

Chapitre 6

Calcul des variations et problèmes quasi-linéaires

Les problèmes non linéaires étudiés jusqu'à présent étaient de type « semi-linéaire », à l'exemple du premier problème modèle : la non linéarité ne porte que sur des termes dont l'ordre de dérivation est strictement inférieur à l'ordre maximal de dérivation apparaissant dans l'opérateur. La partie principale reste un opérateur linéaire. À l'autre extrémité du spectre des problèmes envisageables se trouvent des équations où les dérivées secondes apparaissent de façon non linéaire. Nous traiterons pas ce cas ici, car il demande encore d'autres techniques. Un cas intermédiaire intéressant est celui où les dérivées secondes apparaissent linéairement, mais avec des coefficients qui dépendent de façon non linéaire des dérivées d'ordre inférieur. Il s'agit par exemple d'opérateurs qui se présentent sous la forme $-A(x, u, \nabla u)\nabla^2 u$ où A est une matrice. On parle alors de problèmes quasi-linéaires. De nombreux problèmes quasi-linéaires sont naturellement associés à des problèmes de minimisation de fonctionnelles sur des espaces de fonctions, ce qui conduit à des problèmes de calcul des variations.

6.1 Rappels d'analyse fonctionnelle et convexe abstraites

On renvoie à Brezis et/ou Ekeland-Témam pour les détails manquant dans les rappels qui suivent. Soit E un espace de Banach réel. La topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine, c'est-à-dire qui a le moins d'ouverts possible, qui rend continues toutes les formes linéaires du dual topologique de E , E' . C'est une topologie projective au sens rappelé au chapitre 1. On note \rightharpoonup la convergence pour la topologie faible de E . D'après ce que l'on a vu au chapitre 1, $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si pour tout $\ell \in E'$, $\ell(x_n) \rightarrow \ell(x)$. De plus, une suite faible-

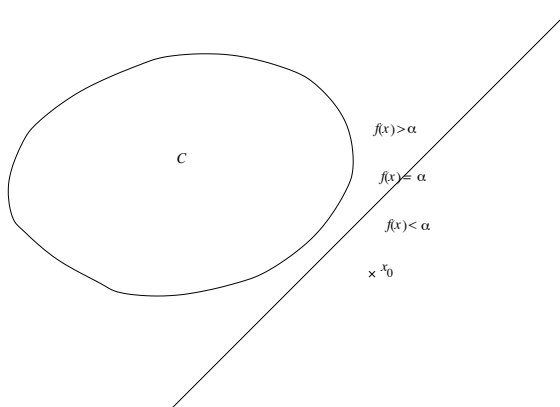
ment convergente est bornée — ceci découle du théorème de Banach-Steinhaus — et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$. Enfin, le dual topologique de E pour cette topologie est le même que celui de départ, E' , à savoir, on n'a pas ajouté de forme linéaire continue supplémentaire en affaiblissant ainsi la topologie de E .

Notons que la description des voisinages de 0 donnée au chapitre 1 s'applique dans ce cas particulier. Elle montre qu'en dimension infinie, un ouvert faible non vide n'est jamais borné. En fait, il contient même un espace affine de dimension infinie. Par exemple, le voisinage de 0 défini par $\{x \in E; |\ell_i(x)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$ avec $\varepsilon > 0$, contient l'espace $\cap_{i=1}^k \ker \ell_i$ qui est de dimension infinie comme intersection finie d'hyperplans. En particulier, une boule est d'intérieur faible vide en dimension infinie. En dimension finie, la topologie faible coïncide visiblement avec la topologie forte.

Le résultat fondamental pour la suite découle directement du théorème de Hahn-Banach sous (deuxième) forme géométrique.

Théorème 66 *Un convexe C de E est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Démonstration. Soit C un convexe fortement fermé et soit $x_0 \notin C$. D'après le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $y \in C$, $f(x_0) < \alpha < f(y)$. L'ensemble $V = \{x \in E; f(x) < \alpha\}$ est un ouvert faible, $x_0 \in V$ et $V \cap C = \emptyset$. Par conséquent, le complémentaire de C est faiblement ouvert et C est faiblement fermé. \square



La preuve par l'image : x_0 appartient à un ouvert faible, lui-même contenu dans le complémentaire de C .

On remarque que ceci implique qu'un convexe fermé (fort ou faible) est égal à l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent.

On rappelle qu'une fonction sur E à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieure (en abrégé, s.c.i.) si pour tout $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, l'image réciproque de $[-\infty, \lambda]$ par cette fonction est un fermé pour la topologie considérée sur E .

Corollaire 67 Soit $J: E \rightarrow]-\infty, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}$ convexe et fortement s.c.i. Alors J est faiblement s.c.i. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$, on a $\liminf J(x_n) \geq J(x)$.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, soit $A_\lambda = \{x \in E; J(x) \leq \lambda\}$. Comme J est convexe, c'est un convexe de E . Comme J est fortement s.c.i., c'est aussi un fermé pour la topologie forte de E . D'après le théorème précédent, c'est donc un fermé faible et J est faiblement s.c.i.

Soit alors une suite x_n telle que $x_n \rightharpoonup x$, et posons $\lambda = \liminf J(x_n)$. On peut extraire une sous-suite, notée $x_{n'}$, telle que $J(x_{n'}) \rightarrow \lambda$.

Il y a deux cas de figure possibles *a priori*. Le premier cas est celui où $\lambda > -\infty$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n' \geq n_0$, $J(x_{n'}) \leq \lambda + \varepsilon$, c'est-à-dire $x_{n'} \in A_{\lambda+\varepsilon}$ pour tout $n' \geq n_0$. Comme $A_{\lambda+\varepsilon}$ est un fermé faible, il contient donc la limite faible de la suite $(x_{n'})_{n' \geq n_0}$, à savoir x . On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, $J(x) \leq \lambda + \varepsilon$, d'où le résultat.

Le deuxième cas est celui où $\lambda = -\infty$. Dans ce cas, pour tout $M < 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n' \geq n_0$, $J(x_{n'}) \leq M$, c'est-à-dire $x_{n'} \in A_M$ pour tout $n' \geq n_0$. Comme A_M est un fermé faible, il contient la limite faible de la suite $(x_{n'})_{n' \geq n_0}$, à savoir x . On a donc montré que $x \in \bigcap_{M < 0} A_M = \emptyset$ puisque J ne prend pas la valeur $-\infty$. Contradiction, le deuxième cas de figure ne peut donc pas se produire. \square

La raison pour laquelle on exclut la valeur $-\infty$ est qu'une fonction convexe qui prend cette valeur est nécessairement identiquement égale à $-\infty$ ou alors la notion même de convexité est mal définie avec des formes indéterminées $+\infty - \infty$ si on lui fait aussi prendre la valeur $+\infty$. Ce cas ne présente donc aucun intérêt.

Le dual E' d'un espace de Banach est également un espace de Banach pour la norme duale $\|f\|_{E'} = \sup_{\|u\|_E=1} |f(u)|$. Il est donc muni d'une topologie faible $\sigma(E', E'')$. Il est également muni d'une topologie plus intéressante, la topologie faible-étoile $\sigma(E', E)$, qui est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications linéaires sur E' engendrées par des éléments de E , i.e., $\ell \mapsto \ell(x)$ pour un certain $x \in E$ fixé. C'est aussi une topologie projective. La convergence pour cette topologie est notée $\overset{*}{\rightharpoonup}$. Naturellement, $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\ell_n(x) \rightarrow \ell(x)$, une suite faiblement- $*$ convergente est bornée et $\|\ell\|_{E'} \leq \liminf \|\ell_n\|_{E'}$.

La topologie faible-étoile est en général plus faible que la topologie faible sur E' (sauf si $E = E''$ algébriquement et topologiquement c'est-à-dire si E est réflexif). Elle possède moins d'ouverts, d'où, en contrepartie et ce qui fait son intérêt, plus de compacts que la topologie faible. En particulier, on a le théorème de Banach-Alaoglu (voir Brezis).

Théorème 68 La boule unité fermée de E' est faiblement- $*$ compacte.

Corollaire 69 *Si E est réflexif, alors la boule unité fermée de E est faiblement compacte.*

Démonstration. En effet, dans ce cas $E = (E')'$ et les topologies faible et faible-* coïncident sur E . \square

Remarque 47 Cette propriété est en fait une condition nécessaire et suffisante de réflexivité. \square

Corollaire 70 *Si E est réflexif et K un convexe fermé borné, alors K est faiblement compact.*

Démonstration. L'ensemble K est faiblement fermé par le théorème 66. Comme il est borné, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $K \subset \mu \bar{B}_E$, où \bar{B}_E désigne la boule unité fermée de E . C'est donc un fermé d'un compact faible, donc il est lui-même compact. \square

Corollaire 71 *Soit E un espace de Banach réflexif, C un convexe fermé non vide de E et $J: C \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i., non identiquement égale à $+\infty$ et telle que*

$$\lim_{\substack{x \in C \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} J(x) = +\infty. \quad (6.1)$$

Alors J atteint sa borne inférieure sur C , c'est-à-dire qu'il existe $x \in C$ tel que $J(x) = \inf_{y \in C} J(y)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $\bar{x} \in C$ tel que $J(\bar{x}) < +\infty$. On pose $\tilde{C} = \{x \in C; J(x) \leq J(\bar{x})\} = C \cap A_{J(\bar{x})}$. C'est donc un convexe fermé comme intersection de convexes fermés, non vide car \bar{x} lui appartient. De plus, il est borné par la condition de coercivité (6.1). Il est par conséquent faiblement compact. La fonction J étant faiblement s.c.i. atteint donc sa borne inférieure sur ce compact, en un point x_0 . Par ailleurs, si $x \in C \setminus \tilde{C}$, alors $J(x) > J(\bar{x}) \geq J(x_0)$, donc ce minimum est aussi le minimum sur C tout entier. \square

En faisant des hypothèses de séparabilité, on peut également raisonner sur des suites. Mentionnons rapidement quelques résultats dans cette direction.

