Chapitre 4

La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

4.1 Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin

On se propose de reprendre le problème modèle du chapitre 1 comme exemple d'application de la méthode de Galerkin. Rappelons le problème. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit f fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, il s'agit de trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$. De façon équivalente, il s'agit de résoudre le problème variationnel

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx. \tag{4.1}$$

On procède par étapes.

Lemme 11 *Soit V un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $v_i \in V$, telle que les combinaisons linéaires finies des v_i sont denses dans V.*

Démonstration. Voir Le Dret. □

Remarque 24 i) Réciproquement, s'il existe une telle famille v_i, alors l'espace V est séparable. En effet, les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des v_i forment un ensemble également dense dans V et dénombrable.

ii) Le lemme 11 s'exprime de façon équivalente, si $V_i = \text{vect}\{v_0, v_1, \ldots, v_i\}$ est l'espace vectoriel engendré par les $i+1$ premiers vecteurs, alors le sev $\cup_{i=0}^{\infty} V_i$ est dense dans V. □

Dans la suite, on appliquera le lemme 11 à l'espace $V = H_0^1(\Omega)$, lequel est séparable. Pour construire l'approximation du problème en dimension finie, on restreint simplement la formulation variationnelle (4.1) à l'espace de Galerkin V_i. Montrons l'existence pour ce problème en dimension finie.

Lemme 12 *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le problème variationnel : trouver $u_i \in V_i$ tel que*

$$\forall v \in V_i, \quad \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u_i) v \, dx, \tag{4.2}$$

admet au moins une solution.

Démonstration. On munit V_i du produit scalaire hérité de $L^2(\Omega)$, c'est à dire $[u,v]_i = \int_\Omega uv \, dx$, et l'on identifie V_i, espace euclidien de dimension finie, et son dual par l'intermédiaire de ce produit scalaire.

L'application $(u,v) \mapsto a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ est une forme bilinéaire sur V_i. Par le théorème de Riesz, il existe donc une application linéaire $A_i \in \mathscr{L}(V_i)$ telle que $a(u,v) = [A_i(u), v]_i$. Comme V_i est de dimension finie, cette application est continue.

De même, il existe une application $F_i \colon V_i \to V_i$ telle que pour tout couple (u,v), $\int_\Omega f(u) v \, dx = [F_i(u), v]_i$. Il suffit de prendre $F_i = \Pi_i \circ \tilde{f}$, où Π_i est la projection orthogonale L^2 sur V_i. Cette application, non linéaire cette fois, est également continue, comme composée d'applications continues (on utilise ici le théorème de Carathéodory).

Le problème (4.2) se réécrit donc

$$\forall v \in V_i, \quad [A_i(u_i), v]_i = [F_i(u_i), v]_i, \tag{4.3}$$

soit, en introduisant la fonction continue $P_i \colon V_i \to V_i$, $P_i(u) = A_i(u) - F_i(u)$,

$$P_i(u_i) = 0. \tag{4.4}$$

Pour résoudre ce problème, on va appliquer le théorème 26. Pour cela, il faut calculer $[P_i(u), u]_i$ sur une sphère. Par définition du produit scalaire sur V_i, nous obtenons

$$\begin{aligned}[P_i(u),u]_i &= \int_\Omega P_i(u)u\,dx = a(u,u) - \int_\Omega f(u)u\,dx \\ &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}),\end{aligned}$$

où C_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré. Nous voyons donc que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2} \Longrightarrow [P_i(u),u]_i \geq 0.$$

Or toutes les normes sont équivalentes sur V_i, qui est de dimension finie. Par conséquent, il existe $\rho > 0$ tel que $\sqrt{[u,u]_i} \geq \rho$ entraîne que l'on a $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}$. Par le théorème 26, le problème (4.4) admet une solution u_i telle que $\sqrt{[u_i,u_i]_i} \leq \rho$. □

Nous avons construit une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de solutions du problème approché. Notons que nous aurions également pu appliquer le théorème de Brouwer lui-même en suivant de plus près la démonstration d'existence par point fixe.

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand la dimension i tend vers l'infini. On commence par une estimation uniforme par rapport à i.

Lemme 13 *La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$.*

Démonstration. On reprend le calcul précédent :

$$a(u_i,u_i) = \int_\Omega f(u_i)u_i\,dx \leq C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2},$$

ce qui montre le lemme. □

On peut maintenant passer à la limite dans le problème variationnel.

Lemme 14 *Toute sous-suite faiblement convergente de la suite u_i converge vers une solution du problème* 4.1.

