Chapitre 5

Principe du maximum, régularité elliptique et applications

On regroupe sous le nom générique de principe du maximum un ensemble de résultats de deux types. L'un concerne les points de maximum ou de minimum de solutions de certains problèmes aux limites, l'autre des propriétés de dépendance monotone de cette solution par rapport aux données. Il y a en plus deux grands cadres, le cadre dit « fort », où l'on s'intéresse aux solutions au sens classique, et le cadre dit « faible » où l'on considère des solutions variationnelles.

5.1 Le principe du maximum fort

Commençons par une première version du principe du maximum fort.

Théorème 49 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $C^0(\bar{\Omega})$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, un vecteur $b \in C^0(\bar{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et une fonction $c \in C^0(\bar{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$. Toute fonction $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ qui satisfait*

$$\begin{cases} -a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \geq 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ u(x) \geq 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

est positive ou nulle dans $\bar{\Omega}$.

Remarque 32 En d'autre termes, si l'on introduit l'opérateur différentiel du second ordre $L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$, si une fonction u avec la régularité indiquée est solution du problème aux limites $Lu = f$ dans Ω, $u = g$ sur $\partial\Omega$, avec $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors $u \geq 0$. C'est un résultat de monotonie : si f représente une « force », alors la solution u va dans le sens où tire la force, si celui-ci est défini. □

Le résultat repose sur la remarque suivante.

Lemme 22 *Soit $L' = -a_{ij}\partial_{ij}$. Si $u \in C^2(\Omega)$ atteint un minimum local en un point x_0 de Ω, alors $L'u(x_0) \leq 0$.*

Démonstration. La matrice $D^2u(x_0)$ est symétrique. Elle est donc orthogonalement diagonalisable. Soient $\xi_k \in \mathbb{R}^N$, $|\xi_k| = 1$, $k = 1,\ldots,N$ une base de vecteurs propres et λ_k les valeurs propres associées. On peut donc écrire $D^2u(x_0) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \xi_k \otimes \xi_k$ (on rappelle que le produit tensoriel de deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^N$ peut être identifié à la matrice $N \times N$ de composantes $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$. L'action de cette matrice de rang un sur un vecteur c est donnée par $(a \otimes b)c = (c \cdot b)a$). Introduisons les fonctions d'une variable réelle $g_k(t) = u(x_0 + t\xi_k)$. Comme $x_0 \in \Omega$, ces fonctions sont bien définies et de classe C^2 dans un voisinage de 0. De plus, elles ont un minimum local en $t = 0$. Par conséquent, par la formule de Taylor, $\frac{d^2 g_k}{dt^2}(0) \geq 0$. Or $\frac{d^2 g_k}{dt^2}(0) = D^2u(x_0)(\xi_k, \xi_k) = \lambda_k$, donc toutes les valeurs propres de $D^2u(x_0)$ sont positives.

On note maintenant que, comme A est symétrique,

$$\begin{aligned} L'u(x_0) = -a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) &= -\mathrm{tr}\,(a(x_0)D^2u(x_0)) \\ &= -\textstyle\sum_{k=1}^N \lambda_k \mathrm{tr}\,(a(x_0)\xi_k \otimes \xi_k) \\ &= -\textstyle\sum_{k=1}^N \lambda_k a_{ij}(x_0)\xi_{k,i}\xi_{k,j} \\ &\leq -\lambda \textstyle\sum_{k=1}^N \lambda_k \leq 0, \end{aligned}$$

à cause de la coercivité de la matrice A. □

On note que le résultat persiste si $\lambda = 0$. Utilisons ce lemme pour caractériser le minimum de u.

Lemme 23 *Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu \geq 0$ dans Ω. Alors*
(i) *si $c = 0$ on a $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$,*
(ii) *si $c \geq 0$, on a $\min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u_-)$.*

Remarquons que le point (ii) n'a d'intérêt spécifique que si $c \not\equiv 0$.

Démonstration. Comme Ω est borné, $\bar{\Omega}$ est compact et u y atteint son minimum.

Démontrons (i). On suppose dans un premier temps que $Lu \geq \eta > 0$ dans Ω. Si u atteint son minimum sur $\partial\Omega$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que u atteigne son minimum en un point x_0 de Ω. En ce point intérieur, $Du(x_0) = 0$, donc $Lu(x_0) = L'u(x_0) \leq 0$ d'après le lemme 22, contradiction.

Supposons maintenant que $Lu \geq 0$ dans Ω. On va se ramener au cas précédent. Posons $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}$, les constantes ε et γ étant à choisir astucieusement. Par un calcul élémentaire, on a

$$L(e^{\gamma x_1}) = (-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Choisissons γ assez grand pour que $\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{C^0(\bar{\Omega})}\gamma > 0$. Comme $a_{11}(x) \geq \lambda$ (prendre $\xi = e_1$ dans l'inégalité de coercivité) et $|b_1(x)| \leq \|b_1\|_{C^0(\bar{\Omega})}$, on voit que

$$-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma \leq -\lambda\gamma^2 + \|b_1\|_{C^0(\bar{\Omega})}\gamma < 0.$$

Par conséquent

$$-L(e^{\gamma x_1}) \geq (\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{C^0(\bar{\Omega})}\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Si l'on pose $\eta = \varepsilon(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{C^0(\bar{\Omega})}\gamma)\min_{\bar{\Omega}}(e^{\gamma x_1})$, alors $\eta > 0$, puisque Ω est borné et

$$Lu_\varepsilon = Lu - \varepsilon L(e^{\gamma x_1}) \geq \eta > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Donc, on est dans le cas précédent, u_ε atteint son minimum sur $\partial\Omega$, *i.e.*,

$$\min_{x\in\bar{\Omega}}(u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \min_{x\in\partial\Omega}(u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Faisons alors tendre ε vers 0. Comme $\varepsilon e^{\gamma x_1}$ tend uniformément vers 0 sur $\bar{\Omega}$, les minima convergent et on en déduit le résultat pour le cas (i).

Traitons le cas (ii). Si $u \geq 0$ dans Ω, alors, $u \geq 0$ sur $\bar{\Omega}$ par continuité, donc $\min_{\bar{\Omega}} u \geq 0$ d'une part et $u_- = 0$ d'autre part, donc il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc que u prend des valeurs strictement négatives dans Ω et posons $\Omega_- = \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$. C'est un ouvert non vide. De plus, $\bar{L}u = Lu - cu \geq 0$ dans Ω_- et $\bar{L}$ n'a pas de terme d'ordre 0. D'après le cas (i), on a donc

$$\min_{x\in\overline{\Omega_-}}(u(x)) = \min_{x\in\partial\Omega_-}(u(x)).$$

Or il est clair que

$$\min_{x\in\overline{\Omega_-}}(u(x)) = \min_{x\in\bar{\Omega}}(u(x))$$

par définition de Ω_- puisqu'en dehors de Ω_- où u est strictement négative, u est positive. Par ailleurs, $u \leq 0$ sur $\partial\Omega_-$, donc $u = -u_-$ sur $\partial\Omega_-$. De plus, $\partial\Omega_- = (\partial\Omega_- \cap \Omega) \cup (\partial\Omega_- \cap \partial\Omega)$. Or si $x \in \partial\Omega_- \cap \Omega$ alors $u(x) = 0$ (sinon, $u(x) < 0$ implique $x \in \Omega_-$), donc, comme $\min_{\bar{\Omega}} u < 0$, on voit que

$$\min_{x\in\partial\Omega_-}(u(x)) = \min_{x\in\partial\Omega_-}(-u_-(x)) = \min_{x\in\partial\Omega_-\cap\partial\Omega}(-u_-(x)) = \min_{x\in\partial\Omega}(-u_-(x)),$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Démonstration du théorème 49. On applique le lemme 23 (ii). Si $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u_- = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, $\min_{\bar{\Omega}} u \geq 0$. $\square$