- Si E est séparable, alors la restriction de la topologie faible-* de E' à sa boule unité est métrisable. Par contre, en dimension infinie, ni la topologie faible, ni la topologie faible-* ne sont métrisables. Pour le voir, prenons une suite $x_n \in E$ telle que $x_n \rightharpoonup 0$ mais $\|x_n\|_E = 1$ (une telle suite existe dans la plupart des espaces de Banach raisonnables, la propriété contraire étant plutôt de nature pathologique). On introduit alors la famille à deux indices $x_{n,p} = nx_p$. À n fixé, on a $x_{n,p} \rightharpoonup 0$

quand $p \rightarrow +\infty$. Si la topologie était métrisable avec une distance d , on aurait donc $d(x_{n,p}, 0) \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$. Pour tout n , nous pourrions alors choisir $p(n)$ tel que $d(x_{n,p(n)}, 0) \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $x_{n,p(n)} \rightarrow 0$. Or, $\|x_{n,p}\|_E = n$. La suite $x_{n,p(n)}$ n'étant pas bornée, elle ne peut pas converger faiblement.

Cet exemple montre en fait que l'argument familier de double approximation est faux pour la topologie faible ou faible-*, sauf si on reste dans un borné du dual d'un espace séparable, bien entendu.

- Si E est séparable et f_n est une suite bornée dans E' , alors il existe une sous-suite $f_{n'}$ faiblement-* convergente.

- Si E est réflexif et x_n est une suite bornée dans E , alors il existe une sous-suite $x_{n'}$ faiblement convergente (raisonner sur l'adhérence de l'espace engendré par la suite x_n , lequel est séparable).

- Si x_n est une suite minimisante de J , i.e., $J(x_n) \rightarrow \inf_{y \in C} J(y)$, il existe une sous-suite $x_{n'}$ qui converge faiblement vers un point de minimum de J , x_0 (sous les hypothèses du corollaire 71). En effet, alors $\liminf J(x_{n'}) \geq J(x_0)$.

Une fonction J telle que $\liminf J(x_n) \geq J(x)$ quand x_n est une suite qui tend vers x est dite séquentiellement semi-continue inférieurement (s.s.c.i.). Nous avons vu (essentiellement) qu'une fonction s.c.i. est s.s.c.i., cf. la démonstration du Corollaire 67. Les deux propriétés sont équivalentes dans un espace métrique.

Notons pour finir qu'un convexe fortement fermé dans E' n'est pas nécessairement faiblement-* fermé. Un exemple simple en est $C^0([0, 1])$ qui est un convexe fortement fermé de $L^\infty(0, 1)$, mais pas faiblement-* fermé. Il suffit par exemple d'approcher ponctuellement la fonction caractéristique d'une boule par une suite de fonctions continues comprises entre 0 et 1. Bien entendu, $C^0([0, 1])$ est faiblement fermé dans $L^\infty(0, 1)$, ce qui montre bien que la topologie faible de $L^\infty(0, 1)$ est un objet assez délicat à manipuler. À l'autre extrême, on note que la boule unité de $L^1(0, 1)$ n'est pas faiblement compacte. Considérons pour cela la suite $u_n(x) = n\chi_{[0, 1/n]}(x)$. Supposons qu'il existe une sous-suite $u_{n'}$ qui converge faiblement vers u dans $L^1(0, 1)$. Ceci signifie que pour tout $v \in L^\infty(0, 1)$, $\int_0^1 u_{n'} v dx \rightarrow \int_0^1 u v dx$. En particulier, pour $v(x) = 1$, il vient

$$\int_0^1 u dx = \lim_{n' \rightarrow +\infty} n' \int_0^{1/n'} dx = 1,$$

d'une part, et pour $v(x) = \chi_{[a, b]}(x)$ avec $a > 0$ d'autre part,

$$\int_a^b u dx = \lim_{n' \rightarrow +\infty} n' \int_0^{1/n'} \chi_{[a, b]}(x) dx = 0,$$

car $[0, 1/n'] \cap [a, b] = \emptyset$ dès que $n' > 1/a$. Cette deuxième égalité implique que $u = 0$, ce qui contredit la première égalité. On dit dans ce cas que la famille u_n n'est

pas équi-intégrable (une condition nécessaire de compacité faible dans $L^1(0,1)$). On peut résumer les qualités et défauts respectifs des différentes topologies faibles dans un tableau.

	topologie faible sur E	topologie faible-* sur E'
pour	convexes fermés forts fermés	boule unité compacte
contre	boule unité pas toujours compacte	convexes fermés forts pas toujours fermés

6.2 Application aux problèmes aux limites quasi-linéaires scalaires

Pour appliquer les résultats abstraits précédents à des problèmes de calcul des variations, on se place dans le cadre suivant. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et F une application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , convexe, telle qu'il existe $p \in]1, +\infty[$, C , β et $\alpha > 0$ avec pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$|F(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^p), \quad (6.2)$$

$$F(\xi) \geq \alpha|\xi|^p - \beta. \quad (6.3)$$

Pour tout $f \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, on introduit la fonctionnelle $J: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$J(v) = \int_{\Omega} F(\nabla v) dx - \int_{\Omega} f v dx. \quad (6.4)$$

On a alors un premier résultat de minimisation.

Théorème 72 *Il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui minimise J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme F est convexe, il est clair que J est convexe. De plus, par la condition de croissance (6.2), elle est bien à valeurs dans \mathbb{R} .

D'autre part, comme $1 < p < +\infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.

Montrons que J est fortement continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit v_n une suite telle que $v_n \rightarrow v$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous pouvons en extraire une sous-suite, notée $v_{n'}$, telle que $\nabla v_{n'}$ converge presque partout et telle qu'il existe $g \in L^p(\Omega)$ avec $|\nabla v_{n'}| \leq g$ presque partout (réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue). Comme F est convexe et localement bornée, puisqu'à valeurs dans \mathbb{R} , elle est continue. Nous sommes donc dans la situation suivante :

$$\begin{cases} F(\nabla v_{n'}) \rightarrow F(\nabla v) & \text{presque partout,} \\ |F(\nabla v_{n'})| \leq C(1 + |F(\nabla v_{n'})|^p) \leq C(1 + g^p) \in L^1(\Omega). \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet donc de conclure que

$$\int_{\Omega} F(\nabla v_{n'}) dx \longrightarrow \int_{\Omega} F(\nabla v) dx \quad \text{quand } n' \rightarrow +\infty$$

et donc que J est fortement continue par unicité de la limite.

On en déduit que J est faiblement s.c.i. sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, grâce au corollaire 67. Pour pouvoir utiliser le corollaire 71, il nous reste à vérifier que l'hypothèse (6.1) est bien satisfaite. On utilise pour cela l'hypothèse de coercivité (6.3). Celle-ci implique en effet que

$$J(v) \geq \alpha \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p - \beta \text{mes } \Omega - \|v\|_{L^p(\Omega)} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

et l'on conclut par l'inégalité de Poincaré généralisée. \square

Remarque 48 Il n'est pas nécessaire de passer par le théorème de Carathéodory. En effet, on a le résultat plus général suivant. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ continue et bornée inférieurement. Alors l'application $I : L_{\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ définie par $I(z) = \int_{\Omega} f(z) dx$ est fortement s.s.c.i. En effet, soit $z_n \rightarrow z$ dans $L_{\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Il suffit d'en extraire une sous-suite qui réalise la $\liminf I(z_n)$, puis, de cette sous-suite, d'extraire une autre sous-suite qui converge presque partout et d'appliquer le lemme de Fatou. On en déduit immédiatement que la fonctionnelle J du théorème est fortement s.c.i. sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. \square

Pour ce qui concerne l'unicité, on a le résultat suivant.

Théorème 73 *Si en outre F est strictement convexe, alors le point de minimum est unique.*

Démonstration. Supposons que nous ayons deux points de minimum distincts, u_1 et u_2 . Par l'inégalité de Poincaré généralisée, il vient que $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive. Par stricte convexité de F , on voit donc que $F((\nabla u_1 + \nabla u_2)/2) < [F(\nabla u_1) + F(\nabla u_2)]/2$ sur un ensemble de mesure strictement positive. On en déduit que $J((u_1 + u_2)/2) < [J(u_1) + J(u_2)]/2 = \inf J$, contradiction. \square

Passer d'un problème de calcul des variations, qui consiste à minimiser une fonctionnelle du type (6.4) sur un espace de fonctions, à un problème aux limites est ce que l'on appelle trouver l'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation. Plus précisément, supposons maintenant que F est de classe C^1 . Sa différentielle est donc une application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N (on identifie \mathbb{R}^N à son dual par l'intermédiaire du produit scalaire euclidien usuel, il s'agit donc en fait plutôt

d'un gradient que d'une différentielle). On suppose que cette application satisfait une condition de croissance compatible avec celle satisfaite par F , à savoir

$$|DF(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}). \quad (6.5)$$

Théorème 74 *Tout point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de minimum de J est solution du problème variationnel*

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \int_{\Omega} DF(\nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (6.6)$$

Démonstration. Soit v un élément de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u + tv \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donc $J(u + tv)$ est bien défini. De plus, la fonction $j: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $j(t) = J(u + tv)$, a un minimum en $t = 0$. Montrons que cette fonction est de classe C^1 . Par définition de J , nous avons

$$j(t) = \int_{\Omega} F(\nabla u + t\nabla v) dx - \int_{\Omega} f u dx - t \int_{\Omega} f v dx.$$

Posons $G(x, t) = F(\nabla u(x) + t\nabla v(x))$. Cette fonction est de classe C^1 par rapport à t avec

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = DF(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) \cdot \nabla v(x).$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'hypothèse de croissance 6.5, nous avons de plus

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) \right| &\leq |DF(\nabla u + t\nabla v)| |\nabla v| \\ &\leq C(1 + |\nabla u + t\nabla v|^{p-1}) |\nabla v| \\ &\leq C'(1 + |\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}) |\nabla v|. \end{aligned}$$

En effet, il existe une constante C'' telle que pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^+$ on ait $(x + y)^{p-1} \leq C''(x^{p-1} + y^{p-1})$ (considérer la fonction $z: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $z \mapsto (1 + z)^{p-1}/(1 + z^{p-1})$, montrer qu'elle est bornée et poser $z = y/x$).

