Notes de cours
M2 — Équations aux dérivées partielles elliptiques

Hervé Le Dret

24 octobre 2006

Table des matières

Chapitre 3

Les opérateurs de superposition

Nous avons rencontré dans l'étude du problème modèle des opérateurs du type $u \mapsto f(u)$. Ce type d'opérateur est appelé *opérateurs de superposition* ou *opérateurs de Nemytsky*.

3.1 Les opérateurs de superposition dans $L^p(\Omega)$

Nous avons vu que sous des hypothèses techniques raisonnables, ces opérateurs envoient continûment $L^p(\Omega)$ fort dans $L^p(\Omega)$ fort par le théorème de Carathéodory. Ce résultat ne subsiste pas dans $L^p(\Omega)$ faible. Traitons le cas $p = 2$.

Proposition 17 *Soient Ω et f comme au théorème de Carathéodory. L'application $\tilde{f}$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ faible dans $L^2(\Omega)$ faible si et seulement si f est affine.*

Démonstration. Soit Q un cube inclus dans Ω. Par un changement de coordonnées, nous pouvons toujours supposer que $Q =]0,1[^N$. Soient a et b deux réels quelconques et θ un nombre compris entre 0 et 1. On définit une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin Q, \\ v_n(x_1) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$v_n(t) = \begin{cases} a & \text{si } \frac{[nt]}{n} \leq t \leq \frac{[nt]+\theta}{n}, \\ b & \text{si } \frac{[nt]+\theta}{n} < t < \frac{[nt]+1}{n}, \end{cases}$$

où $[s]$ désigne la partie entière de s. La suite u_n oscille entre les valeurs a et b d'autant plus rapidement que n est grand. La suite $f \circ u_n$ a des propriétés analogues, en effet

$$f \circ u_n(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x \notin Q, \\ w_n(x_1) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$w_n(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si } \frac{[nt]}{n} \leq t \leq \frac{[nt]+\theta}{n}, \\ f(b) & \text{si } \frac{[nt]+\theta}{n} < t < \frac{[nt]+1}{n}. \end{cases}$$

Les suites u_n et $f \circ u_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$. Elles contiennent donc chacune une sous-suite faiblement convergente. Dans la suite nous ne distinguerons pas ces sous-suites, car il apparaîtra clairement que les suites entières convergent, par unicité de la limite. Nous avons donc $u_n \rightharpoonup u$ et $f \circ u_n \rightharpoonup g$, et il s'agit d'identifier u et g. Tout d'abord, il est clair que

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin Q, \\ v(x_1) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où v est la limite faible dans $L^2(0,1)$ de la suite v_n. En effet, l'espace des fonctions de x_1, nulles en dehors de Q, est un fermé de $L^2(\Omega)$ isométrique à $L^2(0,1)$. On se ramène donc de cette façon à la dimension 1. Considérons un sous-intervalle $[t_1, t_2]$ quelconque de $[0,1]$. Nous déduisons de la convergence faible de la suite v_n que

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Calculons directement la limite du terme de gauche en découpant l'intervalle en parties qui coïncident avec les oscillations de v_n :

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)\,dt = \int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)\,dt + \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v_n(t)\,dt + \int_{\frac{[nt_2]-1}{n}}^{t_2} v_n(t)\,dt.$$

Par construction de v_n, on voit que

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v_n(t)\,dt = \frac{\theta a + (1-\theta) b}{n}.$$

Par ailleurs, on majore facilement les deux intégrales des extrémités

$$\max\left\{\left|\int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)\,dt\right|, \left|\int_{\frac{[nt_2]-1}{n}}^{t_2} v_n(t)\,dt\right|\right\} \leq \frac{\max\{|a|,|b|\}}{n}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)\,dt &= \tfrac{[nt_2]-[nt_1]-1}{n}(\theta a + (1-\theta)b) + \textstyle\int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)\,dt + \int_{\frac{[nt_2]-1}{n}}^{t_2} v_n(t)\,dt \\ &= \tfrac{[nt_2]-[nt_1]}{n}(\theta a + (1-\theta)b) + r_n, \end{aligned}$$

où $|r_n| \leq 3\frac{\max\{|a|,|b|\}}{n}$. Il est facile de voir que $\frac{[nt_2]-[nt_1]}{n} \to t_2 - t_1$, ce qui montre que

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)\,dt \longrightarrow (t_2-t_1)(\theta a + (1-\theta)b).$$

Il vient donc

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \theta a + (1-\theta)b.$$

Faisant tendre t_2 vers t_1, on en déduit par un théorème de Lebesgue que v est égale presque partout à la fonction constante $\theta a + (1-\theta)b$.