Démonstration. Soit une sous-suite $u_{i'}$ telle que $u_{i'} \rightharpoonup u$ dans $H^1_0(\Omega)$ (il en existe d'après le lemme précédent). Par le théorème de Rellich, on a donc $u_{i'} \to u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Par conséquent, le théorème de Carathéodory implique que $f(u_{i'}) \to f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Fixons un entier j. Comme la suite V_i est croissante, pour tout $i \geq j$, $v_j \in V_i$. Par conséquent, on peut appliquer l'équation (4.2) avec la fonction test v_j :

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_j \, dx = \int_\Omega f(u_i) v_j \, dx.$$

Comme $\nabla u_{i'} \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a d'une part

$$\int_\Omega \nabla u_{i'} \cdot \nabla v_j \, dx \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_j \, dx.$$

Comme $f(u_{i'}) \to f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort d'autre part, on a également

$$\int_\Omega f(u_{i'}) v_j \, dx \to \int_\Omega f(u) v_j \, dx.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_j \, dx = \int_\Omega f(u) v_j \, dx.$$

Comme cette équation est linéaire par rapport à v_j, elle reste vraie pour les combinaisons linéaires finies des v_j, soit

$$\forall v \in \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx. \tag{4.5}$$

Enfin, $\cup_{i=0}^{\infty} V_i$ est dense dans V. Pour tout $v \in V$, il existe une suite $z_i \in V_i$ telle que $z_i \to v$ dans V fort. On applique l'égalité précédente avec $v = z_i$ et l'on passe à la limite quand $i \to +\infty$ sans difficulté pour conclure que u est bien solution du problème (4.1). □

4.2 La méthode de Galerkin pour la mécanique des fluides

La résolution du problème modèle ne présente guère de difficultés, que ce soit pour l'existence en dimension finie, l'estimation des solutions approchées ou le passage à la limite sur la dimension. Nous donnons maintenant un exemple d'application de la méthode de Galerkin à un problème qui présente des similarités avec les équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

Les équations de Navier-Stokes sont des équations extrêmement importantes qui décrivent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible ou compressible, stationnaire ou instationnaire. Dans le cas incompressible, elles prennent la forme suivante. On cherche un couple (u, p), où u est la vitesse du fluide (laquelle a trois composantes en dimension trois, donc à valeurs vectorielles) et p la pression (un scalaire), qui satisfait

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u - \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

avec des conditions aux limites appropriées. La constante ν est la viscosité du fluide, l'opérateur $u\cdot\nabla$ est défini par $[(u\cdot\nabla)v]_i = u_j\partial_j v_i$ avec sommation de 1 à 3 par rapport à l'indice répété j, et f est une densité de forces appliquées. La relation $\operatorname{div} u = 0$ exprime l'incompressibilité du fluide. Il s'agit de la version stationnaire du problème, puisqu'il n'y a pas de dépendance en temps. L'étude du système (4.6) va bien au-delà du propos de ces notes. Néanmoins, nous allons considérer une équation beaucoup plus simple, mais qui présente une non linéarité analogue à celle des équations de Navier-Stokes et qui partage donc certaines de ses propriétés.

Nous allons donc chercher une fonction *scalaire* u telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + u\partial_1 u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

Nous préciserons le sens fonctionnel de cette équation plus loin. Comme nous l'avons déjà souligné, il s'agit d'une équation scalaire, alors que les équations de Navier-Stokes sont vectorielles. Elle ne contient donc rien qui puisse être comparé à la condition d'incompressibilité et à la présence du gradient de pression. Par contre, le terme non linéaire $u\partial_1 u$ modélise bien le terme $u\cdot\nabla u$ des équations de Navier-Stokes.

Pour appliquer la méthode de Galerkin, nous allons avoir besoin d'une base un peu particulière. On commence par un résultat de densité.

Lemme 15 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$.*

Remarque 25 Nous savons déjà que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ par définition de $H_0^1(\Omega)$ d'une part et dans $L^p(\Omega)$ d'autre part par convolution par des noyaux régularisants. Le lemme 15 affirme en plus que l'on peut approcher tout élément de l'intersection de ces deux espaces par une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ qui converge simultanément pour les deux topologies. Notons que le résultat reste vrai dans un ouvert absolument quelconque. $\square$

Démonstration. On procède par approximations successives. Soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. On tronque u à la hauteur k en posant $u_k = T_k(u)$. On a par conséquent $u_k \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $u_k \to u$ dans $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ quand $k \to +\infty$ grâce au théorème 43 (en version L^p).