Comme $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$. Or, si $q = p/(p-1)$, on a $1/p + 1/q = 1$ et donc on peut appliquer l'inégalité de Hölder pour conclure que $|\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \in L^1(\Omega)$. Comme il est par ailleurs clair que $|\nabla v|^p \in L^1(\Omega)$ et $|\nabla v| \in L^1(\Omega)$, on voit que $\partial G/\partial t$ est dominée par une fonction de $L^1(\Omega)$ uniformément pour $t \in [-1, 1]$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que la fonction $t \mapsto \int_{\Omega} G(x, t) dx$ est de classe C^1 et que sa dérivée est donnée par $t \mapsto \int_{\Omega} (\partial G/\partial t)(x, t) dx$. Ceci implique évidemment que j est de classe C^1 avec

$$j'(t) = \int_{\Omega} DF(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Comme j a un minimum en $t = 0$, il vient que $j'(0) = 0$, qui n'est autre que l'équation d'Euler-Lagrange (6.6). \square

Corollaire 75 *Tout point de minimum de J est solution du problème aux limites quasi-linéaire*

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ -\operatorname{div} DF(\nabla u) = f \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. □

Remarque 49 i) Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un problème quasi-linéaire, supposons que u soit très régulière. La différentielle de F est donnée par $DF(\xi) = (\partial_1 F(\xi), \dots, \partial_N F(\xi))^T$ et l'on voit que l'équation au sens des distributions ci-dessus s'écrit

$$-\partial_i [\partial_i F(\nabla u)] = -\partial_{ik} F(\nabla u) \partial_{ik} u = f.$$

Posant $a_{ik}(\xi) = \partial_{ik} F(\xi)$, on a bien un opérateur de la forme $-a_{ik}(\nabla u) \partial_{ik} u$.

ii) Réciproquement, il peut arriver qu'un problème aux limites quasi-linéaire soit, au moins formellement, l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème de calcul des variations, auquel cas on a intérêt à résoudre le problème de minimisation, pour en déduire éventuellement une solution du problème de départ.

iii) La démonstration du théorème 74 consiste en fait à montrer que la fonctionnelle J est différentiable au sens de Gâteaux, et que sa différentielle s'annule en tout point de minimum. Dans le cas où la fonctionnelle est convexe, on a également la réciproque.

Théorème 76 *Toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème variationnel (6.6) est un point de minimum de J .*

Démonstration. Comme F est convexe de classe C^1 , nous avons pour tout couple de vecteurs $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^N$,

$$F(\xi) - F(\zeta) \geq DF(\zeta) \cdot (\xi - \zeta).$$

Remplaçant ξ par $\nabla v(x)$ et ζ par $\nabla u(x)$, on en déduit que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} F(\nabla v) dx - \int_{\Omega} F(\nabla u) dx \geq \int_{\Omega} DF(\nabla u) \cdot (\nabla v - \nabla u) dx = \int_{\Omega} f(v - u) dx$$

par l'équation d'Euler-Lagrange (6.6). Ceci n'est autre que $J(v) \geq J(u)$. □

Exemple La fonction $F(\xi) = (1/p)|\xi|^p$ est strictement convexe, de classe C^1 pour $p > 1$ avec $DF(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$. On a donc ainsi trouvé l'unique solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de l'équation

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f,$$

où l'on aurait aussi bien pu prendre f dans $W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$. En développant formellement, si u est très régulière (et ∇u ne s'annule pas pour $p < 2$), c'est l'équation

$$-|\nabla u|^{p-2}\Delta u - (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\partial_{iu}\partial_{ju}\partial_{ij}u) = f,$$

soit

$$a_{ij}(\xi) = |\xi|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j.$$

6.3 Calcul des variations dans le cas vectoriel

Les résultats de la section précédente admettent naturellement de nombreuses généralisations. Nous allons considérer ici le cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m , ce qui correspond au niveau des équations d'Euler-Lagrange au cas des systèmes d'équations. Dans le cas scalaire, $m = 1$, l'hypothèse fondamentale sur F est que celle-ci est convexe. Dans le cas $m > 1$, on peut toujours faire cette hypothèse, et la théorie est essentiellement inchangée. Néanmoins, dans un certain nombre d'applications, l'hypothèse de convexité est trop restrictive, voire tout à fait irréaliste comme en élasticité non linéaire. Il faut donc obtenir une condition plus générale que la convexité, qui assure encore la semi-continuité inférieure faible de fonctionnelles du type (6.4) dans le cas vectoriel.

Dans ce qui suit, Ω est toujours un ouvert borné de \mathbb{R}^N mais les applications u que l'on va considérer sur Ω prendront leurs valeurs dans \mathbb{R}^m . On repère ces valeurs par leurs m composantes u_i dans une base cartésienne orthonormée. Le gradient de u est alors une matrice à m lignes et N colonnes, $(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i$. Soit M_{mN} l'espace des matrices à m lignes et N colonnes. Il est muni du produit scalaire euclidien usuel, $A : B = \operatorname{tr}(A^T B)$ (note : $A^T B$ est une matrice $N \times N$). Soit $F : M_{mN} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on lui associe une fonctionnelle

$$I(u) = \int_{\Omega} F(\nabla u) dx,$$

sans préciser pour l'instant les espaces fonctionnels, si ce n'est que les dérivées premières de u doivent être des fonctions en un certain sens.

Définition 8 On dit que F est quasi-convexe s'il existe un ouvert borné D de \mathbb{R}^N tel que, pour toute matrice $A \in M_{mN}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^m)$, on a

$$\int_D F(A + \nabla \varphi(x)) dx \geq (\operatorname{mes} D)F(A). \quad (6.7)$$

Remarquons que toute fonction convexe est aussi quasi-convexe, puisque dans ce cas, l'inégalité (6.7) découle immédiatement de l'inégalité de Jensen. Il existe néanmoins des fonctions quasi-convexes mais non convexes, nous reviendrons sur ce point plus loin.

Lemme 30 *La définition 8 ne dépend pas de l'ouvert D .*

Démonstration. Soit F une fonction quasi-convexe, D l'ouvert qui apparaît dans la définition 8 et soit D_1 un autre ouvert borné de \mathbb{R}^N . Il existe clairement un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et un nombre $\eta > 0$ tels que $x_0 + \eta D_1 \subset D$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(D_1)$, on définit $\varphi_* \in \mathcal{D}(D)$ par

$$\varphi_*(x) = \begin{cases} \eta \varphi\left(\frac{x-x_0}{\eta}\right) & \text{si } x \in x_0 + \eta D_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme F est quasi-convexe, on a en particulier

$$\int_D F(A + \nabla \varphi_*(x)) dx \geq (\text{mes } D)F(A).$$

Par définition de φ_* , on a par ailleurs,

$$\nabla \varphi_*(x) = \begin{cases} \nabla \varphi\left(\frac{x-x_0}{\eta}\right) & \text{si } x \in x_0 + \eta D_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remplaçant ces expressions dans l'inégalité de quasi-convexité, il vient

$$\int_{D \setminus (x_0 + \eta D_1)} F(A) dx + \int_{x_0 + \eta D_1} F(A + \nabla \varphi_*(x)) dx \geq (\text{mes } D)F(A),$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0 + \eta D_1} F\left(A + \nabla \varphi\left(\frac{x-x_0}{\eta}\right)\right) dx \geq (\text{mes}(x_0 + \eta D_1))F(A) = \eta^N (\text{mes } D_1)F(A).$$

Effectuant alors le changement de variable $y = (x - x_0)/\eta$ dans l'intégrale, on voit que F satisfait l'inégalité de quasi-convexité sur D_1 pour φ . \square

Remarque 50 On peut remplacer $\mathcal{D}(D; \mathbb{R}^m)$ par $W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m)$ dans la définition 6.7. \square

La quasi-convexité intervient dans les problèmes de calcul des variations vectoriels en raison des deux théorèmes suivants.

Théorème 77 *Si la fonctionnelle I est faiblement-* s.s.c.i. sur $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ alors F est quasi-convexe.*

Démonstration. Soit $A \in M_{mN}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \in \Omega$. Soit alors $Q \subset \Omega$ un cube centré en 0 et de côté L et soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q; \mathbb{R}^m)$. Soit k un entier naturel. On divise Q en k^N cubes $(Q_l)_{l=1,\dots,k^N}$ de côtés parallèles aux côtés de Q et de longueur L/k . On note x_l les centres de ces cubes. On pose alors

$$u_k(x) = \begin{cases} Ax + \frac{1}{k} \varphi(k(x - x_l)) & \text{si } x \in Q_l, \\ Ax & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme φ s'annule dans un voisinage du bord de Q , il est clair que $u_k \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$. De plus,

$$\nabla u_k(x) = \begin{cases} A + \nabla \varphi(k(x - x_l)) & \text{si } x \in Q_l, \\ A & \text{sinon.} \end{cases}$$

si bien qu'il existe une constante C indépendante de k telle que

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)} \leq C, \quad \|\nabla u_k\|_{L^\infty(\Omega; M_{mN})} \leq C.$$

La suite u_k est bornée dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, donc elle admet une sous-suite faiblement-* convergente. Comme par ailleurs toute la suite converge uniformément vers $u(x) = Ax$, on voit que $u_k \rightharpoonup Ax$ dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ faiblement-*. La s.s.c.i. de I implique alors que

$$\liminf I(u_k) \geq I(u) = \int_{\Omega} F(A) dx = (\text{mes } \Omega)F(A). \quad (6.8)$$