Le même raisonnement appliqué à la suite w_n montre que

$$g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x \notin Q, \\ \theta f(a) + (1-\theta)f(b) & \text{sinon,} \end{cases}$$

Par conséquent, une condition nécessaire pour que $\tilde{f}$ soit séquentiellement continue (donc *a fortiori* continue) de $L^2(\Omega)$ faible dans $L^2(\Omega)$ faible, est que $f(u) = g$, c'est à dire, pour tous a, b et θ,

$$f(\theta a + (1-\theta)b) = \theta f(a) + (1-\theta)f(b).$$

En d'autres termes, f doit être affine. La réciproque est claire. □

Remarque 13 i) Nous avons en fait travaillé dans L^∞ faible-étoile. Du coup, la même construction fonctionne dans tous les L^p.

ii) Nous avons utilisé la limite faible d'une suite de fonctions oscillant de façon périodique entre deux valeurs. C'est une idée qui, convenablement généralisée, trouve nombre d'autres applications. Notons que si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ est périodique de période T, alors on montre de façon entièrement analogue que la suite $f_n(t) = f(nt)$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R})$ faible-étoile vers la moyenne de f, $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$.

iii) On voit sur cet exemple que la convergence faible se marie mal en général avec les applications non linéaires. Ce phénomène est une des causes qui rendent délicats les problème non linéaires. □

Le lien entre convergence faible et applications non linéaires peut être décrit plus finement par un objet que l'on appelle *mesures de Young*.

Théorème 37 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* u_n *une suite bornée dans* $L^\infty(\Omega)$*. Alors il existe une sous-suite* $u_{n'}$ *et pour presque tout* $x \in \Omega$ *une mesure de probabilité borélienne* ν_x *sur* $\mathbb{R}$ *telles que, pour tout* $f \in C^0(\mathbb{R})$*, on a*

$$f(u_{n'}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \bar{f} \text{ dans } L^\infty(\Omega), \tag{3.1}$$

où

$$\bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,d\nu_x(y) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.2}$$

Démonstration. On commence par extraire la sous-suite. Par hypothèse, on a $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ pour un certain M. Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans $C^0([-M,M])$ (il en existe une par le théorème de Weierstrass, par exemple les polynômes à coefficients rationnels). Pour chaque entier k, on a trivialement $\|p_k(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|p_k\|_{C^0([-M,M])}$, donc appliquant le procédé diagonal, on en déduit qu'il existe une suite extraite $u_{n'}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ un certain $\bar{p}_k \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k(u_{n'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{p}_k.$$

Pour passer à l'espace tout entier, on remarque que si $f \in C^0([-M,M])$, alors par le même argument que plus haut, il existe une sous-suite n'' de la suite n' telle que $f(u_{n''}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f}$ dans $L^\infty(\Omega)$ pour un certain $\bar{f}$. La seule chose à voir c'est que c'est en fait toute la suite $f(u_{n'})$ qui converge. Prenons $g \in L^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et choisissons k de telle sorte que $\|f - p_k\|_{C^0([-M,M])} \leq \frac{\varepsilon}{4\|g\|_{L^1(\Omega)}}$. Il vient

$$\left|\int_\Omega (f(u_{n'}) - f(u_{m'}))g\,dx\right| \leq \left|\int_\Omega (p_k(u_{n'}) - p_k(u_{m'}))g\,dx\right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où immédiatement que la suite $\int_\Omega f(u_{n'})g\,dx$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme elle contient une sous-suite qui converge vers $\int_\Omega \bar{f}g\,dx$, on a gagné pour les convergences (3.1).

Remarquons de plus que l'application $f \mapsto \bar{f}$ ainsi définie est linéaire continue (de norme inférieure à 1) de $C^0([-M,M])$ dans $L^\infty(\Omega)$. En effet,

$$\|\bar{f}\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\|g\|_{L^1(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega \bar{f}g\,dx = \sup_{\|g\|_{L^1(\Omega)}\leq 1} \lim_{n'\to\infty} \int_\Omega f(u_{n'})g\,dx.$$

Or pour de tels g

$$\int_\Omega f(u_{n'})g\,dx \leq \|f(u_{n'})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{C^0([-M,M])}.$$

(Une autre façon de voir ceci consiste à dire que $\|f(u_{n'})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{C^0([-M,M])}$ et que comme $f(u_{n'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f}$, on a $\|\bar{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf \|f(u_{n'})\|_{L^\infty(\Omega)}$.)