Considérons une suite $\varphi_m \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_m \to u_k$ dans $H_0^1(\Omega)$ et presque partout. Soit $\widetilde{T}_{k+1}$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que pour $|t| \leq k$, $\widetilde{T}_{k+1}(t) = t$ et $|\widetilde{T}_{k+1}(s)| \leq k+1$ pour tout s (il en existe, manifestement). L'opérateur de superposition associé est continu sur $H_0^1(\Omega)$, donc $\widetilde{T}_{k+1}(\varphi_m) \to \widetilde{T}_{k+1}(u_k) = u_k$ dans $H_0^1(\Omega)$ et presque partout, puisque u_k est déjà tronqué à la hauteur k. Comme $\|\widetilde{T}_{k+1}(\varphi_m)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k+1$ et Ω est borné, on en déduit que $\widetilde{T}_{k+1}(\varphi_m) \to u_k$ dans $L^p(\Omega)$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Par construction, $\widetilde{T}_{k+1}(\varphi_m)$ est à support compact dans Ω et de classe C^∞. Pour conclure, il convient d'extraire une suite diagonale convergente des deux approximations successives $m \to +\infty$ et $k \to +\infty$. □

Remarque 26 Si $u \in L^\infty(\Omega)$ alors la construction précédente fournit une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $L^\infty(\Omega)$ faible-$*$. En effet, toutes les approximations successives sont alors bornées dans $L^\infty(\Omega)$ et donc faiblement-$*$ convergentes. On peut en extraire une suite diagonale convergente car la topologie faible-$*$ de $L^\infty(\Omega)$ est métrisable sur les bornés (en effet, $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$, espace de Banach séparable). □

Nous précisons maintenant le sens fonctionnel de l'équation à résoudre.

Lemme 16 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u\partial_1 u \in L^s(\Omega)$ avec*

$$\begin{cases} 1 \leq s \leq 2 & \textit{pour} \quad N = 1, \\ 1 \leq s < 2 & \textit{pour} \quad N = 2, \\ 1 \leq s \leq \frac{N}{N-1} & \textit{pour} \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. D'après les injections de Sobolev,

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \quad \text{si} \quad N = 1, \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pour tout } q < +\infty \quad \text{si} \quad N = 2, \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \text{ avec } 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad \text{si} \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Par l'inégalité de Hölder, pour tout couple de nombres positifs (θ, θ') tels que $1/\theta + 1/\theta' = 1$, on a

$$\int_\Omega |u\partial_1 u|^s \, dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^{s\theta} \, dx\Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\int_\Omega |\partial_1 u|^{s\theta'} \, dx\Big)^{\frac{1}{\theta'}}.$$

Pour $N \geq 3$, on saura conclure si $1 \leq s\theta \leq 2^*$ et $1 \leq s\theta' \leq 2$, *i.e.*, $s(1/2^* + 1/2) \leq 1$ et $s \geq 1$. Comme $(1/2^* + 1/2) = (N-1)/N$, on obtient le résultat dans ce cas.

Pour $N = 2$, le même calcul donne $s(1/q + 1/2) \leq 1$ pour un certain $q < +\infty$, soit $s < 2$. Le cas $N = 1$ est trivial. □

Remarque 27 i) Le lemme 16 permet de préciser le sens à donner à l'équation aux dérivées partielles du problème (4.7). Étant donné $f \in H^{-1}(\Omega)$, on va donc chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u + u\partial_1 u = f \quad \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{4.8}$$

Cette équation a un sens, puisque l'on a $\nabla u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta u = -\mathrm{div}\,(\nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$. De plus, $u\partial_1 u \in L^s(\Omega)$ pour les valeurs de s données dans le lemme. Tous les termes de l'équation sont donc des distributions parfaitement bien définies.

ii) Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (4.8), alors nécessairement $u\partial_1 u \in H^{-1}(\Omega)$. L'information $u\partial_1 u \in H^{-1}(\Omega)$ est une information supplémentaire apportée par l'équation si $L^s(\Omega) \not\subset H^{-1}(\Omega)$. Comme, par dualité, $L^s(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ est équivalent à $H_0^1(\Omega) \subset L^{s'}(\Omega)$ avec $s' = 2$ pour $N = 1$, $s' > 2$ pour $N = 2$ et $s' = N$ pour $N \geq 3$, on voit grâce aux injections de Sobolev que si $N \geq 5$, $L^s(\Omega) \not\subset H^{-1}(\Omega)$. En particulier, dans les cas « physiques », $N = 2,3$, l'équation (4.8) a lieu *a priori* au sens de $H^{-1}(\Omega)$. □

Nous allons montrer le théorème d'existence suivant par la méthode de Galerkin.

