente, laquelle converge donc vers un point de minimum. \square

Notons une version « locale » des résultats précédents, assez frappante également.

Corollaire 87 Soit J une fonctionnelle sci minorée sur un espace métrique complet X avec $c = \inf_X J$ et soit $x_\varepsilon \in X$ tel que $c \leq J(x_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$. Alors il existe $\bar{x}_\varepsilon \in X$ tel que

$$\begin{cases} c \leq J(\bar{x}_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ d(\bar{x}_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq 2\sqrt{\varepsilon}, \\ \forall x \in X, x \neq \bar{x}_\varepsilon, J(x) - J(\bar{x}_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}d(x, \bar{x}_\varepsilon) > 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Démonstration. On reprend exactement la même démonstration que la première version du lemme d'Ekeland en modifiant légèrement la relation d'ordre comme suit :

$$(x, a) \preceq (y, b) \text{ si et seulement si } \sqrt{\varepsilon}d(x, y) \leq b - a. \quad (7.7)$$

On effectue alors la même construction en partant de $x_1 = x_\varepsilon$ et les estimations $\sqrt{\varepsilon}d(x, x_n) \leq 2^{1-n}(a_1 - c_1) \leq 2^{1-n}\varepsilon$ pour tout $x \in A_n$ permettent de déduire que $d(x_n, x_\varepsilon) = d(x_n, x_1) \leq 2(1 - 2^{-n})\sqrt{\varepsilon}$, d'où le résultat en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$. \square

Ici encore, ce résultat s'apprécie mieux en version différentielle.

Corollaire 88 Soit V un espace de Banach, J une fonctionnelle C^1 minorée sur un fermé F de V avec $c = \inf_F J$. Soit $u_\varepsilon \in F$ tel que $c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$. Alors il existe $\bar{u}_\varepsilon \in F$ tel que

$$\begin{cases} c \leq J(\bar{u}_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \|\bar{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_V \leq 2\sqrt{\varepsilon}, \\ \forall u \in F, u \neq \bar{u}_\varepsilon, J(u) - J(\bar{u}_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\|u - \bar{u}_\varepsilon\|_V > 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Si de plus, \bar{u}_ε est dans l'intérieur de F , alors

$$\|DJ(\bar{u}_\varepsilon)\|_{V'} \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (7.9)$$

Démonstration. La première partie n'est qu'une réécriture immédiate du corollaire 87 dans l'espace métrique complet F . La deuxième partie reprend le même argument que la démonstration du corollaire 85. \square

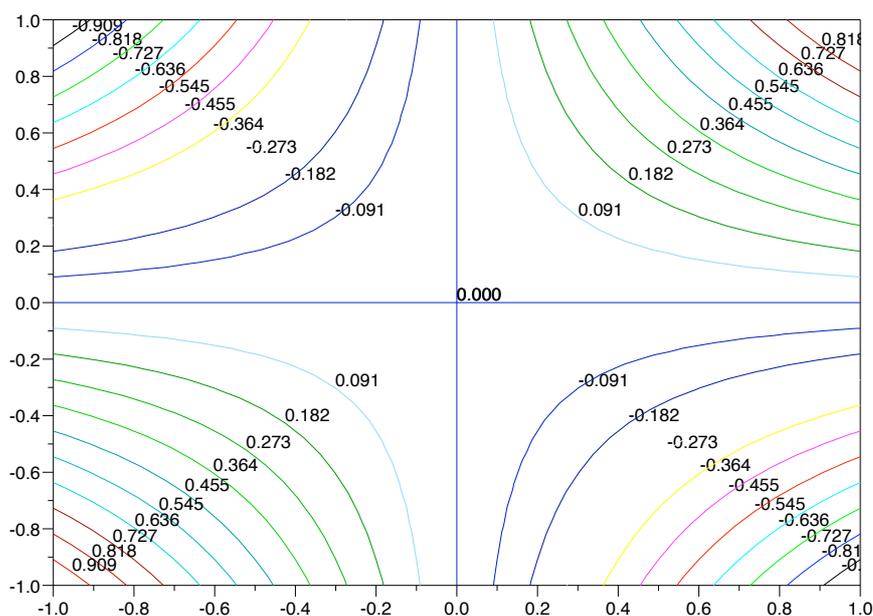
Remarque 67 Ce corollaire montre que si l'on se donne un point u_ε où J est presque minimisée, alors il existe très près de ce point, à distance de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, un autre point \bar{u}_ε où J est également presque minimisée (en fait prend une valeur inférieure) et qui annule presque la différentielle de J ! \square

7.3 Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col

Nous avons besoin d'un procédé de construction de valeurs critiques qui ne soient pas que des bornes inférieures. Nous allons utiliser les notations suivantes

$$\{J \leq c\} = \{u \in V; J(u) \leq c\}, \{J > c\} = \{u \in V; J(u) > c\}, \text{etc.}$$

La remarque cruciale concernant les valeurs critiques est que quelque chose change dans la nature topologique des ensembles $\{J \leq c\}$ quand c traverse une valeur critique. Ainsi, par exemple, quand $c = \min_V J$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\{J \leq c - \varepsilon\} = \emptyset$ alors que $\{J \leq c + \varepsilon\}$ n'est pas vide. De façon un peu plus subtile, si $V = \mathbb{R}^2$ et $J(x) = x_1 x_2$ avec la valeur critique $c = 0$, qui n'est pas un minimum, alors $\{J \leq -\varepsilon\}$ admet deux composantes connexes, tandis que $\{J \leq \varepsilon\}$ est connexe.