Remarque 33 (i) On voit donc que si $c = 0$ ou si u prend des valeurs négatives, alors u atteint son minimum au bord de l'ouvert. Par contre, si u ne prend pas de valeurs négatives sur le bord et c n'est pas nul, on ne peut rien dire du point où le minimum est atteint. On a bien sûr un résultat analogue avec les maximums en inversant tous les signes.

(ii) Le principe du maximum est encore vrai, mais nettement plus délicat à montrer sous des hypothèses de régularité plus faibles, $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, et $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Cette version du principe du maximum fort, plus exactement du lemme 22, est due à Bony.

(iii) Mentionnons que le principe du maximum est spécifique aux équations elliptiques du second ordre. En d'autres termes, il n'a pas d'analogue, sauf exception, ni pour les systèmes d'équations, ni pour les équations elliptiques d'ordre plus élevé.

(iv) Le principe du maximum fort entraîne l'unicité de la solution du problème de Dirichlet dans la classe $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. En effet, $Lu = 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ entraîne $u \geq 0$ et $u \leq 0$ dans Ω. □

On va raffiner l'étude des points de minimum de u par un résultat dû à Hopf. Pour cela, on doit supposer une certaine régularité de la frontière de Ω. Par exemple, la condition de sphère intérieure qui suppose qu'en tout point x de $\partial\Omega$, il existe une boule ouverte $B(y,R)$ incluse dans Ω telle que $x \in \bar{B}(y,R)$ (intuitivement, cette boule intérieure est « tangente » à $\partial\Omega$). On définit alors un vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ en x, noté n, comme étant le vecteur $(x-y)/R$. La terminologie « extérieur » est un peu trompeuse ici, car rien n'empêche Ω d'être situé des deux côtés de $\partial\Omega$.

Théorème 50 *Supposons que Ω satisfait une condition de sphère intérieure et soient L et $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaisant les mêmes hypothèses que précédemment. Si u atteint un minimum local strict en un point x_0 de $\partial\Omega$ dans le cas où $c = 0$, ou bien un minimum local strict négatif dans le cas où $c \geq 0$, alors*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = n_i(x_0)\partial_i u(x_0) < 0. \tag{5.1}$$

Remarque 34 En un tel point, la dérivée directionnelle pointant vers l'extérieur est nécessairement négative (considérer la fonction $t \mapsto u(x_0 - tn(x_0))$ pour $t > 0$). Le théorème de Hopf assure qu'elle est en fait strictement négative. Heuristiquement, si cette dérivée était nulle, alors $t \mapsto u(x_0 - tn(x_0))$ aurait tendance à être convexe au voisinage de 0, ce qui est essentiellement interdit par $Lu \geq 0$. Bien entendu, ceci ne constitue pas une démonstration. □

Démonstration. Soit $B(y_0,R)$ la boule associée au point x_0 par la condition de sphère intérieure. On peut toujours choisir R suffisamment petit pour que $u(x_0) < u(x)$ pour tout $x \in B(y_0,R)$, puisque x_0 est un point de minimum local strict. On pose

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y_0|^2} - e^{-\gamma R^2},$$

où γ est une constante à choisir. Par construction, $v(x) = 0$ sur la sphère $S(y_0,R)$ de centre y_0 et de rayon R, en particulier en x_0, et $v > 0$ dans la boule $B(y_0,R)$.

Par un calcul élémentaire, on trouve

$$Lv(x) = \big[-4\gamma^2 a_{ij}(x)(x_i - y_{0i})(x_j - y_{0j}) + 2\gamma\big(a_{ii}(x) - b_i(x)(x_i - y_{0i})\big)\big]e^{-\gamma|x-y_0|^2} + c(x)v(x).$$

Par conséquent, en raison de la coercivité de A et du fait que $c(x)e^{-\gamma R^2} \geq 0$, on voit que

$$Lv(x) \leq \big[-4\gamma^2\lambda|x-y_0|^2 + 2\gamma\big(a_{ii}(x) + |b_i(x)||x_i - y_{0i}|\big) + c(x)\big]e^{-\gamma|x-y_0|^2}.$$

En particulier, si $x \in O = B(y_0,R) \setminus \bar{B}(y_0,R/2)$,

$$Lv(x) \leq \big[-\gamma^2\lambda R^2 + 2\gamma\big(\|a\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|b\|_{C^0(\bar{\Omega})}R\big) + \|c\|_{C^0(\bar{\Omega})}\big]e^{-\gamma|x-y_0|^2}.$$

Choisissant γ assez grand pour que

$$-\gamma^2\lambda R^2 + 2\gamma\big(\|a\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|b\|_{C^0(\bar{\Omega})}R\big) + \|c\|_{C^0(\bar{\Omega})} < 0,$$

on voit donc que pour $x \in \bar{O}$, $Lv(x) < 0$.

Considérons maintenant la fonction

$$z(x) = u(x) - u(x_0) - \varepsilon v(x).$$

Sur l'ouvert O, $Lz = Lu - cu(x_0) - \varepsilon Lv > 0$. En effet, soit $c = 0$, soit $c \geq 0$ avec $c \not\equiv 0$ auquel cas on a supposé $u(x_0) \leq 0$. De plus, $\partial O = S(y_0,R) \cup S(y_0,R/2)$. Sur la sphère $S(y_0,R)$, $z = u - u(x_0) \geq 0$. Sur la sphère $S(y_0,R/2)$, $u - u(x_0) \geq \eta > 0$ par la propriété de minimum strict. Choisissons $\varepsilon \leq \frac{\eta}{e^{-\gamma R^2/4} - e^{-\gamma R^2}}$. Il vient alors $z = u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ sur cette sphère. On applique alors le principe du maximum du Théorème 49 à la fonction z sur l'ouvert O, ce qui montre que

$$\forall x \in O, \quad u(x) \geq u(x_0) + \varepsilon v(x).$$

Par conséquent, quand on restreint cette inégalité au segment $x_0 - tn(x_0)$, $R/2 \geq t > 0$, il vient

$$\frac{u(x_0 - tn(x_0)) - u(x_0)}{t} \geq \varepsilon\frac{v(x_0 - tn(x_0))}{t} \longrightarrow 2\varepsilon\gamma R, \quad \text{quand} \quad t \to 0^+.$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \leq -2\varepsilon\gamma R,$$

et le théorème est démontré. □

Le théorème de Hopf implique une version encore plus forte du principe du maximum. L'idée est très simple : si u atteint son minimum à l'intérieur en un point isolé par exemple, alors son gradient y est nul, ce qui contredit le théorème de Hopf dans une boule assez petite dont le bord contient le point en question. La difficulté dans ce qui suit est qu'on n'a aucune information sur l'ensemble où u atteint son minimum et qu'il faut construire une boule incluse dans l'ouvert et le rencontrant en un seul point pour pouvoir appliquer le théorème de Hopf.