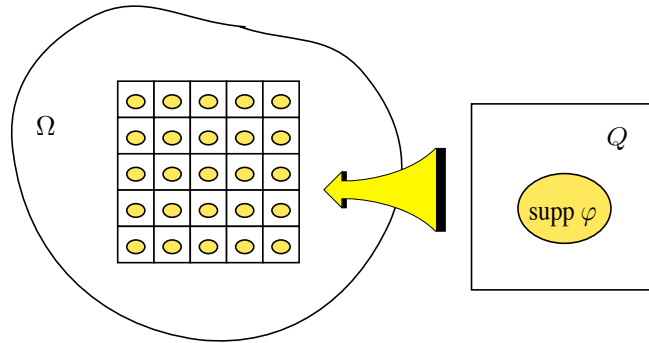
Calculons alors $I(u_k)$.

$$\begin{aligned} I(u_k) &= \int_{\Omega \setminus Q} F(A) dx + \int_Q F(A + \nabla u_k(x)) dx \\ &= (\text{mes } \Omega - \text{mes } Q)F(A) + \sum_{l=1}^{k^N} \int_{Q_l} F(A + \nabla \varphi(k(x - x_l))) dx \end{aligned}$$

d'où, en effectuant le changement de variable $y_l = k(x - x_l)$,

$$\begin{aligned} I(u_k) &= (\text{mes } \Omega - \text{mes } Q)F(A) + \sum_{l=1}^{k^N} \frac{1}{k^N} \int_Q F(A + \nabla \varphi(y_l)) dy_l \\ &= (\text{mes } \Omega - \text{mes } Q)F(A) + \int_Q F(A + \nabla \varphi(y)) dy. \end{aligned}$$

Combinant cette expression avec l'inégalité (6.8), on en déduit que F est quasi-convexe. \square

Construction de la suite u_k

Le théorème 77 admet une réciproque, nettement plus difficile, dont nous donnons une démonstration à titre culturel en annexe.

Théorème 78 Si $F : M_{mN} \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe, alors la fonctionnelle I est faiblement- $*$ s.s.c.i. sur $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

La quasi-convexité apparaît donc comme une condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure faible pour des fonctionnelles du calcul des variations dans le cas vectoriel. Le résultat persiste également dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, à condition d'imposer des conditions de croissance et de borne inférieure appropriées. En voici un exemple.

Théorème 79 Soit $F : M_{mN} \rightarrow \mathbb{R}$ quasi-convexe et telle que

$$\begin{cases} |F(A)| \leq C(1 + |A|^p), \\ F(A) \geq 0, \end{cases}$$

pour un certain $p \in]1, +\infty[$. Alors la fonctionnelle I est faiblement s.s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

On déduit immédiatement de ce théorème nombre de résultats d'existence de points de minimum. Ainsi, par exemple,

Corollaire 80 Soit F qui satisfait les hypothèses du théorème 79 et telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$F(A) \geq \alpha|A|^p.$$

Alors la fonctionnelle I atteint son minimum sur $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Considérons une suite minimisante, c'est-à-dire une suite $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $I(u_k) \rightarrow \inf I$ (il en existe toujours). À cause de la coercivité de F et de l'inégalité de Poincaré généralisée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, on en déduit que u_k est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. On en extrait une sous-suite faiblement convergente vers un certain u , toujours notée u_k . Comme I est faiblement s.s.c.i., il vient $\liminf I(u_k) \geq I(u)$, donc u est un point de minimum de I . \square

Remarque 51 On établit l'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation comme précédemment, si ce n'est qu'il s'agit ici d'un système :

$$-\partial_j \left[\frac{\partial F}{\partial A_{ij}}(\nabla u) \right] = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m, \quad (6.9)$$

au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Bien qu'étant une condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure faible, la quasi-convexité souffre d'un défaut important en pratique. Il est en effet presque aussi difficile de montrer qu'une fonction donnée est quasi-convexe que de montrer que la fonctionnelle associée est s.s.c.i. faible. C'est en effet une condition non locale, qui doit de plus être vérifiée pour un ensemble infini de fonctions test. On a donc besoin de conditions plus maniables, soit nécessaires, soit suffisantes, que l'on soit en mesure d'appliquer effectivement. Donnons d'abord une condition nécessaire.

Définition 9 On dit que $F: M_{mN} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est rang-1-convexe si pour tout couple de matrices $A, B \in M_{mN}$ telles que $\text{rang}(B - A) = 1$, on a

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad F(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda F(A) + (1 - \lambda)F(B). \quad (6.10)$$

En d'autres termes, une fonction est rang-1-convexe si elle est convexe sur tous les segments dont les extrémités diffèrent par une matrice de rang un. Notons que nous autorisons ici F à prendre la valeur $+\infty$. On la suppose en outre dans ce cas bornée inférieurement sur les bornés, de façon à pouvoir définir la fonctionnelle I sans ambiguïté sur $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Théorème 81 Si la fonctionnelle I est faiblement- $*$ s.s.c.i. sur $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ alors F est rang-1-convexe.

Démonstration. Si $F(A) = +\infty$ ou $F(B) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Nous supposons donc que $F(A) < +\infty$ et $F(B) < +\infty$, avec $\text{rang}(B - A) = 1$. Cette dernière condition signifie qu'il existe deux vecteurs $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $B - A = b \otimes a$. Soit $\lambda \in]0, 1[$ et définissons une fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique et telle que

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \lambda, \\ 1 & \text{si } \lambda < t \leq 1. \end{cases}$$

On note alors

$$g_1(t) = \int_0^t h(s) ds, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, g_k(t) = \frac{1}{k} g_1(kt).$$

On a donc $g'_k(t) = h(kt)$ presque partout dans \mathbb{R} . On pose alors

$$u_k(x) = Ax + g_k(a \cdot x)b$$

de telle sorte que

$$\nabla u_k(x) = A + h(ka \cdot x)b \otimes a = \begin{cases} A & \text{si } x \in \Omega_k^\lambda, \\ B & \text{si } x \in \Omega_k^{1-\lambda}, \end{cases}$$

où

$$\Omega_k^\lambda = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^N; ka \cdot x - [ka \cdot x] < \lambda\} \text{ et } \Omega_k^{1-\lambda} = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^N; \lambda \leq ka \cdot x - [ka \cdot x]\}$$

($[t]$ est la partie entière de t). En d'autres termes,

$$\nabla u_k(x) = A \mathbf{1}_{\Omega_k^\lambda}(x) + B \mathbf{1}_{\Omega_k^{1-\lambda}}(x),$$

et de même

$$F(\nabla u_k(x)) = F(A) \mathbf{1}_{\Omega_k^\lambda}(x) + F(B) \mathbf{1}_{\Omega_k^{1-\lambda}}(x),$$

où $\mathbf{1}_E$ désigne la fonction caractéristique de E .

La suite u_k est clairement bornée dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Il est par ailleurs facile de montrer que $\mathbf{1}_{\Omega_k^\lambda} \xrightarrow{*} \lambda$ et que $\mathbf{1}_{\Omega_k^{1-\lambda}} \xrightarrow{*} 1 - \lambda$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible-*, cf. chapitre 2, section 1. On en déduit immédiatement que la suite u_k converge vers $x \mapsto \lambda Ax + (1 - \lambda)Bx$ dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ faible-*.

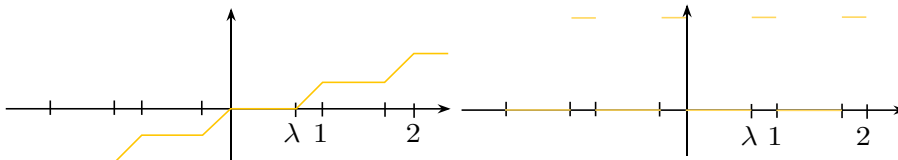
D'après les remarques qui précèdent, on a d'une part

$$\int_{\Omega} F(\nabla u_k(x)) dx \longrightarrow \text{mes } \Omega [\lambda F(A) + (1 - \lambda)F(B)],$$

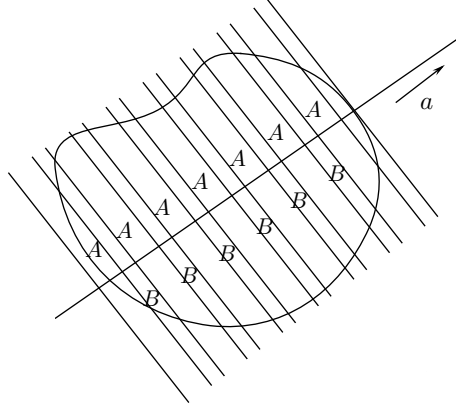
et d'autre part, comme I est faiblement-* s.s.c.i.,

$$\liminf \int_{\Omega} F(\nabla u_k(x)) dx \geq \text{mes } \Omega F(\lambda A + (1 - \lambda)B).$$

Ces deux dernières relations montrent que F est rang-1-convexe. □



Graphes de g_1 et g'_1

Valeurs prises par le gradient de u_k

Corollaire 82 Si F est à valeurs finies, alors F quasi-convexe implique F rang-1-convexe.

Remarque 52 i) Ceci est faux si F prend la valeur $+\infty$.

ii) Si F est de classe C^2 , la rang-1-convexité de F est équivalente à la condition de Legendre-Hadamard,

$$\forall A \in M_{mN}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial A_{ij} \partial A_{kl}}(A) \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l \geq 0. \quad (6.11)$$

Quand on la renforce légèrement sous la forme

$$\forall A \in M_{mN}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial A_{ij} \partial A_{kl}}(A) \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l \geq c |\xi|^2 |\eta|^2, \quad (6.12)$$

cette condition prend le nom d'*ellipticité forte* pour le système (6.9), lequel s'écrit aussi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial A_{ij} \partial A_{kl}}(\nabla u) \partial_{kj} u_l = 0,$$

au moins formellement. □

Passons maintenant aux conditions suffisantes. On note $T(m, N)$ le nombre total de mineurs de tous ordres que l'on peut extraire d'une matrice $m \times N$ (donc $T(m, N) = \sum_{i=1}^N \frac{m!N!}{(i!)^2(m-i)!(N-i)!}$) et l'on note $M(A) \in \mathbb{R}^{T(m, N)}$ l'ensemble de ces mineurs de A .