Les lignes de niveau de $J(x) = x_1 x_2$

On s'aperçoit en fait que les ensembles $\{J \leq -\varepsilon\}$ et $\{J \leq -\varepsilon'\}$ avec $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ sont homéomorphes, alors que les ensembles $\{J \leq -\varepsilon\}$ et $\{J \leq \varepsilon'\}$ ne le sont pas. Le lemme de déformation qui suit donne un contenu précis à cette observation.

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 159

Théorème 89 Soit V un espace de Banach et $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale. Soit $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de J . Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe un homéomorphisme $\eta: V \rightarrow V$ satisfaisant :

- i) Pour tout $u \in \{J \leq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\}$, on a $\eta(u) = u$,
- ii) On a $\eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$.

Démonstration. On ne va faire la démonstration que dans le cas où V est un espace de Hilbert et J est de classe C^2 . Comme V est un espace de Hilbert, on identifie V et V' par l'intermédiaire du produit scalaire et l'on confond donc différentielle et gradient.

Soit c une valeur régulière de J et montrons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\|DJ(u)\|_V \geq \delta$ pour tout $u \in \{c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0\}$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $u_n \in \{c - 1/n \leq J \leq c + 1/n\}$ telle que $\|DJ(u_n)\|_V \rightarrow 0$. Comme J satisfait la condition de Palais-Smale, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un certain u . Par continuité de J , il vient $J(u) = c$ et par continuité de DJ , il vient $DJ(u) = 0$, en d'autres termes, c est une valeur critique, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Prenons maintenant $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Les ensembles

$$A = \{J \leq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\} \text{ et } B = \{c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon\}$$

sont fermés et disjoints, donc la fonction

$$\gamma(u) = \frac{d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)}$$

est telle que $0 \leq \gamma(u) \leq 1$, $\gamma(u) = 0$ ssi $u \in A$ et $\gamma(u) = 1$ ssi $u \in B$ ($d(u,A) = \inf_{v \in A} \|u - v\|$ désigne la distance de u à l'ensemble A). De plus, cette fonction est localement lipschitzienne sur V . En effet, la fonction $u \mapsto d(u,A) + d(u,B)$ est localement minorée. Pour le voir, on remarque que si $u \in V \setminus B$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(u, 2r) \subset V \setminus B$ puisque B est fermé, donc $d(v,A) + d(v,B) \geq r$ sur la boule $B(u, r)$. Si $u \in B$, alors $u \in V \setminus A$ et le même raisonnement s'applique. Par conséquent, pour tout couple $v, w \in B(u, r)$, on a

$$\begin{aligned} |\gamma(v) - \gamma(w)| &\leq \frac{|d(v,A) - d(w,A)|}{d(v,A) + d(v,B)} + d(w,A) \left| \frac{1}{d(v,A) + d(v,B)} - \frac{1}{d(w,A) + d(w,B)} \right| \\ &\leq \frac{1}{r} |d(v,A) - d(w,A)| + \frac{\sup_{B(u,r)} d(w,A)}{r^2} [|d(v,A) - d(w,A)| \\ &\quad + |d(v,B) - d(w,B)|] \\ &\leq \left(\frac{1}{r} + \frac{2(d(u,A) + r)}{r^2} \right) \|v - w\|_V, \end{aligned}$$

puisque l'application $v \mapsto d(v,A)$ est 1-lipschitzienne.

Posons maintenant

$$\Phi(u) = -\gamma(u) \frac{DJ(u)}{\max(\|DJ(u)\|_V, \delta)}.$$

Cette application est bien définie de V dans V . On vérifie sans difficulté qu'elle est localement lipschitzienne (car DJ est de classe C^1) et telle que $\|\Phi(u)\|_V \leq 1$ pour tout u . De plus, on a $\Phi(u) = 0$ sur A (et $\Phi(u) = -DJ(u)/\|DJ(u)\|_V$ sur B).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \Phi(z), \\ z(0) = u, \end{cases}$$

admet pour tout $u \in V$ une solution unique $t \mapsto z(t)$ définie sur un intervalle $]t_{\min}, t_{\max}[$. Comme le second membre est borné, on a en fait $t_{\min} = -\infty$ et $t_{\max} = +\infty$. Posons $\eta_t(u) = z(t)$.