Théorème 45 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème* 4.7.

On commence par construire une base de Galerkin appropriée. Dans la suite s' prend les valeurs indiquées dans la remarque ii) qui suit le lemme 16.

Lemme 17 *Il existe une famille dénombrable $(w_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{D}(\Omega)$ dont les combinaisons linéaires finies sont denses dans $H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme $H_0^1(\Omega)$ et $L^{s'}(\Omega)$ sont tous deux séparables pour leur norme respective, il vient que $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$ est séparable pour sa norme naturelle $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^{s'}(\Omega)}$. En effet, V est isométrique au sous-ensemble $\Delta = \{(v,v) \in H_0^1(\Omega) \times L^{s'}(\Omega)\}$ du produit cartésien $H_0^1(\Omega) \times L^{s'}(\Omega)$ muni de la norme $\|(v,w)\| = \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{L^{s'}(\Omega)}$, lequel est clairement séparable.

On utilise maintenant le fait que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans V, *cf.* lemme 15, pour construire une famille dénombrable dense formée d'éléments de $\mathscr{D}(\Omega)$ et on conclut en utilisant le lemme 11. □

Considérons maintenant le problème variationnel en dimension finie.

Lemme 18 *Soit* $V_m = \mathrm{vect}\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$*. Le problème : trouver* $u_m \in V_m$ *tel que*

$$\forall v_m \in V_m, \quad \int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla v_m \, dx + \int_\Omega u_m \partial_1 u_m v_m \, dx = \langle f, v_m \rangle, \tag{4.9}$$

admet au moins une solution. De plus cette solution satisfait

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Démonstration. On commence par remarquer que par construction des w_i, $V_m \subset \mathscr{D}(\Omega)$. On munit V_m du produit scalaire L^2 (sans notation spécifique cette fois). Comme précédemment, il existe deux applications continues A_m et B_m de V_m dans V_m telles que

$$\forall z_m, v_m \in V_m, \quad \begin{cases} \int_\Omega \nabla z_m \cdot \nabla v_m \, dx = \int_\Omega A_m(z_m) v_m \, dx, \\ \int_\Omega z_m \partial_1 z_m v_m \, dx = \int_\Omega B_m(z_m) v_m \, dx. \end{cases}$$

De même, il existe $F_m \in V_m$ tel que

$$\forall v_m \in V_m, \quad \langle f, v_m \rangle = \int_\Omega F_m v_m \, dx.$$

Posant $P_m(z_m) = A_m(z_m) + B_m(z_m) - F_m$, le problème variationnel se réécrit donc sous la forme : trouver $u_m \in V_m$ tel que

$$P_m(u_m) = 0.$$

Pour résoudre une telle équation en utilisant le théorème 26, nous sommes donc amenés à calculer les produits scalaires :

$$\int_\Omega P_m(z_m) z_m \, dx = \int_\Omega \nabla z_m \cdot \nabla z_m \, dx + \int_\Omega z_m^2 \partial_1 z_m \, dx - \langle f, z_m \rangle. \tag{4.11}$$

Or, comme $z_m \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a aussi $z_m^3 \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\partial_1(z_m^3) = 3 z_m^2 \partial_1 z_m$. Par conséquent,

$$\int_\Omega z_m^2 \partial_1 z_m \, dx = \frac{1}{3} \int_\Omega \partial_1(z_m^3) \, dx = 0,$$

et le produit scalaire (4.11) se réduit donc à

$$\int_\Omega P_m(z_m) z_m \, dx = \int_\Omega \nabla z_m \cdot \nabla z_m \, dx - \langle f, z_m \rangle. \tag{4.12}$$

On constate que le terme non linéaire a disparu. Il est alors élémentaire de trouver une sphère sur laquelle $\int_\Omega P_m(z_m) z_m \, dx \geq 0$, ce qui permet de conclure à l'existence de u_m.

Reprenant alors (4.12) pour $z_m = u_m$, on obtient

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla u_m \, dx = \langle f, u_m \rangle \leq \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

d'où l'estimation (4.10). □

D'après l'estimation (4.10), nous pouvons extraire de la suite u_m une sous-suite, toujours notée u_m, qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite u. Nous pouvons alors achever la démonstration du théorème 45.

Lemme 19 *La limite faible $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème variationnel :*

$$\forall v \in V, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u \partial_1 u v \, dx = \langle f, v \rangle. \tag{4.13}$$

En particulier, u est solution du problème 4.7.