Définition 10 On dit que $F: M_{mN} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est polyconvexe s'il existe une fonction $G: \mathbb{R}^{T(m,N)} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, convexe, telle que

$$\forall A \in M_{mN}, \quad F(A) = G(M(A)). \quad (6.13)$$

Théorème 83 Si F est polyconvexe à valeurs finies, alors F est quasi-convexe.

Démonstration. Pour simplifier, on le montre dans le premier cas non trivial, $m = N = 2$. La démonstration dans le cas général est analogue. Comme $T(2,2) = 5$, il existe donc $G: \mathbb{R}^5 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexe (donc continue) telle que $F(A) = G(A, \det A)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\text{mes} \Omega = 1$ et que Ω est régulier. Par l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(A + \nabla \varphi) dx &= \int_{\Omega} G(A + \nabla \varphi, \det(A + \nabla \varphi)) dx \\ &\geq G\left(\int_{\Omega} (A + \nabla \varphi) dx, \int_{\Omega} \det(A + \nabla \varphi) dx\right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Or, comme φ est à support compact, en intégrant par parties, on voit que

$$\int_{\Omega} (A + \nabla \varphi) dx = A,$$

d'une part. D'autre part, si l'on pose $\psi(x) = Ax + \varphi(x)$, alors

$$\det(A + \nabla \varphi) = \det(\nabla \psi) = \partial_1 \psi_1 \partial_2 \psi_2 - \partial_1 \psi_2 \partial_2 \psi_1 = \partial_1(\psi_1 \partial_2 \psi_2) - \partial_2(\psi_1 \partial_1 \psi_2).$$

Par conséquent, en intégrant par parties,

$$\int_{\Omega} \det(A + \nabla \varphi) dx = \int_{\partial \Omega} (\psi_1 \partial_2 \psi_2 n_1 - \psi_1 \partial_1 \psi_2 n_2) d\sigma.$$

Comme φ est à support compact, on a $\psi(x) = Ax$ et $\nabla \psi(x) = A$ sur $\partial \Omega$. Donc, notant $\psi_0(x) = Ax$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det(A + \nabla \varphi) dx &= \int_{\partial \Omega} ((\psi_0)_1 \partial_2(\psi_0)_2 n_1 - (\psi_0)_1 \partial_1(\psi_0)_2 n_2) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \det(\nabla \psi_0) dx = \det A. \end{aligned}$$

Remplaçant dans l'inégalité (6.14), il vient

$$\int_{\Omega} F(A + \nabla \varphi) dx \geq G(A, \det A) = F(A),$$

c'est-à-dire que F est quasi-convexe. \square

Remarque 53 i) La démonstration repose de façon cruciale sur le fait que le déterminant d'un gradient, et plus généralement tout mineur d'un gradient, s'écrit en fait comme la divergence d'un certain champ de vecteurs. Son intégrale sur un ouvert ne dépend donc que des valeurs prises par la fonction au voisinage du bord de cet ouvert. On dit que le déterminant est un *Lagrangien nul*.

ii) Les fonctions polyconvexes donnent des exemples de fonctions quasi-convexes mais non convexes. Ainsi, pour $m = N = 2$, $A \mapsto \det A$ est quasi-convexe, mais certainement pas convexe.

iii) S'il est relativement facile de construire des fonctions polyconvexes—il suffit de se donner G pour cela—il est par contre en général délicat de déterminer si une fonction donnée est polyconvexe ou non. En effet, il n'y a d'abord pas unicité de la fonction G . D'autre part, l'écriture sous laquelle on se donne F ne fait pas forcément apparaître clairement un candidat pour G . Par exemple, la fonction polyconvexe $F(A) = |A|^2 + 2 \det A$ peut aussi bien être écrite sous la forme

$$F(A) = (A_{11} + A_{22})^2 + (A_{12} + A_{21})^2 - 4A_{12}A_{21}.$$

iv) L'intérêt des fonctions polyconvexes tient aussi au fait qu'elles permettent de s'affranchir des conditions de croissance dont on a besoin pour l'existence de points de minimum dans le cas quasi-convexe. On peut ainsi résoudre des problèmes de minimisation vectoriels où la fonctionnelle peut prendre la valeur $+\infty$, comme c'est le cas en élasticité non linéaire. Ceci repose sur une étude assez technique des propriétés de continuité faible des mineurs du gradient, lesquelles sont dues à leur écriture sous forme divergence.

v) Dans le cas où F ne prend que des valeurs finies, on a montré les implications suivantes : F convexe $\Rightarrow F$ polyconvexe $\Rightarrow F$ quasi-convexe $\Rightarrow F$ rang-1-convexe. Il est remarquable qu'aucune des implications réciproques n'est vraie, sauf quand $m = 1$ ou $N = 1$, auxquels cas ces notions coïncident toutes. On ne dispose donc pas de critère aisément vérifiable de semi-continuité inférieure faible pour des fonctionnelles du calcul des variations dans le cas vectoriel. Notons que dans le cas où F est quadratique, c'est-à-dire où le système d'Euler-Lagrange (6.9) est linéaire, alors F rang-1-convexe est équivalent à F quasi-convexe. C'est d'ailleurs de cette façon que l'on construit des exemples de fonctions quasi-convexes mais non polyconvexes. \square

Annexe : démonstrations des résultats de semi-continuité inférieure

Dans cette annexe, outre le fait de démontrer quelques résultats admis précédemment, on introduit un certain nombre de techniques parfois un peu lourdes, mais utiles, du calcul des variations : *blow-up*, *slicing* de De Giorgi, etc. Ces démonstrations peuvent être allègrement passées en première lecture.

On commence par un lemme de prolongement dans $W^{1,\infty}$. On note B la boule unité de \mathbb{R}^N et S la sphère unité.

Lemme 31 Soit $\zeta^* \in W^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m)$ telle que $\|\zeta^*\|_{L^\infty(S; \mathbb{R}^m)} \leq k < 1$. Il existe une fonction $\zeta \in W^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m)$ telle que $\zeta = \zeta^*$ sur S , $\|\zeta\|_{L^\infty(B; \mathbb{R}^m)} \leq k$, $\zeta = 0$ sur $(1-k)B$ et $\|\nabla \zeta\|_{L^\infty(B; M_{mN})} \leq 2M + 1$ où $M = \|\nabla \zeta^*\|_{L^\infty(B; M_{mN})}$.

Démonstration. On pose pour $x \in \bar{B}$,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1-k, \\ \left(\frac{|x|+k-1}{k}\right) \zeta^*\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\zeta(x) = \left(\frac{|x|+k-1}{k}\right)_+ \zeta^*\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

de telle sorte que $\zeta \in W^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m)$, $\zeta = \zeta^*$ sur S , $\|\zeta\|_{L^\infty(B; \mathbb{R}^m)} \leq k$ et $\zeta = 0$ sur $(1-k)B$. De plus,

$$\nabla \zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1-k, \\ \frac{x}{k|x|} \otimes \zeta^*\left(\frac{x}{|x|}\right) + \left(\frac{|x|+k-1}{k|x|}\right) \nabla \zeta^*\left(\frac{x}{|x|}\right) \left(I - \frac{x \otimes x}{|x|^2}\right) & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où la majoration de la norme du gradient de ζ . \square

Remarque 54 Le prolongement proposé ici n'est pas particulièrement astucieux. En fait, on pourrait utiliser le prolongement de McShane : si u est une fonction Lipschitzienne sur un compact $K \subset \mathbb{R}^N$, de constante de Lipschitz M , alors il est facile de vérifier que $\tilde{u}(y) = \min_{x \in K} (u(x) + M|x-y|)$ réalise un prolongement Lipschitzien de u à \mathbb{R}^N tout entier, dont la constante de Lipschitz est encore M . Pour l'appliquer ici, il faut utiliser le fait que $W^{1,\infty}(B) = C^{0,1}(\bar{B})$, puis raisonner composante par composante. \square

Introduisons la notion d'*agrandissement* (*blow-up* en anglais) pour des fonctions scalaires, laquelle s'étend immédiatement aux fonctions vectorielles. Soit $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Pour $x_0 \in \Omega$ et $0 < \rho < d(x_0, \partial\Omega)$, on pose $y = (x - x_0)/\rho$ et

$$v_{x_0, \rho}(y) = \frac{v(x_0 + \rho y) - v(x_0)}{\rho}. \quad (6.15)$$

Il est clair que $v_{x_0, \rho} \in W^{1, \infty}(B)$, avec $\|v_{x_0, \rho}\|_{L^\infty(B)} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}$ et $\nabla v_{x_0, \rho}(y) = \nabla v(x_0 + \rho y)$ de telle sorte que

$$\|v_{x_0, \rho}\|_{W^{1, \infty}(B)} \leq \|v\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}. \quad (6.16)$$

L'intérêt de la notion d'agrandissement vient du lemme suivant.

Lemme 32 *Soit ρ_l une suite qui tend vers 0. Pour presque tout $x_0 \in \Omega$, la suite v_{x_0, ρ_l} définie par (6.15) tend uniformément sur \bar{B} vers la fonction linéaire $z_{x_0}: y \mapsto \nabla v(x_0) \cdot y$.*

En d'autres termes, l'agrandissement permet de « voir » le gradient de $v \in W^{1, \infty}(\Omega)$ en presque tout point. Le lemme montre aussi que les fonctions de $W^{1, \infty}(\Omega)$ sont presque partout localement très proches de leur application affine tangente.