Le théorème de dépendance continue de la solution d'une EDO par rapport à la donnée initiale montre que η_t est localement lipschitzienne pour tout t . De plus, toujours par Cauchy-Lipschitz, on a la propriété de semi-groupe

$$\eta_t(\eta_s(u)) = \eta_{t+s}(u).$$

Il en découle que η_t est inversible et que son inverse est η_{-t} , qui est aussi localement lipschitzienne. On a ainsi montré que η_t est un homéomorphisme de V sur V pour tout t .

Remarquons maintenant que pour $u \in A$, on a $\eta_t(u) = u$ pour tout t puisque $\Phi(u) = 0$.

On va pour conclure choisir une valeur de t appropriée. Tout d'abord, on remarque que J est décroissante le long des trajectoires $\eta_t(u)$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\eta_t(u)) &= \left(DJ(\eta_t(u)) \left| \frac{d}{dt} \eta_t(u) \right. \right) = (DJ(\eta_t(u)) | \Phi(\eta_t(u))) \\ &= -\gamma(\eta_t(u)) \frac{\|DJ(\eta_t(u))\|_V^2}{\max(\|DJ(\eta_t(u))\|_V, \delta)} \leq 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $u \in \{J \leq c - \varepsilon\}$, on a $J(\eta_t(u)) \leq c - \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Or l'ensemble qui nous intéresse peut s'écrire $\{J \leq c + \varepsilon\} = \{J \leq c - \varepsilon\} \cup B$. Il suffit donc de s'intéresser à l'ensemble $\eta_t(B)$. Soit donc $u \in B$. Comme la fonction $t \mapsto J(\eta_t(u))$ est continue décroissante, il existe un premier instant $t_0 \geq 0$ (dépendant de u) tel que $J(\eta_{t_0}(u)) = c - \varepsilon$ (avec $t_0 = +\infty$ si on n'atteint jamais cette valeur). Donc, pour tout $0 \leq t \leq t_0$, on a $\eta_t(u) \in B$, d'où

$$\frac{d}{dt}J(\eta_t(u)) = -\|DJ(\eta_t(u))\|_V \leq -\delta.$$

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 161

Par conséquent, en intégrant cette inégalité, il vient

$$J(\eta_{t_0}(u)) - J(u) \leq -\delta t_0,$$

d'où

$$t_0 \leq \frac{1}{\delta} (J(u) - J(\eta_{t_0}(u))) \leq \frac{1}{\delta} (c + \varepsilon - (c - \varepsilon)) = \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

En d'autres termes, on a montré que pour $t = 2\varepsilon/\delta$, $\eta_t(B) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 68 i) On a démontré un peu plus que ce qui est affirmé dans le lemme de déformation : il s'agit non seulement d'un homéomorphisme, mais d'une homotopie (η_t dépend continûment de t).

ii) Il existe de nombreuses variantes du lemme de déformation. Par exemple, on peut imposer que $\eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) = \{J \leq c - \varepsilon\}$.

iii) Le lemme de déformation dépend de façon cruciale de la condition de Palais-Smale. Considérons la fonction $J(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $V = \mathbb{R}$. Elle ne satisfait pas la condition de Palais-Smale en $c = 0$. De plus, $c = 0$ est une valeur régulière, mais $\{J \leq \varepsilon\}$ n'est certainement pas homéomorphe à un sous-ensemble de $\{J \leq -\varepsilon\}$ car ce dernier est compact, alors que $\{J \leq \varepsilon\}$ ne l'est pas. \square

Dans le cas où V n'est pas un espace de Hilbert, on ne peut pas identifier V' et V et la démonstration, qui a besoin d'un champ de vecteurs dans V comme second membre de l'EDO ne fonctionne pas telle quelle. Même si V est un espace de Hilbert, mais J est seulement de classe C^1 , alors ce second membre n'est pas localement lipschitzien, et on ne peut donc pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans ces deux cas, on remplace dans la démonstration ci-dessus (définition de la fonction Φ) le gradient de J par un *pseudo-gradient*, dont nous indiquons brièvement la construction.

Définition 12 Soit V un espace de Banach et $J \in C^1(V; \mathbb{R})$. On dit que $v \in V$ est un pseudo-gradient de J en u si on a

$$\|v\|_V \leq 2\|DJ(u)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(u), v \rangle \geq \|DJ(u)\|_{V'}^2. \quad (7.10)$$

Soit V_r l'ensemble des points réguliers de J . Une application $v: V_r \rightarrow V$ est un champ de pseudo-gradient de J si elle est localement lipschitzienne et si pour tout u , $v(u)$ est un pseudo-gradient de J en u .

Remarquons que si V est un espace de Hilbert et J est de classe $C_{\text{loc}}^{1,1}$, alors DJ est un champ de pseudo-gradient, qui est en outre défini sur V tout entier. Cette définition fonctionne dans un cadre plus général.

Lemme 38 Soit V un espace de Banach et $J \in C^1(V; \mathbb{R})$. Il existe un champ de pseudo-gradient de J .