Théorème 51 *Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tel que $Lu \geq 0$ sur Ω. On note $m = \min_{\bar{\Omega}} u$. Alors, si $c = 0$ ou bien si $c \geq 0$ et $m \leq 0$, on a l'alternative : soit $u \equiv m$ sur $\bar{\Omega}$, soit $u > m$ dans Ω.*

Démonstration. Il faut montrer que si le minimum est atteint en un point intérieur, alors la fonction u est constante et égale à ce minimum.

Soit donc $M = \{x \in \bar{\Omega}; u(x) = m\}$, c'est un fermé de $\bar{\Omega}$, donc un compact. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, la distance de y à M est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $p(y) \in M$ tel que $\delta(y) = |y - p(y)| = \inf_{z \in M} |y - z|$. On en déduit que $B(y, \delta(y)) \subset \mathbb{R}^N \setminus M$ et $p(y) \in \bar{B}(y, \delta(y))$ (attention, p n'est pas une application, la distance peut être atteinte en plusieurs points de M).

Posons alors $N = \Omega \setminus M = \{x \in \Omega; u(x) > m\}$. C'est un ouvert. On va montrer qu'il est aussi fermé dans Ω (pour la topologie induite). Pour cela, on prend une suite $y_k \in N$ telle que $y_k \to y_0$ dans Ω. On raisonne par l'absurde en supposant que $y_0 \notin N$, c'est-à-dire $y_0 \in M \cap \Omega$. Dans ce cas, $\delta(y_k) \to 0$ et $p(y_k) \to y_0$ (extraire une sous-suite et raisonner par unicité). En particulier, pour k assez grand, on aura $p(y_k) \in \Omega$. Choisissons un tel k. Il est clair qu'il existe une boule de la forme $B = B(p(y_k) + t(y_k - p(y_k)), t\delta(y_k))$ avec $0 < t < 1$ telle que $B \subset B(y_k, \delta(y_k)) \cap \Omega$.

Par construction, pour tout x dans B, on a $u(x) > m$. De plus, $p(y_k) \in \bar{B}$ et $u(p(y_k)) = m$, donc $p(y_k)$ est un minimum strict sur l'adhérence de l'ouvert B, lequel vérifie manifestement la condition de sphère intérieure, puisque c'est une boule. Naturellement, u est C^1 sur $\bar{B}$ comme restriction d'une fonction C^2 sur Ω. Enfin, on a fait l'hypothèse que $m \leq 0$ si $c \geq 0$. Par le théorème de Hopf, on en déduit que $Du(p(y_k)) \cdot n(p(y_k)) < 0$. Or ceci est impossible puisque $p(y_k)$ est un point de minimum intérieur, donc $Du(p(y_k)) = 0$. Contradiction et on voit donc que $y_0 \in N$, c'est-à-dire que N est fermé.

L'ensemble N est un sous-ensemble ouvert et fermé d'un connexe Ω, donc il est soit vide, soit égal à Ω. $\square$

Donnons une première application du principe du maximum fort à un résultat d'estimation.

Théorème 52 *Soit $\eta > 0$ et $u \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $Lu + \eta u = f$ sur Ω et $u = g$ sur $\partial\Omega$. Alors*
$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta}\right\}.$$

Démonstration. D'abord, comme u satisfait l'équation, on a nécessairement $f \in C^0(\bar{\Omega})$. Posons $v = u - \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta}\right\}$. On a
$$v \le u - \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} \le 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$
et
$$\begin{aligned} Lv + \eta v &= f - (c+\eta)\max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta}\right\} \\ &\le f - c\frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta} - \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le -c\frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta} \le 0. \end{aligned}$$
Donc, par le principe du maximum fort, $v \le 0$ dans $\bar{\Omega}$, c'est à dire
$$u \le \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta}\right\} \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega}.$$

On refait le même raisonnement avec $v = u + \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}}{\eta}\right\}$. □

Remarque 35 On pouvait aussi supposer $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Le résultat est toujours vrai si l'on suppose alors f bornée sur Ω (si f n'est pas bornée, le majorant du membre de droite vaut $+\infty$, ce qui n'est pas une information pertinente). □

Signalons un résultat d'estimation assez semblable au précédent.

Théorème 53 *Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu = f$ sur Ω, avec f bornée sur Ω, et $u = g$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante C qui ne dépend que du diamètre de Ω, de $\|b\|_{C^0(\bar{\Omega})}$ et de λ telle que*
$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} + C\sup_{\Omega}|f|.$$

Démonstration. Comme Ω est borné, il existe un nombre d tel que Ω est inclus dans la bande $\{x \in \mathbb{R}^N; -d/2 < x_1 < d/2\}$. Soit $L' = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i$ et $\beta = \|b\|_{C^0(\bar{\Omega})}/\lambda$. Pour $\alpha = \beta + 1 \ge 1$, on a
$$\begin{aligned} L'(e^{\alpha(x_1+d/2)}) &= (-\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1)e^{\alpha(x_1+d/2)} \\ &\le \lambda(-\alpha^2 + \alpha\beta)e^{\alpha(x_1+d/2)} = -\lambda\alpha e^{\alpha(x_1+d/2)} \le -\lambda. \end{aligned}$$

Soit alors

$$v(x) = \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} + (e^{\alpha d} - e^{\alpha(x_1+d/2)})\frac{\sup_\Omega |f|}{\lambda}.$$

Il est clair que $Lv = L'v + cv \geq L'v \geq \sup_\Omega |f|$. Par conséquent,

$$L(v-u) = Lv - Lu \geq \sup_\Omega |f| - f \geq 0 \text{ dans } \Omega, \qquad v-u \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Par le principe du maximum fort, il vient donc $v - u \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$, d'où

$$u(x) \leq \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} + (e^{\alpha d} - 1)\frac{\sup_\Omega |f|}{\lambda}$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$. On conclut en changeant u en $-u$. □

Remarque 36 Par translation et rotation, on peut prendre d égal au diamètre de Ω d'où la dépendance de la constante C indiquée dans l'énoncé.

Il n'est pas nécessaire ici de supposer que c est bornée inférieurement par une constante strictement positive (ce que l'on avait essentiellement fait en introduisant la constante η au théorème 52. □

5.2 Le principe du maximum faible

Dans cette section, nous considérons le même type de questions que précédemment, mais pour des solutions faibles et sous des hypothèses de régularité moins restrictives que précédemment. Naturellement, les résultats sont moins fins. Donnons d'abord l'analogue du théorème 49.