Démonstration. Fixons un indice j. Pour $m \geq j$, $w_j \in V_m$ et nous avons donc

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla w_j \, dx + \int_\Omega u_m \partial_1 u_m w_j \, dx = \langle f, w_j \rangle. \tag{4.14}$$

Comme $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, on a immédiatement

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla w_j \, dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx.$$

Par ailleurs, par le théorème de Rellich, $u_m \to u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Comme $w_j \in \mathscr{D}(\Omega)$, on en déduit tout aussi immédiatement que $u_m w_j \to u w_j$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Combiné avec la convergence faible de $\partial_1 u_m$, ceci donne pour le terme non linéaire

$$\int_\Omega u_m w_j \partial_1 u_m \, dx \longrightarrow \int_\Omega u w_j \partial_1 u \, dx.$$

Par conséquent, passant à la limite quand $m \to +\infty$ dans (4.14), nous obtenons (le second membre ne dépend pas de m)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx + \int_\Omega u \partial_1 u w_j \, dx = \langle f, w_j \rangle.$$

Cette égalité est vraie pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Elle implique par combinaisons linéaires finies que

$$\forall v \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u \partial_1 u v \, dx = \langle f, v \rangle.$$

Ici encore, $\cup_{m=1}^{\infty} V_m$ est dense dans $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$. Pour tout $v \in V$, il existe donc une suite $v_m \in V_m$ telle que $v_m \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort et dans $L^{s'}(\Omega)$ fort. D'après la première convergence

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_m \, dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \qquad \langle f, v_m \rangle \longrightarrow \langle f, v \rangle$$

d'une part, et d'autre part, par la deuxième convergence

$$\int_\Omega u\partial_1 u v_m\,dx \longrightarrow \int_\Omega u\partial_1 u v\,dx.$$

En effet, on a vu que $u\partial_1 u \in L^s(\Omega)$. On obtient donc bien le problème variationnel 4.13.

Pour conclure, on remarque que $\mathscr{D}(\Omega) \subset V$, ce qui implique que u est bien solution du problème 4.7 de départ. □

Remarque 28 Le problème variationnel est un peu inhabituel, puisque l'espace où se trouve la solution $H_0^1(\Omega)$ est en général, *i.e.*, pour $N \geq 5$, différent de l'espace des fonctions test, même si ce dernier en est un sous-espace dense. En particulier, on ne peut pas prendre $v = u$ dans (4.13). En effet, il n'y a aucune raison pour que u appartienne à $L^{s'}(\Omega)$, puisque l'équation ne fournit aucun contrôle sur la norme $L^{s'}(\Omega)$ des solutions éventuelles. □

Pour pallier cet inconvénient, on fait la remarque suivante.

Proposition 20 *Toute solution du problème* 4.7 *satisfait*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \langle u\partial_1 u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Démonstration. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème 4.7, alors $u\partial_1 u = f + \Delta u$ appartient à $H^{-1}(\Omega)$ comme on l'a déjà noté, et l'on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle u\partial_1 u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &= \langle f + \Delta u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \textstyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'équation variationnelle cherchée. □

Pour exploiter le problème (4.15), on a besoin d'un résultat technique.

Lemme 20 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *On se donne une distribution* T *telle que* $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$. *Alors, pour tout* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$,

$$\langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega T(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration. D'après le lemme 15, il existe une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort et $\varphi_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$ fort si $p < +\infty$ et faible-$*$ si $p = +\infty$. Comme $T \in L^{p'}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, l'identification canonique des fonctions localement intégrables à des distributions nous dit que

$$\langle T, \varphi_n \rangle_{\mathscr{D}'(\Omega)\mathscr{D}(\Omega)} = \int_\Omega T(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Utilisant les convergences de la suite φ_n, on peut clairement passer à la limite dans les deux membres de cette égalité quand $n \to +\infty$ et obtenir ainsi le lemme. $\square$

Corollaire 46 *Égalité d'énergie : toute solution du problème* 4.7 *satisfait*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\,dx = \langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{4.16}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle u\partial_1 u, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$. On procède par une troncature un peu différente de celle utilisée jusqu'à présent. Soit S_n la fonction continue affine par morceaux

$$S_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq 2n, \\ t & \text{si } |t| \leq n, \\ -t-2n & \text{si } -2n \leq t \leq -n, \\ -t+2n & \text{si } n \leq t \leq 2n. \end{cases}$$

Nous avons clairement $S_n(u) \in H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$. Par conséquent, le lemme 20 implique que

$$\langle u\partial_1 u, S_n(u) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega u\partial_1 u S_n(u)\,dx. \tag{4.17}$$