Démonstration. Soit $u \in V_r$. On va d'abord montrer l'existence d'un pseudo-gradient v_u en u . Pour cela, on note que, comme par définition de la norme duale, $\|DJ(u)\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} \langle DJ(u), v \rangle \neq 0$, il existe donc $w_u \in V$ tel que $\|w_u\|_V = 1$ et $\langle DJ(u), w_u \rangle > \frac{2}{3} \|DJ(u)\|_{V'}$. Posant alors $v_u = \frac{3}{2} \|DJ(u)\|_{V'} w_u$, il vient

$$\|v_u\|_V = \frac{3}{2} \|DJ(u)\|_{V'} < 2 \|DJ(u)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(u), v_u \rangle > \|DJ(u)\|_{V'}^2.$$

Comme les inégalités ci-dessus sont strictes, par continuité de DJ , il existe un ouvert Ω_u tel que pour tout $z \in \Omega_u$

$$\|v_u\|_V \leq 2 \|DJ(z)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(z), v_u \rangle \geq \|DJ(z)\|_{V'}^2.$$

En d'autres termes, v_u est un pseudo-gradient en tout point z de Ω_u . Remarquons que comme $v_u \neq 0$, $\Omega_u \subset V_r$ d'après la première inégalité ci-dessus. On a donc construit un recouvrement ouvert de $V_r = \cup_{u \in V_r} \Omega_u$ avec un pseudo-gradient v_u constant dans chaque Ω_u . Il s'agit de recoller ces vecteurs constants en un champ localement lipschitzien.

Pour cela, on utilise le fait que tout espace métrique est *paracompact*. Ceci signifie que tout recouvrement ouvert admet un raffinement ouvert localement fini. Dans notre contexte, ceci se traduit par l'existence d'un autre recouvrement ouvert de V_r , $\{\omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $u_\lambda \in V_r$ tel que $\omega_\lambda \subset \Omega_{u_\lambda}$ et pour tout point u de V_r , il existe un voisinage ouvert O de u tel que $O \cap \omega_\lambda = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices $\lambda \in \Lambda$, *i.e.*, on recouvre localement avec un nombre fini d'ouverts ω_λ .

Posons alors $\psi_\lambda(u) = d(u, V_r \setminus \omega_\lambda)$. Alors, ψ_λ est 1-lipschitzienne, le support de ψ_λ est exactement $\bar{\omega}_\lambda$ et ψ_λ est localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif dans ω_λ car si $B(u, r) \subset \omega_\lambda$, alors $\psi_\lambda \geq r$ sur $B(u, r)$. De plus, la somme $\sum_{\mu \in \Lambda} \psi_\mu$ est localement finie, donc localement lipschitzienne et localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif à cause du fait que $\{\omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est un recouvrement de V_r . Si l'on pose sur V_r ,

$$\theta_\lambda = \frac{\psi_\lambda}{\sum_{\mu \in \Lambda} \psi_\mu},$$

on voit ainsi que $0 \leq \theta_\lambda \leq 1$, $\sum_{\mu \in \Lambda} \theta_\mu = 1$, $\text{supp } \theta_\lambda = \bar{\omega}_\lambda$ et θ_λ est localement lipschitzienne (voir la démonstration du Théorème 89 pour le détail dans le cas de deux ensembles).

On peut maintenant définir

$$v(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda(u) v_{u_\lambda}.$$

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 163

Cette somme est localement finie, donc bien définie et localement lipschitzienne. En tout point u , c'est une combinaison convexe d'un nombre fini de pseudo-gradients en u . En effet, $\theta_\lambda(u) > 0$ si et seulement si $u \in \omega_\lambda$, avec $\omega_\lambda \subset \Omega_{u_\lambda}$, ensemble où v_{u_λ} est un pseudo-gradient (constant). Or il est clair que toute combinaison convexe de pseudo-gradients est un pseudo-gradient, ce qui termine la démonstration. \square

Le lemme de déformation permet donc d'avoir une caractérisation topologique des valeurs régulières exprimée seulement en termes des valeurs prises par la fonctionnelle et non à l'aide de sa différentielle. On le met en œuvre à travers le principe du min-max qui suit. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 > 0$, on introduit un ensemble d'homéomorphismes

$$D_c^{\varepsilon_0} = \{\eta \text{ homéomorphismes de } V \text{ satisfaisant la propriété i) du Théorème 89}\}$$

Théorème 90 Soit \mathcal{A} un ensemble de parties de V non vide et

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u).$$

On suppose que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c , que $c \in \mathbb{R}$ et qu'il existe α tel que \mathcal{A} soit stable par $D_c^{\varepsilon_0}$ pour tout $\alpha \geq \varepsilon_0 > 0$, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{A}$, alors $\eta(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$. Alors c est une valeur critique de J .