Théorème 54 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A telle que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et une fonction $c \in L^\infty(\Omega)$ telle que $c \geq 0$ presque partout. Toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui satisfait*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu \geq 0, \\ u_- \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

est positive ou nulle presque partout dans Ω.

Remarque 37 On rappelle qu'une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est dite positive si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi(x) \geq 0$ dans Ω, $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$. On sait que dans ce cas, T est en fait une mesure de Radon positive. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la première inégalité. La deuxième condition est une façon d'exprimer que u est positive au bord, même si ce dernier n'est pas assez régulier pour qu'il existe une trace. En effet, si Ω est régulier, on a $\gamma_0(u_-) = (\gamma_0(u))_-$ et bien sûr $H_0^1(\Omega) = \ker\gamma_0$. □

Commençons par un lemme sur les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ positifs.

Lemme 24 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ telle que $f \geq 0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, $\langle f, v_+\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \geq 0$.*

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Il existe une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. Par conséquent, $(\varphi_n)_+ \to v_+$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. À n fixé, $(\varphi_n)_+$ est à support compact. On peut donc l'approcher dans $H_0^1(\Omega)$ fort par une convolution par un noyau régularisant, $\rho_\eta \star (\varphi_n)_+$, qui est bien définie et appartient à $\mathscr{D}(\Omega)$ dès que η est inférieur à la distance du support de $(\varphi_n)_+$ au bord. De plus, par définition de la convolution, $\rho_\eta \star (\varphi_n)_+ \geq 0$. Donc, comme $f \geq 0$, on en déduit $\langle f, \rho_\eta \star (\varphi_n)_+\rangle \geq 0$. On extrait une suite diagonale telle que $\rho_{\eta_n} \star (\varphi_n)_+ \to v_+$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort, et l'on conclut en passant à la limite dans l'inégalité, puisque $f \in H^{-1}(\Omega)$. □

Démonstration du théorème 54. - Il suffit de montrer que $u_- = 0$. Comme $u_- \in H_0^1(\Omega)$, par l'inégalité de Poincaré, il suffit de montrer que $\nabla u_- = 0$. Soit donc $f = -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + cu$ qui appartient à $H^{-1}(\Omega)$. Nous avons par conséquent

$$0 \leq \langle f, u_-\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega A\nabla u \nabla(u_-)\,dx + \int_\Omega cuu_-\,dx.$$

Or $\nabla(u_-) = -\mathbf{1}_{u\leq 0}\nabla u = -(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2\nabla u$ et $u_- = -\mathbf{1}_{u\leq 0}u = -(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2 u$, donc

$$\int_\Omega A\nabla(u_-)\nabla(u_-)\,dx + \int_\Omega c(u_-)^2\,dx \leq 0$$

d'où

$$\lambda \|\nabla(u_-)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

et l'on en déduit immédiatement le résultat. □

Notons que si $c > 0$ presque partout dans Ω, le résultat subsiste avec $\lambda = 0$. On a également un analogue faible du théorème 52.

Théorème 55 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A telle que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et une fonction $c \in L^\infty(\Omega)$ telle que $c(x) \geq \eta > 0$ presque partout. Toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de*

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) + cu = f \quad \textit{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega) \tag{5.2}$$

satisfait

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Démonstration. Tout d'abord, si $f \notin L^\infty(\Omega)$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $f \in L^\infty(\Omega)$. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Nous savons que $(u-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$. Nous déduisons de (5.2) que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla (u-k)_+ \, dx + \int_\Omega cu(u-k)_+ \, dx = \int_\Omega f(u-k)_+ \, dx.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla (u-k)_+ \, dx &= \int_\Omega A\nabla (u-k) \cdot \nabla (u-k)_+ \, dx \\ &= \int_\Omega A\nabla (u-k)_+ \cdot \nabla (u-k)_+ \, dx \geq 0,\end{aligned}$$

en effet, $\nabla(u-k)_+ = \mathbf{1}_{u>k}\nabla(u-k)$ et $\mathbf{1}_{u>k} = \mathbf{1}_{u>k}^2$. Remplaçant cette inégalité dans l'égalité qui la précède, il vient

$$\int_\Omega cu(u-k)_+ \, dx \leq \int_\Omega f(u-k)_+ \, dx.$$

Comme Ω est borné, on peut soustraire $\int_\Omega kc(u-k)_+ \, dx$ aux deux membres de cette inégalité, ce qui donne

$$\int_\Omega c(u-k)(u-k)_+ \, dx \leq \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+ \, dx.$$

Or

$$\int_\Omega c(u-k)(u-k)_+ \, dx = \int_\Omega c[(u-k)_+]^2 \, dx \geq \eta \|(u-k)_+\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Mais, si $k = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}/\eta$, alors $f - ck \leq 0$ presque partout. Comme $(u-k)_+ \geq 0$ presque partout, on en déduit que $\int_\Omega (f-ck)(u-k)_+ \, dx \leq 0$. Par la dernière égalité, il vient $(u-k)_+ = 0$, c'est à dire $u \leq k$ presque partout.

On reprend ensuite le même raisonnement avec $v = (u+k)_-$, toujours avec $k = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}/\eta$. □

Remarque 38 On a un résultat analogue si Ω est un ouvert régulier et $\gamma(u) = g$ pour $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Il suffit de prendre $|k| \geq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. □

5.3 Résultats de régularité elliptique

Les équations elliptiques linéaires du second ordre possèdent une propriété très importante : la solution gagne grosso modo deux dérivées par rapport au second membre de l'équation. C'est ce qu'on appelle la régularité elliptique. Il s'agit d'une théorie très technique, et nous renvoyons à Gilbarg-Trudinger pour les démonstrations, mais les résultats sont essentiels pour les applications.

On peut néanmoins comprendre d'où vient la régularité elliptique à l'aide de deux exemples simples.

Exemples

Le premier exemple utilise la transformation de Fourier. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on va montrer que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ alors $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'espace des distributions tempérées sur lequel la transformation de Fourier est un isomorphisme et où l'on a la formule $\mathscr{F}(\partial_j u) = i\xi_j \hat{u}$. Par conséquent, $\mathscr{F}(\Delta u)(\xi) = -\xi_j\xi_j\hat{u} = -|\xi|^2\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De même, $\mathscr{F}(\partial_{ij}u)(\xi) = -\xi_i\xi_j\hat{u}(\xi)$, donc

$$|\mathscr{F}(\partial_{ij}u)(\xi)|^2 = \xi_i^2\xi_j^2|\hat{u}(\xi)|^2 \le \Big(\sum \xi_i^2\Big)\Big(\sum \xi_j^2\Big)|\hat{u}(\xi)|^2 = |\xi|^4|\hat{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

On en déduit que $\mathscr{F}(\partial_{ij}u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire $\partial_{ij}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ puisque la transformation de Fourier est aussi un isomorphisme sur cet espace. Comme la transformation de Fourier est en outre une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (modulo un facteur $(2\pi)^{-N/2}$), on voit que

$$\|\partial_{ij}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

d'où l'estimation (il y a N^2 dérivées secondes)