Montrons maintenant la formule de représentation (3.2). D'après le théorème des points de Lebesgue (voir Rudin), pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble négligeable $N_k \subset \Omega$ tel que si $x \notin N_k$, on a

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \bar{p}_k(y)\,dy \to \bar{p}_k(x) \text{ quand } \rho \to 0.$$

Soit $V = \mathrm{vect}\{(p_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$, c'est un sous-espace vectoriel dense de $C^0([-M,M])$. Posons $N = \cup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, c'est encore un ensemble négligeable et par combinaisons linéaires finies, on voit que pour tout $x \notin N$ et tout $q \in V$, on a

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \bar{q}(y)\,dy \to \bar{q}(x) \text{ quand } \rho \to 0.$$

Pour tout $x \notin N$, on introduit donc une forme linéaire ℓ_x sur V par

$$\ell_x(q) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \bar{q}(y)\,dy.$$

Cette forme linéaire est continue sur V, en effet

$$\left|\frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \bar{q}(y)\,dy\right| \leq \|\bar{q}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|q\|_{C^0([-M,M])}.$$

Elle se prolonge donc par continuité en une unique forme linéaire continue sur $C^0([-M,M])$. Pour tout $f \in C^0([-M,M])$, on a défini ainsi presque partout dans Ω une application $x \mapsto \ell_x(f)$. Comme pour tout $q \in V$, on a $\bar{q} = \ell_x(q)$ presque partout par construction, on en déduit que

$$\bar{f} - \ell_x(f) = \bar{f} - \bar{q} + \bar{q} - \ell_x(q) + \ell_x(q - f),$$

d'où

$$\|\bar{f} - \ell_x(f)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\|f - q\|_{C^0([-M,M])}.$$

Par conséquent, $\bar{f} = \ell_x(f)$ presque partout, pour tout f dans $C^0([-M,M])$ par densité de V.

Montrons maintenant que, pour tout $x \notin N$, la forme linéaire ℓ_x est positive. En effet, si $f \geq 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f + \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p}$, et on peut trouver $q_p \in V$ telle que $|f + \frac{1}{p} - q_p| \leq \frac{1}{2p}$ si bien que $q_p \geq 0$ et $q_p \to f$ dans $C^0([-M,M])$ quand $p \to +\infty$. Or on a $\bar{q}_p \geq 0$ comme limite faible-étoile d'une suite de fonctions positives. En effet, pour tout $g \in L^1(\Omega)$, $g \geq 0$, on a $0 \leq \int_\Omega q_p(u_{n'})g\,dx \to \int_\Omega \bar{q}_p g\,dx$. Par conséquent, $\ell_x(q_p) \geq 0$ par construction. Donc finalement, $0 \leq \lim_{p\to+\infty} \ell_x(q_p) = \ell_x(f)$ (remarque : on ne peut pas utiliser le fait que $\bar{f} = \ell_x(f)$ presque partout et que $\bar{f} \geq 0$ si $f \geq 0$ pour conclure ici, car ce « presque partout » dépend de f parcourant un ensemble non dénombrable).

Le théorème de représentation de Riesz (voir Rudin) nous dit donc que ℓ_x est représentée par une mesure de Radon positive ν_x sur $[-M,M]$, au sens où

$$\forall f \in C^0([-M,M]), \quad \ell_x(f) = \int_{-M}^{M} f(y)\,d\nu_x(y),$$

(on rappelle qu'une mesure de Radon est une mesure de Borel finie sur les compacts). Étendant ν_x par 0 en dehors de $[-M,M]$, on obtient finalement

$$\forall f \in C^0(\mathbb{R}), \quad \bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\nu_x(y) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Pour conclure la démonstration, il suffit d'appliquer la formule précédente à $f = 1$, pour laquelle on a $\bar{f} = 1$, d'où $1 = \int_{\mathbb{R}} d\nu_x(y)$ et ν_x est bien une mesure de probabilité. $\square$