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que c soit une valeur régulière. Au vu de la façon dont est introduit le paramètre ε_0 du lemme de déformation, on peut toujours supposer que celui-ci est inférieur à α . Soit ε un valeur associée du lemme de déformation. Par définition d'une borne inférieure, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\sup_{u \in A} J(u) \leq c + \varepsilon,$$

soit encore $A \subset \{J \leq c + \varepsilon\}$. Par le lemme de déformation, il existe $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$ tel que $\eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, d'où a fortiori $A' = \eta(A) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, ce qui implique que $\sup_{u \in A'} J(u) \leq c - \varepsilon$. Or, par hypothèse, $A' \in \mathcal{A}$ ce qui contredit la définition de c en tant que borne inférieure. \square

Remarque 69 i) Si J vérifie la condition de Palais-Smale, $-J$ aussi. On a donc un résultat analogue pour les quantités

$$d = \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{u \in A} J(u).$$

ii) Si on prend $\mathcal{A} = \{\{u\}, u \in V\}$, alors on retrouve le fait qu'une fonctionnelle qui vérifie la condition de Palais-Smale et qui est minorée atteint sa borne inférieure.

iii) L'utilisation du principe du min-max dépend du choix de \mathcal{A} . On prend en général des classes d'ensembles qui partagent un même invariant topologique (genre, catégorie, classe d'homotopie, d'homologie, etc.) susceptible d'être conservé par le flot η_t . \square

Donnons une première application du principe du min-max, connue sous le nom de théorème du col.

Théorème 91 Soit $J \in C^1(V; \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que

- i) $J(0) = 0$,
 - ii) Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\|_V = R$ alors $J(u) \geq a$,
 - iii) Il existe $v \in V$, $\|v\|_V > R$, tel que $J(v) < a$.
- Alors J admet une valeur critique $c \geq a$.

Démonstration. On applique le principe du min-max avec

$$\mathcal{A} = \{\gamma([0, 1]); \gamma \in C^0([0, 1]; V), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

et $\alpha = \frac{1}{2} \min\{a, a - J(v), \varepsilon_0\} > 0$.

Soit γ un chemin continu reliant 0 à v et $A = \gamma([0, 1])$ l'élément de \mathcal{A} qui lui est associé. Comme la fonction $t \mapsto \|\gamma(t)\|_V$ est continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in [0, 1]$ tel que $\|\gamma(s)\|_V = R$. Par conséquent, $\sup_A J(u) \geq a$, ce qui implique que

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u) \geq a.$$

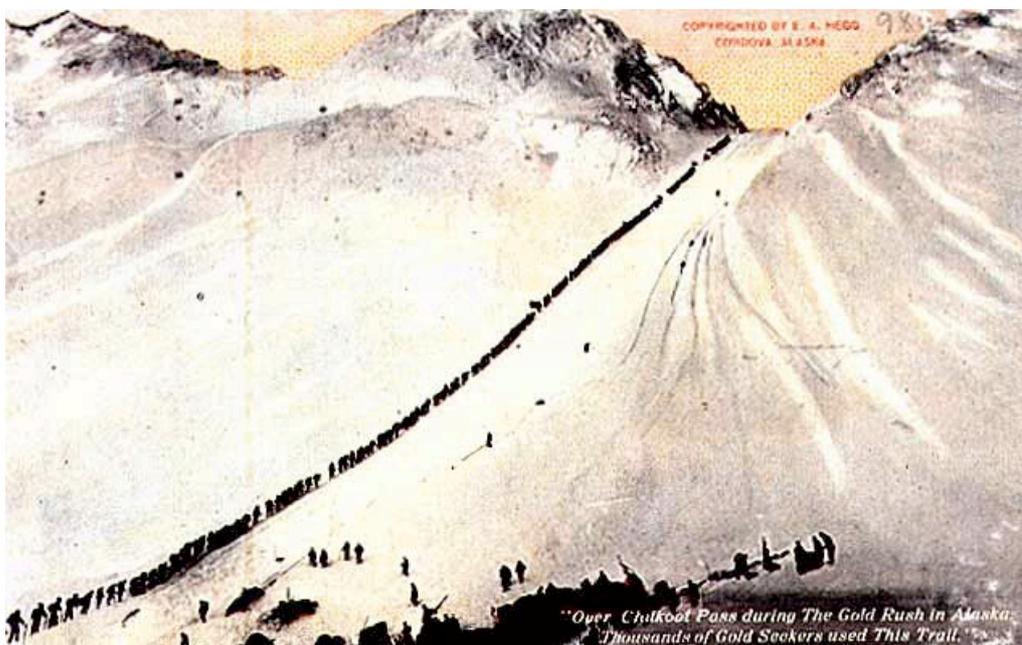
Par ailleurs, il est clair que $c < +\infty$ puisque l'image d'un chemin est compacte dans V .