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \le \big(\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + N^2\|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\big)^{1/2}.$$

Le deuxième exemple utilise ce que l'on appelle la méthode des translations de Nirenberg. Considérons le problème : trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $-\Delta u + u = f$ avec $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. C'est un problème trivialement variationnel :

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx = \langle f, v\rangle,$$

avec

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Supposons maintenant que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on va montrer que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. En effet, choisissons un indice i et pour tout $h \neq 0$, définissons les translatés $u_h(x) = u(x + he_i)$ et $f_h(x) = f(x + he_i)$. Manifestement, on a $-\Delta u_h + u_h = f_h$, d'où

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla\Big(\frac{u_h - u}{h}\Big) \cdot \nabla v + \frac{u_h - u}{h} v\Big)\, dx = \Big\langle \frac{f_h - f}{h}, v\Big\rangle,$$

et l'estimation

$$\left\|\frac{u_h-u}{h}\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le \left\|\frac{f_h-f}{h}\right\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Or, comme $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\frac{f_h-f}{h} \rightharpoonup \partial_i f$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ quand $h \to 0$. En effet, pour tout fonction-test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\langle \frac{f_h-f}{h}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \frac{\varphi_{-h}-\varphi}{h} \right\rangle.$$

Or il facile de voir à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué aux dérivées à tous ordres de φ que $\frac{\varphi_{-h}-\varphi}{h} \to -\partial_i\varphi$ au sens de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent,

$$\left\langle \frac{f_h-f}{h}, \varphi \right\rangle \to \langle f, -\partial_i\varphi\rangle = \langle \partial_i f, \varphi\rangle,$$

c'est-à-dire $\frac{f_h-f}{h} \to \partial_i f$ au sens de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ donc au sens de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ faible par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On en déduit que $\frac{f_h-f}{h}$ est borné dans $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, donc que $\frac{u_h-u}{h}$ est borné dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout j, $\frac{\partial_j u_h-\partial_j u}{h}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. D'un autre côté, on sait que $\frac{\partial_j u_h-\partial_j u}{h} \to \partial_{ij}u$ au sens de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ par le même argument que plus haut. On en déduit que $\partial_{ij}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et l'estimation

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \le \sqrt{1+N}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

grâce au fait que $\|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et $\|\partial_i f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et que $\partial_i u$ est finalement la solution H^1 de $-\Delta\partial_i u + \partial_i u = \partial_i f$. □

Remarque 39 On ne pouvait pas utiliser directement le fait que $-\Delta\partial_i u + \partial_i u = \partial_i f$, ce qui est trivialement vrai au sens des distributions, car on ne dispose pas au départ de l'information $\partial_i u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (ce qui est en fait la conclusion !). Donc on ne peut pas utiliser la formulation variationnelle pour ce problème. □

Revenons maintenant au catalogue des résultats de régularité elliptique dans des cas plus généraux. On rappelle d'abord qu'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dit être de classe $C^{k,\alpha}$ si en chaque point x_0 de $\partial\Omega$ il existe une boule B centrée en x_0 et une bijection ψ de B sur un ouvert $D \in \mathbb{R}^N$ telles que

(i) $\psi(B\cap\Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$;

(ii) $\psi(B\cap\partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^N_+$;

(iii) $\psi \in C^{k,\alpha}(B;D)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D;B)$,

où $\mathbb{R}^N_+ = \{(x_1,x_2,\dots,x_N); x_N \ge 0\}$. On dit que ψ est un $C^{k,\alpha}$-difféomorphisme qui aplatit localement la frontière.

Dans la suite, on se donne un opérateur différentiel $L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ avec $c \geq 0$, strictement elliptique, c'est à dire tel qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Commençons par la régularité höldérienne, qui découle des estimations de Schauder (*cf.* Gilbarg-Trudinger pour les détails). Rappelons tout d'abord la définition des espaces de fonctions höldériennes. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on dit que u est *höldérienne d'exposant* α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constante C telle que, pour tout couple de points (x,y) dans $\bar{\Omega}$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

On note que u est continue et on pose

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\bar{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

et

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Cette dernière quantité est une norme sur l'espace des fonctions höldériennes $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ qui en fait un espace de Banach. L'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. On le munit de la norme

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \max_{|\gamma|=k} |\partial^\gamma u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

pour laquelle il est complet.

Théorème 56 *Soit $0 < \alpha < 1$ et Ω un ouvert borné de classe $C^{2,\alpha}$. Supposons que les coefficients de L, a_{ij}, b_i et c appartiennent à $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ dans } \Omega; \qquad u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}), \tag{5.4}$$

où C ne dépend que de N, α, λ, Λ et Ω.

Remarque 40 i) Dans les estimations de Schauder, on ne suppose pas en général que $c \geq 0$ et il faut ajouter au second membre de (5.4) un terme $\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$. Quand $c \geq 0$, ce terme devient inutile grâce au théorème 53.

ii) Il convient de souligner le caractère *a priori* surprenant de la régularité elliptique. Prenons le cas de $L = -\Delta$ avec $g = 0$. La seule information que Δu appartient à un certain $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, c'est-à-dire qu'une certaine combinaison linéaire de dérivées secondes de u est dans cet espace, suffit à assurer que toutes les dérivées secondes, y-compris les dérivées croisées qui n'apparaissent pas dans l'opérateur, sont individuellement dans le même espace (sous réserve que u et l'ouvert possèdent déjà une certaine régularité minimale). Il s'agit donc d'une propriété extrêmement forte et profonde des opérateurs elliptiques.

iii) Il faut noter que la régularité *n'a pas lieu* pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Ainsi par exemple, il existe une fonction u telle que $\Delta u \in C^0(\bar{\Omega})$ mais $u \notin C^2(\bar{\Omega})$.

iv) De façon générale, les résultats de régularité elliptique sont de nature locale. Ainsi, si ω est un ouvert compactement inclus dans Ω, et si la restriction de f à ω est de classe $C^{0,\alpha}$, alors la restriction de u à ω est de classe $C^{2,\alpha}$. □

En parallèle avec le résultat d'estimation, on a aussi un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 57 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment sur l'ouvert et l'opérateur L, pour tous $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, il existe une unique fonction $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que*

$$Lu = f \text{ dans } \Omega; \qquad u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Remarque 41 Le théorème 57 montre que l'opérateur L^{-1} réalise un isomorphisme entre $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times (C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})/C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))$ et $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. □

On a également des résultats de régularité d'ordre plus élevé.

Théorème 58 *Soit $0 < \alpha < 1$, k un entier positif et Ω un ouvert de classe $C^{k+2,\alpha}$. Supposons que les coefficients de L, a_{ij}, b_i et c appartiennent à $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ et soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $g \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ dans } \Omega; \qquad u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})}), \tag{5.5}$$

où C ne dépend que de N, α, λ, Λ, k et Ω.

En d'autres termes, la solution d'une équation elliptique du second ordre a deux dérivées de plus que la donnée f. Ceci implique que si l'ouvert, les coefficients de l'opérateur différentiel et les données sont de classe C^∞, alors la solution est aussi de classe C^∞.