La famille de mesures de probabilité ν_x paramétrée par les points x de l'ouvert Ω s'appelle la *famille des mesures de Young* associée à la sous-suite $u_{n'}$. Elle décrit la distribution asymptotique des valeurs que prennent les fonctions $u_{n'}$ et dépend de cette sous-suite. Dans l'exemple des fonctions u_n de la Proposition 17, il est clair que les mesures de Young ne dépendent pas de la sous-suite, ni de x (puisque toutes les limites faibles sont constantes) et que l'on a $\nu_x = \theta\delta_a + (1-\theta)\delta_b$. Pour avoir une mesure de Young qui dépend de x, il suffit de prendre par exemple $u_n + \sin x$, d'où $\nu_x = \theta\delta_{a+\sin x} + (1-\theta)\delta_{b+\sin x}$. Attention, en général même si la limite faible d'une suite est une constante, la mesure de Young dépend quand même de x, par exemple $u_n(x) = \sin x \sin nx$.

Remarque 14 Prenant le choix $f(y) = y$, on obtient en particulier que

$$u_{n'} \overset{*}{\rightharpoonup} u = \int_{\mathbb{R}} y\, d\nu_x(y) \text{ dans } L^\infty(\Omega), \tag{3.3}$$

donc les mesures de Young redonnent la limite faible-étoile de la suite $u_{n'}$ elle-même. Elles contiennent néanmoins beaucoup plus d'information sur le comportement de la suite que sa seule limite faible-étoile, *cf.* l'exemple $u_n(x) = \sin x \sin nx$ ci-dessus. $\square$

Remarque 15 On peut se demander pourquoi on a pris le chemin détourné du théorème des points de Lebesgue plutôt que de poser directement $\ell_x(q) = \bar{q}(x)$. C'est pour une question de choix des représentants de $\bar{q} \in V$ qui assure en même temps la continuité et la positivité de ℓ_x.

On aurait pu aussi bien se restreindre au sous-espace vectoriel des éléments formés des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des p_k. On peut alors éliminer un ensemble de mesure nulle, différent du précédent, en dehors duquel la définition ci-dessus de ℓ_x fonctionne comme plus haut sur cet autre sous-espace dense. $\square$

Donnons maintenant quelques-unes parmi les propriétés intéressantes des mesures de Young.

Corollaire 38 *Si f est convexe, on a $f(u(x)) \leq \bar{f}(x)$ presque partout.*

Démonstration. C'est l'inégalité de Jensen. En effet, pour presque tout x dans Ω

$$f(u(x)) = f\Big(\int_{\mathbb{R}} y\, d\nu_x(y)\Big) \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\nu_x(y) = \bar{f}(x),$$

(voir par exemple Rudin pour l'inégalité de Jensen). □

Ainsi, par exemple, on a $u^2 \leq \lim(u_{n'})^2$ presque partout. Un résultat important dans les applications des mesures de Young est la caractérisation de la convergence forte qu'elles permettent.

Proposition 18 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et ν_x une mesure de Young associée à une suite $u_{n'}$ de $L^\infty(\Omega)$. Si ν_x est une masse de Dirac pour presque tout x, alors $u_{n'}$ converge fortement vers u dans tous les L^p, $p < +\infty$, et (modulo une sous-suite) presque partout. Réciproquement, si $u_{n'}$ tend vers u presque partout, alors la mesure de Young est une masse de Dirac.*

Démonstration. On commence par remarquer que si ν_x est une masse de Dirac, nécessairement $\nu_x = \delta_{u(x)}$ d'après la formule (3.3). Faisant le choix $f(y) = |y|^p$, il vient donc

$$|u_{n'}|^p \overset{*}{\rightharpoonup} \int_{\mathbb{R}} |y|^p\, d\nu_x(y) = |u(x)|^p \text{ dans } L^\infty(\Omega),$$

d'où en intégrant sur Ω (qui est borné, donc $1 \in L^1(\Omega)$)

$$\|u_{n'}\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u_{n'}|^p\, dx \to \int_\Omega |u|^p\, dx = \|u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

et la convergence faible plus la convergence des normes implique la convergence forte dans $L^p(\Omega)$ pour $p > 1$ car ces espaces sont uniformément convexes, *cf.* Brezis. On en déduit la convergence forte dans $L^1(\Omega)$ par l'inégalité de Hölder.