Considérons maintenant un homéomorphisme η de D_c^α . Par construction, on a $J(0) = 0 \leq a - \alpha \leq c - \alpha$ et $J(v) = a + J(v) - a \leq a - \alpha \leq c - \alpha$, donc on a $\eta(0) = 0$ et $\eta(v) = v$ par définition de D_c^α . Par conséquent, $\eta \circ \gamma(0) = 0$ et $\eta \circ \gamma(1) = v$ ce qui équivaut à dire que $\eta(A) \in \mathcal{A}$. \square

Remarque 70 i) On comprend mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du col quand on interprète géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions i) à iii) dans le cas où $V = \mathbb{R}^2$ et $J(u)$ représente l'altitude dans \mathbb{R}^3 d'un point u . Les conditions i) et ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 165

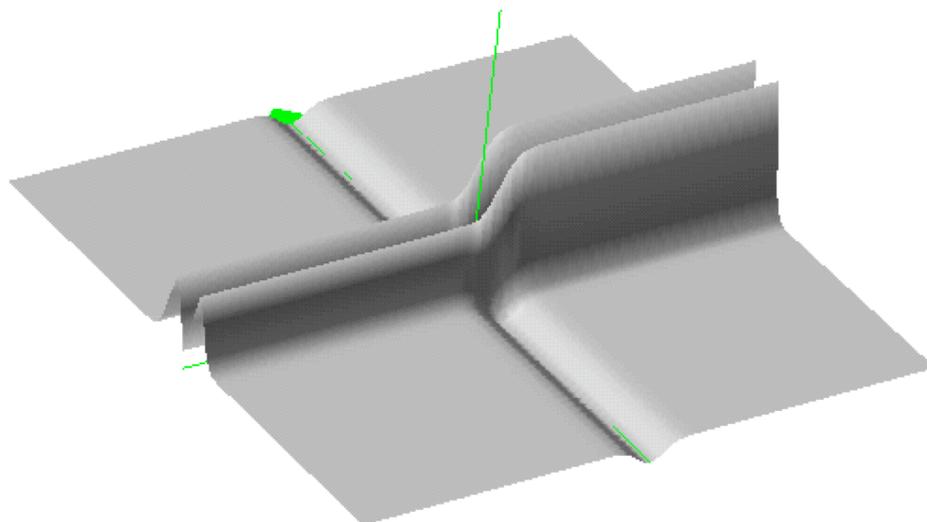
entourée de montagnes d'altitude au moins a . La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point v situé moins haut que lesdites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment 0 à v en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.



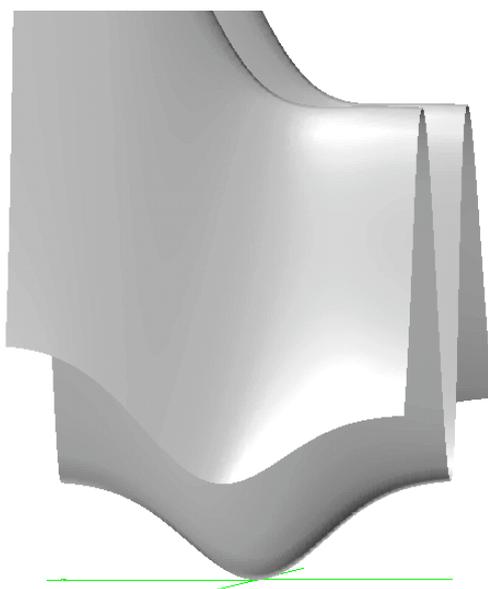
ii) Il faut toutefois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand $V = \mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand $V = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. On peut par exemple se convaincre que la fonction

$$J(x_1, x_2) = 10 \left(1 + \frac{1}{1 + e^{-2x_1}} \right) x_2^2 e^{-x_2^2} + 1 - e^{-x_1^2}$$

n'a qu'un seul point critique sur \mathbb{R}^2 , à savoir l'origine où $J = 0$, mais qu'elle présente une cuvette autour de 0 et des vallées au delà des montagnes qui entourent la cuvette (car $J(0, x_2) \rightarrow 0$ quand $x_2 \rightarrow \pm\infty$).

Graphe de J , vu de loin

Il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette, car les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment aussi le facteur qui empêche que J satisfasse la condition de Palais-Smale au niveau $c = 10e^{-1} + 1$ ici. \square

La cuvette de J , vue de près

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 167

Corollaire 92 Soit J satisfaisant la condition de Palais-Smale et admettant deux minima locaux stricts. Alors J admet un troisième point critique.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que le premier point de minimum local est 0 avec $J(0) = 0$, et notant u_2 le deuxième point de minimum, que $J(u_2) \leq 0$. On va montrer qu'en fait les hypothèses du théorème du col sont automatiquement satisfaites en 0.