Il existe une théorie analogue dans les espaces de Sobolev. Il convient de distinguer entre solutions faibles, *i.e.* au sens des distributions, et solutions fortes, c'est-à-dire presque partout. Les hypothèses minimales de régularité sur les coefficients de l'opérateur ne sont pas les mêmes dans ces deux cas.

Pour les solutions faibles, on considère l'opérateur différentiel sous forme divergence, $Lu = -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + cu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu$, avec $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$, A coercive et $c \geq 0$ (on peut également rajouter des termes d'ordre un). Si les coefficients de A sont réguliers, alors la forme divergence est semblable à celle que nous avons utilisé pour les estimations de Schauder.

Théorème 59 *Soit Ω un ouvert de classe C^2 et supposons que les coefficients de A appartiennent à $C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^2(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ au sens de } \mathscr{D}'(\Omega); \qquad u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}), \tag{5.6}$$

où C ne dépend pas de f et g. De plus, l'équation est vérifiée presque partout sous la forme

$$-a_{ij}\partial_{ij}u - \partial_i a_{ij}\partial_j u + cu = f.$$

Remarque 42 i) L'existence et l'unicité de u découle ici directement du théorème de Lax-Milgram (on ne suppose pas la matrice A symétrique).

ii) Si $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, alors $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et donc $\partial_i a_{ij}\partial_j u \in L^2(\Omega)$. Ce terme a bien un sens et l'on peut appliquer la formule de Leibniz pour dériver le produit $a_{ij}\partial_j u$.

iii) La régularité de l'ouvert n'est pas une condition nécessaire pour que le résultat ait lieu. Ainsi, en dimension 2, si Ω est un polygone convexe, alors $f \in L^2(\Omega)$ et $g = 0$ impliquent $u = (-\Delta)^{-1} f \in H^2(\Omega)$. Par contre, si Ω est un polygone qui possède un angle rentrant, alors il existe des données f dans $L^2(\Omega)$ telles que $u \notin H^2(\Omega)$. □

Plus généralement, la régularité se propage comme précédemment aux ordres plus élevés, à condition de faire des hypothèses appropriées sur l'ouvert et les coefficients de l'opérateur.

Théorème 60 *Soit $k \geq 1$, Ω un ouvert de classe C^{k+2}, $a_{ij} \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$ et $c \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$. Soit $f \in H^k(\Omega)$ et $g \in H^{k+2}(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ au sens de } \mathscr{D}'(\Omega); \qquad u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C_k(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|g\|_{H^{k+2}(\Omega)}), \tag{5.7}$$

où C_k ne dépend pas de f et g.

On retrouve le fait que si l'ouvert, les coefficients et les données sont de classe C^∞, la solution est de classe C^∞.

Pour les solutions fortes, c'est à dire les fonctions $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que $Lu = -a_{ij}\partial_{ij}u - b_i\partial_i u + cu = f$ presque partout, on a également une théorie d'existence et de régularité.

Théorème 61 *Soit Ω un ouvert de classe $C^{1,1}$, $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ et $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, il existe un unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ presque partout dans } \Omega; \qquad u - g \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}), \tag{5.8}$$

où C_p ne dépend pas de f et g.

Remarque 43 Le résultat est faux pour $p = 1$ et $p = +\infty$. □

Pour les dérivées d'ordre plus élevé, la situation est analogue.

Théorème 62 *Soit $k \geq 1$ Ω un ouvert de classe $C^{k+1,1}$ et $a_{ij}, b_i, c \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$. Pour tous $f \in W^{k,p}(\Omega)$ et $g \in W^{k+2,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, il existe un unique $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ une fonction telle que*

$$Lu = f \text{ presque partout dans } \Omega; \qquad u - g \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C_{k,p}(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|g\|_{W^{k+2,p}(\Omega)}), \tag{5.9}$$

où $C_{k,p}$ ne dépend pas de f et g.

Ce type de résultats de régularité elliptique se généralise considérablement à des systèmes, grâce aux résultats de Agmon, Douglis et Nirenberg. Notons qu'ils ne se cantonnent pas aux conditions aux limites de Dirichlet, mais que des opérateurs frontière plus compliqués sont possibles. Il doit néanmoins y avoir une certaine compatibilité entre l'opérateur différentiel à l'intérieur de l'ouvert et l'opérateur frontière. Notons aussi que la régularité elliptique (globale) n'a pas lieu si l'on a des conditions mixtes, par exemple Dirichlet sur une partie de la frontière et Neumann sur son complémentaire, sauf si ces deux parties sont d'adhérences disjointes.

Pour terminer ce bref catalogue de résultats de régularité, mentionnons deux théorèmes utiles. Le premier est dû à De Giorgi.

Théorème 63 *Soit Ω un ouvert régulier, A une matrice à coefficients $L^\infty(\Omega)$ coercive, $f_0 \in L^{N/2+\varepsilon}(\Omega)$, $f \in L^{N+\varepsilon}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f_0 + \operatorname{div} f$. Alors il existe $0 < \alpha < 1$ et $C > 0$ tels que $u \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ et*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \leq C(\|f_0\|_{L^{N/2+\varepsilon}(\Omega)} + \|f\|_{L^{N+\varepsilon}(\Omega;\mathbb{R}^N)}).$$

Remarque 44 i) Le théorème de De Giorgi se démontre facilement si les coefficients sont réguliers à partir des résultats de régularité L^p et des injections de Sobolev. La difficulté vient de ce que les coefficients sont discontinus.

ii) Le théorème n'est pas vrai pour les systèmes en général. Dans ce cas, on montre typiquement que $u \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega \setminus H)$, où H est un ensemble «petit». □

Le second résultat est le théorème de Meyers.

Théorème 64 *Soit Ω un ouvert régulier et A une matrice à coefficients $L^\infty(\Omega)$ coercive. Il existe $2 < p_0 < +\infty$ tel que l'opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(A\nabla u)$ est un isomorphisme entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p}(\Omega)$ pour tout $p_0' \leq p \leq p_0$.*

Remarque 45 On sait, par le théorème de Lax-Milgram, que cet opérateur est un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème de Meyers permet donc de gagner un peu d'intégrabilité, même avec des coefficients discontinus. Il reste valable pour les systèmes □

5.4 Méthode des sur- et sous-solutions

Le principe du maximum et la régularité elliptique peuvent être utilisés pour résoudre certaines équations non linéaires. Nous développons ici la méthode des sur- et sous-solutions. Le problème est le suivant. Soit $L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ un opérateur elliptique à coefficients $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, où Ω est un ouvert de classe $C^{2,\alpha}$. On se donne une fonction $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne et l'on cherche à résoudre le problème aux limites, $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x,u(x)) \quad \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

Définition 7 *On dit que $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) est une sur-solution (resp. sous-solution) si $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) appartient à $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et vérifie $L\overline{u} \geq f(x,\overline{u})$ (resp. $L\underline{u} \leq f(x,\underline{u})$) dans Ω et $\overline{u} \geq 0$ (resp. $\underline{u} \leq 0$) sur $\partial\Omega$.*