Démonstration. Pour alléger la notation, on note la suite ρ_l simplement ρ , mais il convient de garder à l'esprit qu'il s'agit bien d'une suite. Soit A un représentant de ∇v , c'est-à-dire une fonction mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^N qui appartient à la classe d'équivalence de ∇v . Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Pour $\rho \leq d(\bar{\Omega}', \partial\Omega)$, on introduit une fonction de deux variables $h_\rho(x, y): \Omega' \times B \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h_\rho(x, y) = v_{x, \rho}(y) - A(x) \cdot y = \frac{v(x + \rho y) - v(x)}{\rho} - A(x) \cdot y.$$

On va montrer que cette suite de fonctions tend vers 0 dans $L^1(\Omega' \times B)$ fort quand $\rho \rightarrow 0$.

Pour cela, on fixe y et on considère la suite de fonctions $h_{y, \rho}(x) = h_\rho(x, y)$. Pour tout v dans $C^\infty(\bar{\Omega}')$, on a (il est inutile ici de distinguer entre ∇v et A)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |h_{y, \rho}(x)| dx &= \int_{\Omega'} \left| \int_0^1 [\nabla v(x + t\rho y) - \nabla v(x)] \cdot y dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \int_{\Omega'} |[\nabla v(x + t\rho y) - \nabla v(x)] \cdot y| dx dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de Meyers-Serrin, on peut approcher toute fonction de $W^{1, 1}(\Omega)$ par une suite de fonctions de $C^\infty(\Omega)$, donc l'inégalité a toujours lieu pour $v \in W^{1, 1}(\Omega)$. Or, la translation dans la direction y est continue dans $L^1(\Omega')$ (voir Brezis, Rudin), donc

$$\begin{cases} g_\rho(t) = \int_{\Omega'} |[\nabla v(x + t\rho y) - \nabla v(x)] \cdot y| dx \rightarrow 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0, \\ |g_\rho(t)| \leq 2 \text{mes } \Omega' \|v\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}, \end{cases}$$

et par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\int_{\Omega'} |h_{y, \rho}(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0$$

pour tout $y \in B$. Par ailleurs et comme plus haut, $\|h_\rho\|_{L^\infty(\Omega' \times B)} \leq 2\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, donc

$$\int_{\Omega'} |h_{y,\rho}(x)| dx \leq 2 \text{mes } \Omega' \|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

d'où, appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\Omega' \times B} |h_\rho(x,y)| dx dy = \int_B \left(\int_{\Omega'} |h_{y,\rho}(x)| dx \right) dy \longrightarrow 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0.$$

On a donc montré que $h_\rho \rightarrow 0$ dans $L^1(\Omega' \times B)$ fort quand $\rho \rightarrow 0$. Par le théorème de Fubini, on en déduit que pour presque tout $x \in \Omega'$, $v_{x,\rho}(y) - A(x) \cdot y$ tend vers 0 dans $L^1(B)$ quand $\rho \rightarrow 0$.

D'un autre côté, on a aussi

$$\|v_{x,\rho} - z_x\|_{W^{1,\infty}(B)} \leq 2\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

Par conséquent, fixant x_0 dans l'ensemble où la convergence ci-dessus a lieu, on peut extraire de la suite $v_{x_0,\rho} - z_{x_0}$ une sous-suite qui converge dans $W^{1,\infty}(B)$ faible-* vers un certain h_{x_0} . Par les injections de Sobolev et le théorème de Rellich-Kondrašov, la convergence est donc uniforme. Comme la suite converge aussi dans $L^1(B)$ vers 0, on voit que $h_{x_0} = 0$, ce qui conclut la démonstration du lemme. \square

Remarque 55 Le lemme 32 se généralise dans les espaces $W^{1,p}(\Omega)$. \square

Démonstration du théorème 78. Soit u_n une suite qui converge vers u au sens de $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ faible-* et soit $J = \liminf \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx$. Nous pouvons extraire une sous-suite (toujours notée u_n) telle que $\int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx \rightarrow J$. Comme la suite ∇u_n est bornée dans $L^\infty(\Omega; M_{mN})$ et que la fonction F est continue, $F(\nabla u_n)$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Nous pouvons donc extraire une autre sous-suite telle que $F(\nabla u_n) \xrightarrow{*} g$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible-*. Par conséquent, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable,

$$\int_A F(\nabla u_n) dx \rightarrow \int_A g dx. \quad (6.17)$$

Il nous suffit de montrer que $g \geq F(\nabla u)$ presque partout pour conclure. Pour cela on considère un point de Lebesgue x_0 de g (l'ensemble des points de Lebesgue étant de mesure pleine). Par définition des points de Lebesgue, on a

$$g(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^N \text{mes } B} \int_{B(x_0,\rho)} g(x) dx.$$

Par conséquent, par (6.17), il vient (attention à l'ordre des limites),

$$g(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho^N \text{mes } B} \int_{B(x_0,\rho)} F(\nabla u_n(x)) dx.$$

On effectue alors un agrandissement autour de x_0 , ce qui donne

$$g(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mes } B} \int_B F(\nabla u_{n,x_0,\rho}(y)) dy.$$

Par le lemme 32, nous pouvons supposer que x_0 est aussi un point de convergence de l'agrandissement de u . Prenons $\rho = 1/k$ et posons

$$I_{n,k} = \frac{1}{\text{mes } B} \int_B F(\nabla u_{n,x_0,1/k}(y)) dy.$$

On va extraire une suite diagonale qui réalise à la fois la double limite et la convergence uniforme. Pour cela, on note que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe k_l tel que

$$\left| \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,k} - \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,k_l} \right| \leq \frac{1}{2l} \quad \text{et} \quad \|u_{x_0,1/k_l} - \nabla u(x_0)y\|_{L^\infty(B;\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2l},$$

par le lemme 32 pour la deuxième inégalité. Fixons cet indice k_l . Il existe alors n_l tel que

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,k_l} - I_{n_l,k_l} \right| \leq \frac{1}{2l} \quad \text{et} \quad \|u_{x_0,1/k_l} - u_{n_l,x_0,1/k_l}\|_{L^\infty(B;\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2l}.$$

En effet, pour la deuxième inégalité, on remarque que, comme $u_n \rightarrow u$ dans $L^\infty(B;\mathbb{R}^m)$ fort quand $n \rightarrow +\infty$ par le théorème de Rellich-Kondrašov, à k fixé $u_{n,x_0,1/k} \rightarrow u_{x_0,1/k}$ dans $L^\infty(B;\mathbb{R}^m)$ fort quand $n \rightarrow +\infty$ (il n'y a plus de gradients !). Nous avons donc construit une suite diagonale (k_l, n_l) telle que

$$g(x_0) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mes } B} \int_B F(\nabla u_{n_l,x_0,1/k_l}(y)) dy \quad \text{et} \quad \|u_{n_l,x_0,1/k_l} - \nabla u(x_0)y\|_{L^\infty(B;\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{l}. \quad (6.18)$$

On pose

$$w_l(y) = u_{n_l,x_0,1/k_l}(y) - \nabla u(x_0)y.$$

Par le lemme 31, il existe donc $\zeta_l \in W^{1,\infty}(B;\mathbb{R}^m)$ telle que $\zeta_l = w_l$ sur S , $\zeta_l = 0$ sur $(1 - \frac{1}{l})B$ et $\|\zeta_l\|_{W^{1,\infty}(B;\mathbb{R}^m)} \leq C$. En effet, comme $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ faible-*, $u_{n,x_0,\rho}$ est borné dans $W^{1,\infty}(B, \mathbb{R}^m)$ indépendamment de n , x_0 et ρ , cf. 6.16. Posant $A = \nabla u(x_0)$, il vient

$$\nabla u_{n_l,x_0,1/k_l}(y) = A + \nabla w_l(y) = A + \nabla(w_l - \zeta_l)(y) + \nabla \zeta_l(y), \quad (6.19)$$

avec $w_l - \zeta_l \in W_0^{1,\infty}(B;\mathbb{R}^m)$, $\|\nabla \zeta_l\|_{L^\infty(B;M_{mN})} \leq C$ et $\nabla \zeta_l = 0$ sur $(1 - \frac{1}{l})B$.

Comme la fonction F est continue, elle est uniformément continue sur les compacts de M_{mN} . Soit K la boule de rayon C dans M_{mN} , et soit ω_K le module de continuité uniforme de F sur ce compact. C'est une fonction croissante de $[0, C]$

dans \mathbb{R}^+ telle que $\omega_K(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ et telle que pour tout couple de matrices $A, B \in K$,

$$|F(A) - F(B)| \leq \omega_K(|A - B|).$$

Utilisant alors (6.19), on obtient

$$F(\nabla u_{n_l, x_0, 1/k_l}(y)) = F(A + \nabla(w_l - \zeta_l)(y)) + r_l(y),$$

avec

$$|r_l(y)| \leq \omega_K(|\nabla \zeta_l(y)|).$$

Par conséquent, intégrant cette égalité sur B , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{mes} B} \int_B F(\nabla u_{n_l, x_0, 1/k_l}(y)) dy &= \frac{1}{\text{mes} B} \int_B F(A + \nabla(w_l - \zeta_l)(y)) dy \\ &\quad + \frac{1}{\text{mes} B} \int_B r_l(y) dy. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Pour le premier terme du membre de droite de (6.20), on utilise la quasi-convexité de F qui donne

$$\frac{1}{\text{mes} B} \int_B F(A + \nabla(w_l - \zeta_l)(y)) dy \geq F(A) = F(\nabla u(x_0)). \quad (6.21)$$

Pour le terme restant, on note que

$$\begin{aligned} \left| \int_B r_l(y) dy \right| &\leq \int_B \omega_K(|\nabla \zeta_l(y)|) dy = \int_{B \setminus (1-1/l)B} \omega_K(|\nabla \zeta_l(y)|) dy \\ &\leq (1 - (1 - 1/l)^N) (\text{mes} B) \omega_K(C) \longrightarrow 0 \text{ quand } l \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (6.22)$$

car $\nabla \zeta_l = 0$ sur $(1 - \frac{1}{l})B$. Regroupant (6.18), (6.20), (6.21) et (6.22), on voit que

$$g(x_0) \geq F(\nabla u(x_0)),$$

ce qui montre que la fonctionnelle I est séquentiellement faiblement-* semi-continue inférieurement sur $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. \square

Remarque 56 La difficulté vient du fait que la convergence dans $W^{1,\infty}$ faible-*, si elle implique bien la convergence uniforme des fonctions, *n'implique par contre pas* que les gradients convergent presque partout, bien au contraire.