Soit $r > 0$ tel que pour tout $u \in B(0, r) \setminus \{0\}$, on ait $J(u) > 0$. On note $S_{r/2}$ la sphère de rayon moitié. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\inf_{S_{r/2}} J = 0$. Il existe donc une suite v_n telle que

$$v_n \in S_{r/2} \quad \text{et} \quad J(v_n) \leq \frac{r^2}{16n^2}.$$

Appliquons le corollaire 88 sur le fermé $F = \bar{B}(0, r)$. On obtient alors une suite $\bar{v}_n \in \bar{B}(0, r)$ avec

$$\|\bar{v}_n - v_n\|_V \leq \frac{r}{2n} \quad \text{et} \quad J(\bar{v}_n) \leq \frac{r^2}{16n^2}.$$

Or, dès que $n > 1$, on voit que $\|\bar{v}_n\|_V \leq \frac{r}{2}(1 + \frac{1}{n}) < r$ si bien que \bar{v}_n appartient à l'intérieur de F . On en déduit que

$$\|DJ(\bar{v}_n)\|_{V'} \leq \frac{r}{4n}.$$

La suite v_n étant de Palais-Smale, elle admet une sous-suite convergente vers un certain \bar{v} qui est manifestement tel que $\bar{v} \in S_{r/2}$ et $J(\bar{v}) = 0$, ce qui contredit le fait que 0 est un minimum strict dans cette boule.

On a donc $\inf_{S_{r/2}} J = a > 0$ et l'on peut appliquer le théorème du col. \square

Appliquons le théorème du col à un exemple d'EDP semilinéaire. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 3$, et $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. On se donne une fonction $g \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et G sa primitive s'annulant en 0 telle que

- i) $g(0) = 0$,
- ii) $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1$,
- iii) il existe $\theta > 2$, $R > 0$ tels que $0 \leq \theta G(s) \leq sg(s)$ pour $|s| \geq R$,
- iv) $\frac{g(s)}{|s|^{\frac{N+2}{N-2}}} \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \pm\infty$.

On va essayer de résoudre le problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{dans } \Omega. \tag{7.11}$$

Bien sûr, ce problème a toujours la solution triviale $u = 0$ et on va s'attacher à en trouver une autre !

On va procéder en une suite de lemmes. Les lettres C, C' , etc., désigneront des constantes génériques positives dont la valeur est susceptible de changer de ligne en ligne. Tout d'abord quelques propriétés élémentaires de la fonction g induites par les hypothèses i) à iv).

Lemme 39 Soit g une fonction satisfaisant les hypothèses i) à iv). Alors on a

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |g(s)| \leq \varepsilon |s|^{\frac{N+2}{N-2}} + C(\varepsilon).$$

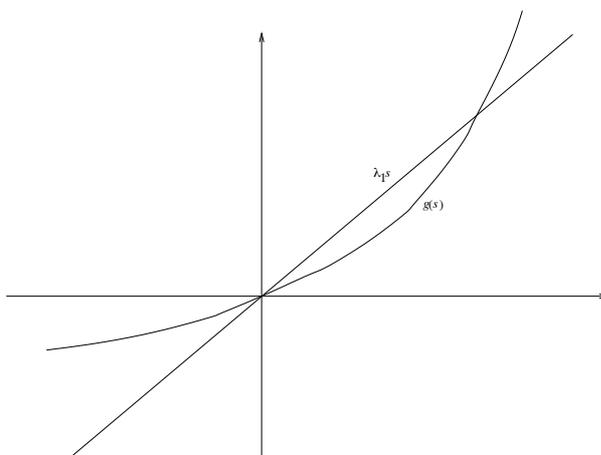
b) Pour tout $|s| \geq R$ on a

$$C|s|^\theta \leq |G(s)| \leq C'|s|^{2^*}.$$

c) $\theta \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$.

d) Pour tout $|s| \geq R$ on a $|g(s)| \geq C|s|^{\theta-1}$.

Comme $\theta > 2$, on dit que G est à croissance sur-quadratique à l'infini et que g est sur-linéaire.



Graphe de g

Il est facile de voir en utilisant ces propriétés et le même type d'arguments que précédemment, que trouver les solutions du problème (7.11) est équivalent à trouver les points critiques de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx - \int_{\Omega} G(u) dx,$$

qui est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et dont la différentielle est donnée par

$$DJ(u) = -\Delta u - g(u) \text{ au sens de } H^{-1}(\Omega).$$

Donnons tout d'abord un résultat de compacité.

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 169

Lemme 40 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $g \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $Q \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ telles que $\frac{|g(s)|}{Q(s)} \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \pm\infty$. On se donne une suite de fonctions mesurables u_n qui tend presque partout vers u et telle que $\int_{\Omega} Q(u_n)^d dx \leq C$ pour un certain $d \geq 1$. Alors $g(u_n) \rightarrow g(u)$ dans $L^d(\Omega)$ fort.

Démonstration. Par le théorème d'Egorov, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et u_n converge uniformément vers u sur Ω_ε .

Comme $|g(s)|^d \leq \varepsilon'^d Q(s) + C(\varepsilon')$, sur le complémentaire de Ω_ε , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^d dx &\leq 2^{d-1} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (|g(u_n)|^d + |g(u)|^d) dx \\ &\leq \varepsilon'^d \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (Q(u_n)^d + Q(u)^d) dx + \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) C(\varepsilon')^d \\ &\leq C\varepsilon'^d + \varepsilon C(\varepsilon')^d, \end{aligned}$$

en effet, $\int_{\Omega} Q(u)^d dx \leq C$ par le lemme de Fatou. On choisit d'abord ε' pour rendre le premier terme petit, puis ε pour le second terme. Une fois ε fixé, on a donc

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^d dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

par convergence uniforme, d'où le résultat. \square

Lemme 41 La fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale.