Introduisons alors la fonction

$$G_n(t) = \int_0^t sS_n(s)\,ds.$$

Comme $|sS_n(s)| \leq n^2$, il vient que G_n appartient à $C^1(\mathbb{R})$ et est globalement Lipschitzienne. Par conséquent, $G_n(u) \in H_0^1(\Omega)$ avec $\nabla G_n(u) = uS_n(u)\nabla u$ et l'on déduit de (4.17) que

$$\langle u\partial_1 u, S_n(u) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \partial_1 G_n(u)\,dx = 0. \tag{4.18}$$

Il est facile de voir en utilisant les mêmes arguments que dans l'étude de la troncature que $S_n(u) \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort quand $n \to +\infty$. Passant à la limite dans (4.18), on obtient le corollaire. $\square$

Remarque 29 La fonction G_n est une approximation globalement Lipschitzienne de la fonction $t \mapsto t^3/3$. La nullité du terme $\langle u\partial_1 u, u\rangle$ provient donc essentiellement de l'argument déjà utilisé dans l'approximation de Galerkin en dimension finie, quoique légèrement raffiné. On ne pouvait pas utiliser la troncature T_n ici, car les primitives de $s \mapsto sT_n(s)$ ne sont pas globalement Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.$\square$

Corollaire 47 *Toute solution du problème* 4.7 *satisfait l'estimation*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Démonstration. Immédiat d'après l'égalité d'énergie. $\square$

Nous concluons ce chapitre par un résultat d'unicité qui montre qu'il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons déjà construite. Le résultat repose sur l'utilisation de fonctions test non linéaires qui approchent le signe de la différence de deux solutions éventuelles. Plus précisément, pour tout $\delta > 0$, on introduit la fonction continue affine par morceaux

$$\Sigma_\delta(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq -\delta, \\ \frac{t}{\delta} & \text{si } |t| \leq \delta, \\ +1 & \text{si } t \geq \delta, \end{cases}$$

d'où

$$\Sigma'_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \delta, \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } |t| < \delta. \end{cases}$$

Nous utiliserons l'identité $\Sigma'_\delta(t)^2 = \frac{1}{\delta}\Sigma'_\delta(t)$. On commence par un lemme technique.

Lemme 21 *Pour tous $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, posant $w = u_1 - u_2$, on a*

$$\int_\Omega (u_1\partial_1 u_1 - u_2\partial_1 u_2)\Sigma_\delta(w)\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_1+u_2)w\Sigma'_\delta(w)\partial_1 w\,dx. \tag{4.19}$$

Remarque 30 Comme $|w\Sigma'_\delta(w)| \leq 1$, l'intégrale du second membre a bien un sens. $\square$

Démonstration. On considère deux suites $\varphi_1^n, \varphi_2^n \in \mathscr{D}(\Omega)$ qui convergent respectivement vers u_1 et u_2 dans $H_0^1(\Omega)$ fort. À n fixé, $(\varphi_1^n)^2 - (\varphi_2^n)^2$ et $\Sigma_\delta(\varphi_1^n - \varphi_2^n)$ appartiennent tous deux à $H_0^1(\Omega)$. Posant $\psi^n = \varphi_1^n - \varphi_2^n$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega(\varphi_1^n\partial_1\varphi_1^n - \varphi_2^n\partial_1\varphi_2^n)\Sigma_\delta(\psi^n)\,dx &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega \partial_1\big((\varphi_1^n)^2 - (\varphi_2^n)^2\big)\Sigma_\delta(\psi^n)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega\big((\varphi_1^n)^2 - (\varphi_2^n)^2\big)\partial_1\Sigma_\delta(\psi^n)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega(\varphi_1^n + \varphi_2^n)\psi^n\Sigma'_\delta(\psi^n)\partial_1\psi^n\,dx.\end{aligned} \tag{4.20}$$

On introduit alors la fonction $\Gamma_\delta(t) = \int_0^t s\Sigma'_\delta(s)\,ds$. Elle est globalement Lipschitzienne avec deux points de non-dérivabilité. Par conséquent, $\Gamma_\delta(\psi^n) \in H_0^1(\Omega)$, $\partial_1\Gamma_\delta(\psi^n) = \psi^n\Sigma'_\delta(\psi^n)\partial_1\psi^n$ et (4.20) se réécrit sous la forme

$$\int_\Omega(\varphi_1^n\partial_1\varphi_1^n - \varphi_2^n\partial_1\varphi_2^n)\Sigma_\delta(\psi^n)\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\varphi_1^n + \varphi_2^n)\partial_1\Gamma_\delta(\psi^n)\,dx. \tag{4.21}$$