On a utilisé une limite faible-* de fonctions de la forme $F(\nabla u_n)$, ce qui fait penser aux mesures de Young. Il existe effectivement des démonstrations de ce type de résultat à base de mesures de Young.

Remarquons enfin que pour la semi-continuité inférieure faible-* dans $W^{1,\infty}$, il n'y a pas besoin de condition de croissance ou de borne inférieure sur F . \square

Passons maintenant à une démonstration du Théorème 79, démonstration due à Marcellini. On procède en quatre étapes. La première étape consiste à étendre l'inégalité de quasi-convexité à des fonctions $W_0^{1,p}$.

Lemme 33 Soit F une fonction quasi-convexe vérifiant l'hypothèse de croissance du Théorème 79. Alors pour tout $A \in M_{mN}$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, on a

$$\int_{\Omega} F(A + \nabla v) dx \geq \text{mes } \Omega F(A). \quad (6.23)$$

Démonstration. Par définition, $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ pour la norme de $W^{1,p}$. Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, on peut donc trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $\nabla \varphi_n \rightarrow \nabla v$ presque partout et $|\nabla \varphi_n| \leq g$ avec $g \in L^p(\Omega)$ par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Grâce à l'hypothèse de croissance, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée lui-même pour en déduire que $\int_{\Omega} F(A + \nabla \varphi_n) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(A + \nabla v) dx$, d'où le résultat. \square

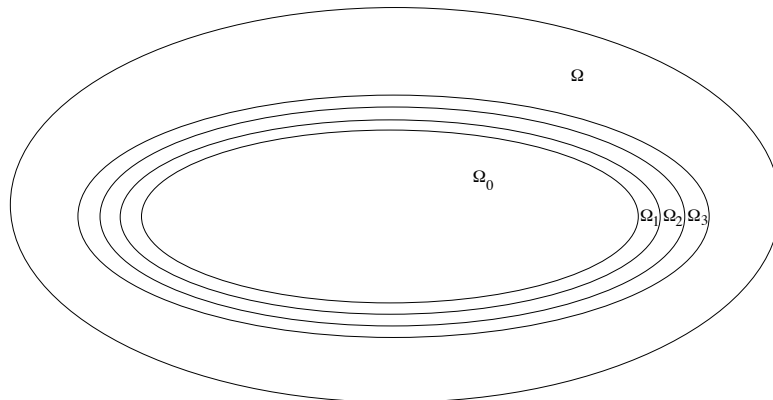
La deuxième étape est le cas où la limite faible est une fonction affine.

Lemme 34 Soit $A \in M_{mN}$ une matrice fixée, $b \in \mathbb{R}^m$ et u_n une suite de fonctions de $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $u_n \rightharpoonup u = Ax + b$. Alors $\liminf I(u_n) \geq I(u)$.

Démonstration. Si les valeurs au bord de u_n étaient les mêmes que celles de u , alors le résultat serait une conséquence immédiate de la quasi-convexité en version $W^{1,p}$ (6.23) en posant $v = u_n - u$. Le problème est donc de se ramener à cette situation. Pour cela, on emploie la technique dite du *slicing* (saucissonnage ?) de De Giorgi.

Soit $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert dont l'adhérence est un compact de Ω . On pose $R = \frac{1}{2}d(\bar{\Omega}_0, \partial\Omega) > 0$, on fixe un entier k et pour $i = 1, \dots, k$, on note

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega; d(x, \Omega_0) < \frac{i}{k}R \right\}.$$



Un slicing à trois tranches

Par construction, Ω_i est un ouvert inclus dans Ω , dont l'adhérence est compacte dans Ω et qui contient $\bar{\Omega}_0$. Pour $i = 1, \dots, k$, il existe des fonctions régulières (C^∞) ϕ_i telles que

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \phi_i = 1 \text{ sur } \Omega_{i-1}, \phi_i = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega_i \text{ et } |\nabla \phi_i| \leq \frac{k+1}{R}.$$

Pour les construire, on peut par exemple régulariser les fonctions lipschitziennes $x \mapsto \frac{d(x, \Omega \setminus \Omega_i)}{d(x, \Omega \setminus \Omega_i) + d(x, \Omega_{i-1})}$ (on note que la régularisation par convolution d'une fonction lipschitzienne diminue sa constante de Lipschitz, d'où l'estimation sur les gradients).

Posons alors

$$v_{n,i} = u + \phi_i(u_n - u).$$

L'intérêt de cette construction est que $v_{n,i} = u_n$ sur Ω_{i-1} , c'est-à-dire sur la plus grande partie de Ω et se recolle à u au voisinage de $\partial\Omega$. De plus, comme $\phi_i(u_n - u) \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, par quasi-convexité, il vient

$$\text{mes } \Omega F(A) = \int_{\Omega} F(\nabla u) dx \leq \int_{\Omega} F(\nabla v_{n,i}) dx.$$

Par construction des fonctions $v_{n,i}$, on a aussi

$$\int_{\Omega} F(\nabla v_{n,i}) dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_i} F(\nabla u) dx + \int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i}) dx + \int_{\Omega_{i-1}} F(\nabla u_n) dx. \quad (6.24)$$

L'intégrale du milieu est une intégrale sur une tranche du saucisson. On remarque que comme $F \geq 0$,

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_i} F(\nabla u) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} F(\nabla u) dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_{i-1}} F(\nabla u_n) dx \leq \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx.$$

Par conséquent, en additionnant les inégalités (6.24) de $i = 1$ à $i = k$ et en divisant par k , on obtient l'estimation

$$\int_{\Omega} F(\nabla u) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} F(\nabla u) dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega_k \setminus \Omega_0} \left(\sum_i \mathbf{1}_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i}) \right) dx + \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx \quad (6.25)$$

Les deux termes extrêmes sont bien adaptés à un passage à la limite inférieure en n , reste à contrôler le terme du milieu en montrant qu'on peut le rendre aussi petit que l'on veut. Pour cela, on revient à la définition de $v_{n,i}$, d'où il vient

$$\nabla v_{n,i} = (1 - \phi_i) \nabla u + \phi_i \nabla u_n + (u_n - u) \otimes \nabla \phi_i.$$

Par conséquent,

$$|\nabla v_{n,i}|^p \leq C \left(1 + |\nabla u|^p + |\nabla u_n|^p + \left(\frac{k+1}{R} \right)^p |u_n - u|^p \right).$$

Par l'hypothèse de croissance sur F , on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k \setminus \Omega_0} \left(\sum_i \mathbf{1}_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i}) \right) dx &\leq C \left(1 + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega; M_{mN})}^p + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega; M_{mN})}^p \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k+1}{R} \right)^p \|u_n - u\|_{L^p(\Omega_k \setminus \Omega_0; M_{mN})}^p \right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

où la constante C ne dépend pas de k . Comme $u_n \rightarrow u$, on a que ∇u_n est borné dans L^p , et (c'est là qu'est la subtilité !) $u_n \rightarrow u$ dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ fort, par le théorème de Rellich. En particulier, on voit que $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega_k \setminus \Omega_0; M_{mN})} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent, faisant tendre n vers $+\infty$ dans les inégalités (6.25) et (6.26), on obtient,

$$\int_{\Omega} F(\nabla u) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} F(\nabla u) dx + \frac{C}{k} + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx,$$

avec C encore une fois indépendante de k . On conclut alors en faisant tout d'abord tendre k vers $+\infty$, puis en prenant une suite d'ouverts Ω_0 tels que $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) \rightarrow 0$. \square

Remarque 57 Un raccordement plus simple entre u_n et u qui consisterait à n'utiliser qu'une seule fonction ϕ ne permettrait pas de récupérer le facteur crucial en $1/k$ du slicing (on peut quand même faire fonctionner un argument à une seule fonction). Remarquer que les différentes tranches du slicing sont décalées les unes par rapport aux autres, si bien que l'addition de leur contributions se traduit par une intégrale sur la réunion des tranches. Dans cette contribution, le terme a priori mauvais, c'est-à-dire celui qui contient les gradients des fonctions de recollement ϕ_i , est contrôlé par convergence forte dans L^p . À ce propos, il faut prendre garde à considérer des fonctions dans un compact de Ω pour pouvoir appliquer le théorème de Rellich en l'absence d'hypothèse de régularité sur Ω . \square

Dans une troisième étape, on montre qu'une fonction quasi-convexe à croissance en puissance p est en fait localement lipschitzienne, avec une estimation de la constante de Lipschitz.

Lemme 35 Soit F une fonction quasi-convexe vérifiant l'hypothèse de croissance du Théorème 79. Alors il existe une constante C telle que pour tous $A, B \in M_{mN}$, on a

$$|F(B) - F(A)| \leq C(1 + |A|^{p-1} + |B|^{p-1})|B - A|. \quad (6.27)$$

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où F est différentiable (le cas général fonctionne de la même façon en utilisant la différentiabilité presque partout des fonctions convexes).