Démonstration. Soit u_n une suite telle que $J(u_n) \rightarrow c$ et $DJ(u_n) \rightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Remarquant que $\theta G(s) \leq sg(s) - C$ pour tout s , on a

$$\begin{aligned} \langle DJ(u_n), u_n \rangle &= \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx - \int_{\Omega} g(u_n) u_n dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx - \theta \int_{\Omega} G(u_n) dx + C \text{mes } \Omega \\ &= \theta J(u_n) - \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx + C \text{mes } \Omega. \end{aligned}$$

Comme $\theta > 2$, on en déduit comme dans la démonstration de la proposition 23 que u_n est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée u_n) et trouver un $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_n \rightarrow u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Prenons alors $Q(s) = |s|^{\frac{N+2}{N-2}}$ et $d = \frac{2N}{N+2} = 1 + \frac{N-2}{N+2}$. Il vient

$$\int_{\Omega} Q(u_n)^d dx = \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx \leq C$$

par l'injection de Sobolev. Le lemme de compacité nous donne donc que

$$g(u_n) \rightarrow g(u) \text{ dans } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \text{ fort.}$$

Or l'exposant conjugué de 2^* n'est autre que $\frac{2N}{N+2}$ et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, par dualité, il vient $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Finalement on a obtenu que

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) + g(u_n) \rightarrow g(u) \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

On a déjà noté que $(-\Delta)^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ ce qui montre que

$$u_n \rightarrow (-\Delta)^{-1}(g(u)) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort,}$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite. \square

Lemme 42 *La fonctionnelle J vérifie les hypothèses du théorème du col.*

Démonstration. En effet, $J(0) = 0$ trivialement. De plus, comme λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$, on a $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

Par l'hypothèse ii), il existe $\mu < \lambda_1$ tel que $g(s)/s \leq \mu$ au voisinage de 0. Par ailleurs, au voisinage de l'infini, on a $|g(s)| \leq C|s|^{\frac{N+2}{N-2}}$. On peut donc écrire globalement $g(s) \leq \mu s + Cs^{\frac{N+2}{N-2}}$ pour $s \geq 0$ et $g(s) \geq \mu s - C|s|^{\frac{N+2}{N-2}}$ pour $s \leq 0$. Dans les deux cas, en intégrant à partir de 0, on obtient

$$G(s) \leq \frac{\mu}{2}s^2 + C|s|^{2^*}.$$

Pour minorer l'énergie, on choisit un $\varepsilon > 0$ tel que $(1 - \varepsilon)\lambda_1 - \mu \geq 0$ et l'on remarque que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \lambda_1 - \frac{\mu}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx - C \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

au voisinage de 0 dans $H_0^1(\Omega)$ par l'injection de Sobolev et parce que $2^* > 2$, c'est-à-dire la condition ii) du théorème du col.

7.3. Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col 171

Enfin, soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ une fonction propre de $-\Delta$ associée à la valeur propre λ_1 , que l'on suppose normalisée dans $L^2(\Omega)$ et positive sans perte de généralité. Pour tout $\sigma \geq 0$ on a

$$J(\sigma\varphi_1) = \frac{\sigma^2\lambda_1}{2} - \int_{\Omega} G(\sigma\varphi_1) dx.$$

Comme g croît sur-linéairement à l'infini, il existe $\nu > \lambda_1$ tel que $g(s) \geq \nu s$ pour s assez grand, d'où $g(s) \geq \nu s - C$ pour tout $s \geq 0$. Par conséquent, on a $G(s) \geq \frac{\nu}{2}s^2 - C$ pour tout $s \geq 0$. Il s'ensuit que

$$J(\sigma\varphi_1) \leq \frac{\sigma^2(\lambda_1 - \nu)}{2} - C.$$

Il existe donc $\sigma \geq 0$ tel que $J(\sigma\varphi_1) < 0$, c'est-à-dire la condition iii) du théorème du col. \square

Théorème 93 *Le problème (7.11) admet une solution non triviale.*

Démonstration. On applique le théorème du col qui nous assure de l'existence d'une valeur critique c strictement positive. Il existe donc au moins un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque $J(0) = 0 < c$. \square

Exercices du chapitre 7

1. Que dit le lemme d'Ekeland quand la distance d est un multiple de la distance discrète ? Refaire les dessins qui l'illustrent dans ce cas.

2. Donner un exemple de fonction minorée, ne satisfaisant pas la condition de Palais-Smale au niveau de sa borne inférieure, mais atteignant néanmoins son minimum.

3. Démontrer le Théorème 89 dans le cas général : V espace de Banach, J de classe C^1 .