Faisons tendre n vers l'infini. On a $\varphi_1^n + \varphi_2^n \to u_1 + u_2$ dans $L^2(\Omega)$ fort, $\partial_1\Gamma_\delta(\psi^n) \to \partial_1\Gamma_\delta(w)$ dans $L^2(\Omega)$ fort, donc

$$\int_\Omega(\varphi_1^n + \varphi_2^n)\partial_1\Gamma_\delta(\psi^n)\,dx \longrightarrow \int_\Omega(u_1 + u_2)\partial_1\Gamma_\delta(w)\,dx = \int_\Omega(u_1 + u_2)w\Sigma'_\delta(w)\partial_1 w\,dx.$$

Pour le membre de gauche de (4.21), on note que $\Sigma_\delta(\psi^n) \to \Sigma_\delta(w)$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort, avec une borne uniforme dans $L^\infty(\Omega)$. Par conséquent, $\Sigma_\delta(\psi^n) \rightharpoonup \Sigma_\delta(w)$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible-$*$. De plus, $\varphi_1^n\partial_1\varphi_1^n - \varphi_2^n\partial_1\varphi_2^n \to u_1\partial_1 u_1 - u_2\partial_1 u_2$ dans $L^1(\Omega)$ fort par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par conséquent

$$\int_\Omega(\varphi_1^n\partial_1\varphi_1^n - \varphi_2^n\partial_1\varphi_2^n)\Sigma_\delta(\psi^n)\,dx \longrightarrow \int_\Omega(u_1\partial_1 u_1 - u_2\partial_1 u_2)\Sigma_\delta(w)\,dx,$$

ce qui montre le lemme. □

Théorème 48 *La solution du problème* 4.15 *est unique.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions. Posant $w = u_1 - u_2$ et soustrayant les deux équations, on voit que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\,dx + \langle u_1\partial_1 u_1 - u_2\partial_1 u_2, v\rangle = 0.$$

En particulier, on peut prendre $v = \Sigma_\delta(w)$. Comme $\Sigma_\delta(w) \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, on obtient alors grâce au lemme 20

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\Sigma_\delta(w)\,dx + \int_\Omega(u_1\partial_1 u_1 - u_2\partial_1 u_2)\Sigma_\delta(w)\,dx = 0.$$

Utilisons le lemme 21. Il vient

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \Sigma_\delta(w)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_1+u_2) w \Sigma'_\delta(w)\partial_1 w\,dx. \qquad (4.22)$$

Comme $\nabla\Sigma_\delta(w) = \Sigma'_\delta(w)\nabla w = \delta\Sigma'_\delta(w)^2\nabla w = \delta\Sigma'_\delta(w)\nabla\Sigma_\delta(w)$, on voit que $\nabla w\cdot \nabla\Sigma_\delta(w) = \delta\nabla\Sigma_\delta(w)\cdot\nabla\Sigma_\delta(w)$, et l'équation (4.22) devient

$$\int_\Omega \nabla\Sigma_\delta(w)\cdot\nabla\Sigma_\delta(w)\,dx = \frac{1}{2\delta}\int_\Omega (u_1+u_2) w \Sigma'_\delta(w)\partial_1 w\,dx. \qquad (4.23)$$

Soit $H_{\delta,w}$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$E_{\delta,w} = \{x\in\Omega; w(x)\neq 0 \text{ et } |w(x)|<\delta\},$$

ensemble défini à un ensemble de mesure nulle près, comme toujours. Comme l'intégrande du membre de droite de (4.23) est nulle presque partout en dehors de $E_{\delta,w}$, on peut réécrire l'égalité sous la forme

$$\int_\Omega \nabla\Sigma_\delta(w)\cdot\nabla\Sigma_\delta(w)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega H_{\delta,w}(u_1+u_2)\Big(\frac{1}{\delta}wH_{\delta,w}\Big)\partial_1\Sigma_\delta(w)\,dx. \qquad (4.24)$$