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 65 *Supposons qu'il existe une sur-solution $\overline{u}$ et une sous-solution $\underline{u}$ telles que $\overline{u} \geq \underline{u}$. Le problème (5.10) admet alors une solution maximale $\overline{u}^*$ et une solution minimale $\underline{u}_*$ telles que $\overline{u} \geq \overline{u}^* \geq \underline{u}_* \geq \underline{u}$ et qu'il n'existe pas de solution u comprise entre $\overline{u}$ et $\underline{u}$ telle que $u(x) > \overline{u}^*(x)$ ou $u(x) < \underline{u}_*(x)$ en un point x de Ω.*

La démonstration se fait sur le même schéma qu'une démonstration par point fixe, en itérant l'opérateur. On utilise le principe du maximum et les estimations de régularité elliptique pour obtenir la convergence. Plus précisément,

Lemme 25 *Il existe une constante $M > 0$ telle que les deux suites $\overline{u}^n$ et $\underline{u}^n$ définies par*

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ L\overline{u}^{n+1} + M\overline{u}^{n+1} = f(x,\overline{u}^n) + M\overline{u}^n \quad \textit{dans } \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \underline{u}^0 = \underline{u}, \\ L\underline{u}^{n+1} + M\underline{u}^{n+1} = f(x,\underline{u}^n) + M\underline{u}^n \quad \textit{dans } \Omega, \\ \underline{u}^{n+1} = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

convergent simplement dans $\bar{\Omega}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si f est une application localement lipschitzienne d'un espace métrique (X,d) dans un espace métrique (Y,δ), alors elle est globalement lipschitzienne sur tout compact de X. En effet, soit K un compact de X et supposons que f ne soit pas globalement lipschitzienne sur K. Ceci signifie que pour tout entier n, il existe un couple (x_n, x'_n) de points de K tels que

$$\delta(f(x_n), f(x'_n)) > nd(x_n, x'_n). \tag{5.11}$$

Comme f est continue, $f(K)$ est compact, donc de diamètre fini. Par conséquent, $d(x_n, x'_n) < (\operatorname{diam} f(K))/n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Extrayons une sous-suite, toujours notée n telle que $x_n \to x$ et $x'_n \to x'$ dans K. L'inégalité ci-dessus implique que $x = x'$. Par hypothèse, il existe un voisinage V de x et une constante Λ_V, tels que pour tous $z, z' \in V$, $\delta(f(z), f(z')) \leq \Lambda d(z, z')$. Or pour n assez grand, on a $x_n, x'_n \in V$, ce qui est contradictoire avec l'inégalité (5.11).

Soit $m = \max\{\|\overline{u}\|_{C^0(\bar{\Omega})}, \|\underline{u}\|_{C^0(\bar{\Omega})}\}$. On applique la remarque précédente au compact $K = \bar{\Omega} \times [-m, m]$. Il existe donc une constante Λ telle que $|f(y,t) - f(y',t')| \leq \Lambda(|y - y'| + |t - t'|)$ pour tous (y,t) et (y',t') dans K. Soit alors $M = \Lambda + 1$.

Montrons alors que la fonction $\tilde{f}(x,s) = f(x,s) + Ms$ est croissante par rapport à s pour (x,s) dans K. Soit $s, s' \in [-m, m]$ avec $s \geq s'$. Comme $|f(x,s) - f(x,s')| \leq \Lambda|s - s'|$, il vient

$$\tilde{f}(x,s) - \tilde{f}(x,s') \geq (M - \Lambda)(s - s') = s - s' \geq 0.$$

Notons à ce stade que si $v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, alors $x \mapsto \tilde{f}(x, v(x))$ appartient aussi à $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. En effet, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x,v(x)) - \tilde{f}(y,v(y))| &\leq \Lambda\big||x-y| + |v(x) - v(y)|\big| + M|v(x) - v(y)| \\ &\leq C(|x-y| + |x-y|^\alpha), \end{aligned}$$

où C dépend de Λ, M et $\|v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$. Par conséquent, pour $x \neq y$, on voit que

$$\frac{|\tilde{f}(x,v(x)) - \tilde{f}(y,v(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq C(|x-y|^{1-\alpha} + 1),$$

et le membre de droite est borné sur $\bar{\Omega}$.

Posant $\tilde{L}u = Lu + Mu$, on voit que la suite $\overline{u}^n$ est définie par

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ \overline{u}^{n+1} = T(\overline{u}^n), \end{cases}$$

où l'application $T : C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est bien définie pour tout $0 < \alpha < 1$ par

$$\begin{cases} \tilde{L}(T(v)) = \tilde{f}(x,v) \quad \text{dans } \Omega, \\ T(v) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

par la remarque précédente et la théorie d'existence et d'unicité dans les espaces de Hölder.

Remarquons maintenant que si $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$, alors $\underline{u} \leq u = T(v) \leq \overline{u}$. En effet

$$\begin{cases} \tilde{L}(u-\overline{u}) = \tilde{f}(x,v) - \tilde{L}\overline{u} \leq \tilde{f}(x,v) - \tilde{f}(x,\overline{u}) \leq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u - \overline{u} = -\overline{u} \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

puisque $\tilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur le compact K. Par le principe du maximum fort, il vient $u \leq \overline{u}$. De même, on montre que $\underline{u} \leq u$.

Appliquant la remarque précédente à la suite $\overline{u}^n$ et raisonnant par récurrence, on voit immédiatement que cette suite est bien définie et telle que $\underline{u} \leq \overline{u}^n \leq \overline{u}$ pour tout n. Montrons par récurrence qu'elle est décroissante. On a bien $\overline{u}^1 \leq \overline{u}^0$. Supposons que $\overline{u}^n \leq \overline{u}^{n-1}$. Reprenant le raisonnement précédent, il vient

$$\begin{cases} \tilde{L}(\overline{u}^{n+1} - \overline{u}^n) = \tilde{f}(x,\overline{u}^n) - \tilde{f}(x,\overline{u}^{n-1}) \leq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} - \overline{u}^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

d'où, principe du maximum fort, $\overline{u}^{n+1} \leq \overline{u}^n$. Pour chaque $x \in \Omega$, la suite $\overline{u}^n(x)$ est donc décroissante et minorée. Elle est par conséquent convergente.

On montre de même que la suite $\underline{u}^n(x)$ est croissante et majorée donc convergente pour tout x. □

On note $\overline{u}^*$ et $\underline{u}_*$ les limites ponctuelles des suites $\overline{u}^n$ et $\underline{u}^n$. Notons que nous n'avons à ce stade aucune information sur la régularité de ces fonctions.