Soit E_{ij} la matrice élémentaire ayant des 0 partout sauf en position i, j où elle a un 1. C'est une matrice de rang un, donc l'application $t \mapsto F(A + tE_{ij})$ est convexe. Elle est donc supérieure à son application affine tangente, c'est-à-dire que

$$F(A + tE_{ij}) \geq F(A) + t \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}(A)$$

pour tout t réel. En particulier, prenant $t = \pm(1 + |A|)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}(A) \right| &\leq \frac{\max(|F(A + (1 + |A|)E_{ij}) - F(A)|, |F(A - (1 + |A|)E_{ij}) - F(A)|)}{1 + |A|} \\ &\leq \frac{C(1 + |A|^p)}{1 + |A|} \leq C(1 + |A|^{p-1}). \end{aligned} \quad (6.28)$$

On écrit alors

$$F(B) - F(A) = \int_0^1 DF(tB + (1-t)A)(B - A) dt,$$

et l'on conclut par l'estimation (6.28) des dérivées de F . \square

La dernière étape consiste à traiter le cas d'une limite faible quelconque en l'approchant localement par des fonctions affines adéquatement recollées les unes aux autres.

Lemme 36 Soit $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Alors $\liminf I(u_n) \geq I(u)$.

Démonstration. On utilise d'abord le fait que si $v \in L^p(\Omega)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable de cubes ouverts disjoints Q_i tels que $\bar{\Omega} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \bar{Q}_i$ et si l'on note $\bar{v}_i = \frac{1}{\text{mes } Q_i} \int_{Q_i} v(y) dy$ la moyenne de v sur le cube Q_i , et $\bar{v}(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{v}_i \mathbf{1}_{Q_i}(x)$ la fonction constante par morceaux construite sur ces moyennes, on a

$$\int_{\Omega} |v(x) - \bar{v}(x)|^p dx = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} |v(x) - \bar{v}_i|^p dx \leq \varepsilon^p.$$

Pour montrer cela, on utilise la densité des fonctions continues à support compact dans L^p , le fait que l'application $v \mapsto \bar{v}$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ et enfin celui que l'inégalité ci-dessus est facile à obtenir pour une fonction continue à support compact. En effet, un calcul immédiat montre que

$$\int_{Q_i} |v(x) - \bar{v}_i|^p dx \leq \frac{1}{\text{mes } Q_i} \int_{Q_i \times Q_i} |v(x) - v(y)|^p dx dy.$$

Par conséquent, si v est uniformément continue, il suffit de choisir le diamètre des cubes suffisamment petit pour que $|v(x) - v(y)| \leq \varepsilon \operatorname{mes} \Omega^{1/p}$ pour conclure dans ce cas.

Choisissons donc $\varepsilon > 0$ et $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la famille de cubes associée à ∇u par la remarque précédente. Pour chaque i fixé, on définit sur Q_i la suite

$$u_{n,i}(x) = u_n(x) - u(x) + (\overline{\nabla u})_i x.$$

Par construction, $u_{n,i} \rightarrow (\overline{\nabla u})_i x$ dans $W^{1,p}(Q_i; \mathbb{R}^m)$. Par le Lemme 34, on a donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \geq \int_{Q_i} F((\overline{\nabla u})_i) dx,$$

d'où en sommant sur tous les cubes

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F((\overline{\nabla u})_i) dx. \quad (6.29)$$

Regardons le terme de gauche de cette inégalité. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx - \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \left[F(\nabla u_n) - \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) \right] dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} |F(\nabla u_n) - F(\nabla u_{n,i})| dx. \end{aligned}$$

Or par le Lemme 35, on sait que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} |F(\nabla u_n) - F(\nabla u_{n,i})| &\leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} (1 + |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u_{n,i}|^{p-1}) |\nabla u_n - \nabla u_{n,i}| \\ &= C \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} (1 + |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u_{n,i}|^{p-1}) |\nabla u - (\overline{\nabla u})_i| \\ &\leq C \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} (1 + |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u_{n,i}|^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} (1 + |\nabla u_n|^p + |\nabla u_{n,i}|^p) \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C (1 + |\nabla u_n|^p + |(\overline{\nabla u_n})|^p)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

en notant $\overline{(\nabla u_n)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{Q_i} \nabla u_{n,i}$. On a utilisé en cours de route l'inégalité de Hölder. Intégrant alors sur Ω et réutilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx - \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \right| \leq C(1 + \|\nabla u_n\|_{L^p}^{p-1} + \|\overline{(\nabla u_n)}\|_{L^p}^{p-1}) \\ \times \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} |\nabla u - \overline{(\nabla u)}_i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Or ∇u_n et $\overline{(\nabla u_n)}$ sont manifestement bornés dans $L^p(\Omega; M_{mN})$ indépendamment de n et de ε , donc

$$\left| \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx - \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx \right| \leq C\varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\nabla u_{n,i}) dx - C\varepsilon. \quad (6.30)$$

Pour le terme de droite de l'inégalité (6.29), on établit de la même façon que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{Q_i} F(\overline{(\nabla u)}_i) dx \geq \int_{\Omega} F(\nabla u) dx - C\varepsilon. \quad (6.31)$$

La semi-continuité inférieure découle alors immédiatement des inégalités (6.29), (6.30) et (6.31). \square

Remarque 58 On peut donner une démonstration plus simple du dernier lemme dans le cas où Ω est régulier et où l'on admet la densité de l'ensemble des fonctions affines par morceaux dans $W^{1,p}(\Omega)$, un résultat classique pour la théorie des éléments finis, mais qui demande des connaissances sur les triangulations d'un tel ouvert de \mathbb{R}^n .

En effet, on commence par montrer le résultat pour u affine par morceaux. Soit Ω_i , $i = 1, \dots, k$, une partition de Ω telle que u est affine sur chaque Ω_i . On a donc

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} F(\nabla u_n) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^k \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_i} F(\nabla u_n) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} F(\nabla u) dx \\ &= \int_{\Omega} F(\nabla u) dx, \end{aligned}$$

grâce au Lemme 34.

Soit maintenant $u \in W^{1,p}(\Omega)$ quelconque et u_k une suite de fonctions affines par morceaux qui tend fortement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. On en déduit que $u_n - u + u_k \rightharpoonup u_k$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$, d'où

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\nabla u_n - \nabla u + \nabla u_k) dx \geq \int_{\Omega} F(\nabla u_k) dx,$$

d'après ce qui précède. Or $F(\nabla u_n) = F(\nabla u_n - \nabla u + \nabla u_k) + F(\nabla u_n) - F(\nabla u_n - \nabla u + \nabla u_k)$. Donc, par le Lemme 35, on a

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(\nabla u_n) dx &\geq \int_{\Omega} F(\nabla u_k) dx \\ &- C \limsup_{n \rightarrow +\infty} (1 + \|\nabla u_n\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla u_k\|_{L^p})^{p-1} \|\nabla u - \nabla u_k\|_{L^p}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

par l'inégalité de Hölder, d'où le résultat en faisant tendre k vers l'infini (on utilise la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, puis la croissance de F et le théorème de convergence dominée lui-même pour passer à la limite dans l'intégrale du membre de droite, comme d'habitude). \square

Exercices du chapitre 6

1. Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer en vous inspirant des raisonnements liés à la rang-1-convexité que si la fonctionnelle $u \mapsto \int_0^1 F(u'(x)) dx$ est faiblement-* séquentiellement semicontinue inférieure sur $W^{1,\infty}(]0, 1[)$, alors F est convexe.

2. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $p \geq 1$ et $f \in L^q(\Omega)$. Montrer que si $q \geq \frac{2N}{N+2}$ alors $L^q(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. On se place dans ce cas, et on considère l'énergie définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{p+1} |v|^{p+1} \right) dx - \int_{\Omega} f v dx$$

si $v \in L^{p+1}(\Omega)$, $I(v) = +\infty$ sinon. Montrer que le problème de minimisation

$$I(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} I(v)$$

admet une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$, qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$-\Delta u + |u|^{p-1} u = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega).$$

3. Soit V un espace de Banach uniformément convexe (par exemple un espace de Hilbert, un espace de Sobolev construit sur L^p avec $1 < p < +\infty$, etc.) et I une fonctionnelle sur V convexe, s.c.i., différentiable au sens de Gâteaux et telle qu'il existe $\delta > 0$ avec

$$I(v) \geq I(u) + \langle DJ(u), v - u \rangle + \delta \|u - v\|_V^2,$$

pour tous $u, v \in V$ (le crochet désigne la dualité V', V). Montrer que I atteint son minimum sur V et qu'en plus, toute suite minimisante converge *fortement* dans V vers un minimiseur.

4. Montrer que la fonctionnelle I de l'exercice 1 est deux fois différentiable au sens de Gâteaux et que sa différentielle seconde satisfait une inégalité du type $D^2I(u)(v, v) \geq 2\delta \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2$ (prendre $p \leq \frac{N+2}{N-2}$). Utiliser alors l'exercice 2 pour montrer que les suites minimisantes de l'exercice 1 convergent fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

5. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $F: M_{2,2} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(A) = \frac{1}{2}|A|^2 + \sqrt{\det A^2 + 1},$$

et $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$|\Phi(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^q)$$

pour un certain $1 \leq q < 2$. On pose

$$J(u) = \int_{\Omega} F(\nabla u) dx - \int_{\Omega} \Phi(u) dx.$$

Montrer que J est bien définie sur $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, qu'elle y atteint son minimum et écrire le système d'EDP quasi-linéaires ainsi résolu.

6. Soit $\Omega =]0, 1[^2$. On considère la suite

$$u_n(x) = n^{-1/2}(1 - x_2)^n \begin{pmatrix} \sin nx_1 \\ \cos nx_1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$, mais que

$$\int_{\Omega} \det \nabla u_n dx = -1.$$

En déduire que la fonctionnelle $J(u) = \int_{\Omega} \det \nabla u dx$ n'est pas faiblement sci sur $H^1(\Omega)$. Montrer que la fonctionnelle $I(u) = \int_{\Omega} |\det \nabla u| dx$ l'est par contre, et méditer sur ce que révèle cet exemple.