On remarque alors que $|\frac{1}{\delta}wH_{\delta,w}|\leq 1$. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de (4.24) que

$$\|\nabla\Sigma_\delta(w)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega H_{\delta,w}(u_1+u_2)^2\,dx\Big)^{1/2}\|\nabla\Sigma_\delta(w)\|_{L^2(\Omega)},$$

soit

$$2\|\nabla\Sigma_\delta(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\int_{E_{\delta,w}}(u_1+u_2)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Notons maintenant que $\cap_{\delta>0}\{x\in\Omega;|w(x)|<\delta\} = \{x\in\Omega; w(x)=0\}$. Par conséquent, $\operatorname{mes}(E_{\delta,w})\to 0$ quand $\delta\to 0$. Comme $(u_1+u_2)^2\in L^1(\Omega)$, on en déduit que $\|\nabla\Sigma_\delta(w)\|_{L^2(\Omega)}\to 0$ quand $\delta\to 0$. Par l'inégalité de Poincaré, ceci implique que $\|\Sigma_\delta(w)\|_{H^1(\Omega)}\to 0$, puis que $\|\Sigma_\delta(w)\|_{L^1(\Omega)}\to 0$. Comme $|\Sigma_\delta(w)|=1$ sur l'ensemble $\{x\in\Omega;|w|\geq\delta\}$, il vient

$$\operatorname{mes}(\{x\in\Omega;|w|\geq\delta\})\longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \delta\to 0, \delta>0. \qquad (4.25)$$

Or, la fonction $\delta\mapsto\operatorname{mes}(\{x\in\Omega;|w|\geq\delta\})$ est positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par (4.25), elle est donc identiquement nulle ce qui équivaut à $w=0$ presque partout, soit $u_1=u_2$. □

Remarque 31 Le raisonnement utilisé ici est très spécifique à l'équation et à la non linéarité considérées. On peut toutefois noter des arguments d'intérêt plus général, comme l'usage d'une fonction test non linéaire et la façon dont, dans le passage de l'équation (4.22) à l'équation (4.23), on a fait apparaître la fonction test non linéaire dans la forme bilinéaire. □

Exercices du chapitre 4

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, A une matrice $N \times N$ symétrique à coefficients a_{ij} dans $L^\infty(\Omega)$ et telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque tout $x \in \Omega$, et $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer que le problème : $u \in H_0^1(\Omega)$, $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x,u,\nabla u)$ admet au moins une solution (*Indication : après avoir correctement défini une approximation de Galerkin u_m de la solution potentielle, on pourra montrer que $f(x,u_m,\nabla u_m) \rightharpoonup \bar{f}$ pour un certain $\bar{f}$ dans $L^2(\Omega)$, puis que la suite u_m converge en fait fortement dans $H^1(\Omega)$*).

2. À propos de la nécessité d'effectuer les circonvolutions de la preuve du Lemme 15, soit Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Trouver un réel p et une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ mais $\varphi_n \not\to 0$ dans $L^p(\Omega)$ (*Indication : se placer à $N \geq 3$ et considérer une suite de la forme $\varphi_n(x) = n^s\varphi(nx)$ avec s bien choisi*). Ce raisonnement permet de retrouver l'exposant de Sobolev au cas bien improbable où l'on ne s'en rappellerait plus.

3. Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^3$ et soit $u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{div} u = 0$. On prolonge u par 0 en dehors de la boule et pour $0 < \varepsilon < 1$, on note

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star (u((1-\varepsilon)^{-1}x)),$$

où ρ_ε désigne un noyau régularisant à support dans la boule de rayon ε. Montrer que la restriction de u_ε à B appartient à $\mathscr{D}(B;\mathbb{R}^3)$ et que $u_\varepsilon \to u$ dans H^1 quand $\varepsilon \to 0$. En déduire la densité de $\mathscr{V} = \{\varphi \in \mathscr{D}(B;\mathbb{R}^3); \operatorname{div}\varphi = 0\}$ dans $V = \{u \in H_0^1(B;\mathbb{R}^3); \operatorname{div} u = 0\}$.

4. Avec les notations précédentes, étant donné $f \in L^2(B;\mathbb{R}^3)$, montrer que le problème : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \int_B (\nabla u : \nabla v + [(\nabla u)u] \cdot v)\, dx = \int_B f \cdot v\, dx,$$

admet au moins une solution (si u est une application de B dans $\mathbb{R}^3$, son gradient ∇u est la matrice 3×3 de composantes $(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i$ et le produit scalaire de deux matrices A_1 et A_2 est défini par $A_1 : A_2 = \operatorname{tr}(A_1^T A_2)$. Le vecteur $(\nabla u)u$ a donc pour composantes $u_j\partial_j u_i$, $i = 1,2,3$, avec la convention d'Einstein de sommation des indices répétés. On le note plutôt $u\nabla u$ dans la littérature Navier-Stokes, $u\nabla$ désignant l'opérateur différentiel $u_j\partial_j$). Remarque : on peut en déduire l'existence d'une solution au problème de Navier-Stokes stationnaire.