Lemme 26 *On a $\underline{u}_* \leq \overline{u}^*$.*

Démonstration. On montre comme précédemment par récurrence sur l et par le principe du maximum que pour tout couple d'entiers (l,n), $\underline{u}^l \leq \overline{u}^n$. □

Lemme 27 *Les limites $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ appartiennent à $C^2(\bar{\Omega})$.*

Démonstration. On procède par estimations. Comme $\underline{u} \leq \overline{u}^n \leq \overline{u}$ et que $\tilde{f}$ est croissante par rapport à sa deuxième variable, on voit que $\tilde{f}(x,\underline{u}) \leq \tilde{f}(x,\overline{u}^n) \leq \tilde{f}(x,\overline{u})$. Par conséquent, $\|\tilde{f}(x,\overline{u}^n)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C = \max\{\|\tilde{f}(x,\underline{u})\|_{C^0(\bar{\Omega})}, \|\tilde{f}(x,\overline{u})\|_{C^0(\bar{\Omega})}\}$. Ici comme dans la suite, la valeur de la constante générique C peut changer d'apparition en apparition, mais ne dépend pas de n.

Comme Ω est borné, on en déduit que le second membre est borné dans $L^p(\Omega)$ pour tout p. D'après le théorème 61 d'estimation L^p, il vient $\|\overline{u}^n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p$ pour tout $p \in]1,+\infty[$. Choisissons $p > N$. Par les injections de Sobolev, on a alors $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$, et par conséquent, $\|\overline{u}^n\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C$. Par le même calcul que dans la démonstration du lemme 25, mais en utilisant cette fois l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que $\|\tilde{f}(\cdot,\overline{u}^n)\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C$ pour tout $\beta \in [0,1]$. Fixons une valeur de $0 < \beta < 1$. En utilisant les estimations de Schauder (5.4), on obtient finalement

$$\|\overline{u}^n\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Comme $\beta > 0$, l'injection $C^{2,\beta}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ est compacte par le théorème d'Ascoli. La famille $\{\overline{u}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc relativement compacte dans $C^2(\bar{\Omega})$. Or, elle converge simplement vers $\overline{u}^*$. On en déduit donc que $\overline{u}^* \in C^2(\bar{\Omega})$ et que $\overline{u}^n \to \overline{u}^*$ fortement dans $C^2(\bar{\Omega})$.

On procède de même pour $\underline{u}_*$. □

Lemme 28 *Les limites $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ sont solution du problème* (5.10).

Démonstration. D'après ce qu'on vient de voir, $\tilde{L}\overline{u}^{n+1} \to \tilde{L}\overline{u}^*$ et $\tilde{f}(\cdot,\overline{u}^n) \to \tilde{f}(\cdot,\overline{u}^*)$ uniformément dans Ω. On voit donc que $\tilde{L}\overline{u}^* = \tilde{f}(\cdot,\overline{u}^*)$, ce qui équivaut évidemment à $L\overline{u}^* = f(\cdot,\overline{u}^*)$. De plus, comme $\overline{u}^n = 0$ sur $\partial\Omega$ et que la suite converge sur $\bar{\Omega}$, on a aussi $\overline{u}^* = 0$ sur $\partial\Omega$. On procède de même pour $\underline{u}_*$. □

Pour conclure, nous devons montrer que les deux solutions ainsi exhibées sont respectivement minimale et maximale.

Lemme 29 *Soit u une solution du problème* (5.10) *telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Alors $\underline{u}_* \leq u \leq \overline{u}^*$.*

Démonstration. On montre comme précédemment par récurrence sur n et par le principe du maximum que $\underline{u}^n \leq u \leq \overline{u}^n$. □

Remarque 46 D'après les estimations de Schauder, on voit en fait que $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ appartiennent à $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $0 < \alpha < 1$. On peut bien sûr gagner en régularité si les coefficients de l'opérateur, l'ouvert et la fonction f sont eux-mêmes plus réguliers. Le type d'argument utilisé au lemme 27 pour grignoter petit à petit la régularité nécessaire est un exemple d'argument de *bootstrap* (tirant de botte en anglais). Il n'est pas sans rappeler en effet la méthode prônée par Cyrano de Bergerac pour aller sur la Lune. □

Exemples i) Supposons qu'il existe deux constantes $m_- < 0$ et $m_+ > 0$ telles que pour tout x, $f(x,m_-) \geq 0$ et $f(x,m_+) \leq 0$. Alors il existe une solution u telle que $m_- \leq u(x) \leq m_+$. En fait, les inégalités sont strictes, comme on le voit en utilisant le théorème 51.

ii) Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f'(0) > 0$ et qu'il existe $\beta > 0$ avec $f(0) = f(\beta) = 0$. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de $-\Delta$ dans Ω et $\phi_1 > 0$ une première fonction propre, normalisée dans $C^0(\bar{\Omega})$. Alors pour tout $\lambda > \lambda_1/f'(0)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution non triviale $u > 0$ dans Ω. En effet, $\overline{u} = \beta$ est sur-solution et $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$ est sous-solution pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Exercices du chapitre 5

1. Soit $\Omega =]-1,1[$ et $c(x) = 2/(1+x^2)$. Trouver une fonction u telle que $-u'' + cu \geq 0$ dans Ω, $u(\pm 1) \geq 0$ et u atteint son minimum dans Ω.

2. Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$. On se donne une fonction ζ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\zeta(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ et $\zeta(t) = 0$ pour $t \geq 3/4$. On pose alors $\varphi(x) = x_1 x_2 \zeta(|x|)$.

2.1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

2.2. Soit

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-2k}}{k} \varphi(2^k x).$$

Montrer que $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et que u est C^∞ en dehors de 0.

2.3. Montrer que u admet des dérivées partielles secondes au sens classique $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ qui sont continues sur $\bar{\Omega}$ (la seule difficulté est la continuité en 0).

2.4. Montrer que si $|x| = 2^{-n}$, alors $u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-2k}}{k} \varphi(2^k x)$. En déduire que dans ce cas, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

2.5. En déduire que bien que $\Delta u \in C^0(\bar{\Omega})$, $u \notin C^2(\bar{\Omega})$.

3. Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$. On note $r = |x|$. Soit $F \in L^1(\Omega)$ radiale, c'est-à-dire qu'il existe f définie sur $[0,1]$ telle que $F(x) = f(r)$ presque partout pour les deux membres et $\int_0^1 r^{N-1}|f(r)|\,dr < +\infty$. On définit alors la fonction radiale $U(x) = u(r)$ avec

$$u(r) = \int_1^r s^{1-N}\Big(\int_0^s t^{N-1} f(t)\,dt\Big)ds.$$

3.1. Montrer avec le plus grand soin que $U \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

3.2. Montrer de même que $\Delta U = F$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

3.3. Montrer que $U \in W^{2,1}(\Omega)$ si et seulement si

$$\int_0^1 r^{-1}\Big(\int_0^r s^{N-1}|f(s)|\,ds\Big)dr < +\infty.$$

3.4. En déduire un exemple de fonction U de $W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que $\Delta U \in L^1(\Omega)$ mais $U \notin W^{2,1}(\Omega)$.

3.5. Reprendre les mêmes calculs avec $F \in L^p(\Omega)$, $p \in]1, +\infty]$. Qu'en déduit-on, en particulier dans le cas $p = +\infty$ au vu de l'exercice 2 ? (On rappelle l'inégalité de Hardy : soit $p \in]1, +\infty[$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$, on a $\|G\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{p}{p-1}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$)