Réciproquement, supposons que $u_{n'} \to u$ p.p. Pour tout f continue, on en déduit que $f(u_{n'}) \to f(u)$ p.p., c'est-à-dire

$$f\Big(\int_{\mathbb{R}} y\, d\nu_x(y)\Big) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\nu_x(y).$$

En effet, $f(u_{n'}) \to f(u)$ p.p. et $f(u_{n'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f}$ implique $f(u) = \bar{f}$ p.p., puisqu'en fait la convergence presque partout et la borne dans L^∞ impliquent la convergence forte vers $f(u)$ dans tous les L^p, $p < +\infty$.

Faisons le choix $f(y) = y^2$. Il vient

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} y\, d\nu_x(y)\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2\, d\nu_x(y).$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} y\times 1\,d\nu_x(y)\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} y^2\,d\nu_x(y)\int_{\mathbb{R}} d\nu_x(y) = \int_{\mathbb{R}} y^2\,d\nu_x(y).$$

Nous sommes donc dans un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique que y et 1 sont colinéaires (au sens de $L^2(\mathbb{R}, d\nu_x)$), c'est-à-dire que $y = \lambda$ pour une certaine constante λ, ν_x-presque partout sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $\nu_x(\{y \neq \lambda\}) = \nu_x(\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}) = 0$. Comme ν_x est positive, ceci implique que le support de ν_x est réduit à un point, la valeur λ en question, et comme ν_x est une probabilité, c'est la masse de Dirac δ_λ. Notons que λ dépend de x et en fait que $\lambda = u(x)$ presque partout dans Ω. □

Remarque 16 Par contraposition, si on a affaire à une suite qui converge faible-étoile, mais pas presque partout, alors il existe un ensemble de mesure strictement positive où les mesures de Young ne sont pas des masses de Dirac, et réciproquement. Les mesures de Young fournissent donc une information quantitative sur les oscillations de la suite faiblement convergente. □

On peut obtenir des informations supplémentaires sur la structure des mesures de Young à l'aide de choix particuliers de f. Ainsi, si par exemple il existe un fermé C de $\mathbb{R}$ tel que pour tout n, $u_n(x) \in C$ pour presque tout x, alors le support de la mesure ν_x est inclus dans C pour presque tout x (il suffit de considérer des fonctions f qui s'annulent sur C). On peut également, et c'est ce qui fait une des utilités des mesures de Young dans le cadre des EDP, déduire des restrictions sur la forme de ν_x d'EDP éventuellement satisfaites par u_n (par exemple que ce sont des masses de Dirac). Enfin, il existe des versions L^p, $W^{1,p}$, etc. des mesures de Young, au delà de la version L^∞ simple présentée ici.

3.2 Les opérateurs de superposition dans $H^1(\Omega)$

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, sans propriété spéciale de régularité, sauf mention du contraire. On commence par définir les ensembles de niveau d'une fonction localement intégrable. Dans le cas d'une fonction continue u, l'ensemble de niveau c est simplement défini par $u^{-1}(\{c\})$. La difficulté dans le cas L^1_{loc} est que l'on a affaire non pas à une seule fonction, mais à une classe d'équivalence de fonctions modulo l'égalité presque partout. On ne peut donc pas utiliser une définition utilisant une image réciproque, puisque celle-ci dépend du choix du représentant de la classe u. Il faut procéder de façon détournée.

Définition 6 *Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$. On pose*

$$E_c(u) = \Big\{x \in \Omega; \frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} |u(y) - c|\, dy \to 0 \textit{ quand } \rho \to 0\Big\}. \tag{3.4}$$

L'ensemble $E_c(u)$ étant défini à partir de quantités intégrales, il ne dépend que de la classe d'équivalence de u et non pas de tel ou tel représentant de cette classe. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 19 *Soit u_1 est une fonction mesurable représentant la classe d'équivalence $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors $u_1(x) = c$ presque partout sur $E_c(u)$ et $u_1(x) \neq c$ presque partout sur $\Omega \setminus E_c(u)$.*

Démonstration. D'après le théorème des points de Lebesgue (voir Rudin), il existe un ensemble négligeable $N \subset \Omega$ tel que si $x \notin N$, on a

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} |u_1(y) - c|\, dy \to |u_1(x) - c| \text{ quand } \rho \to 0.$$

On en déduit que si $x \in E_c(u) \setminus N$, on a $|u_1(x) - c| = 0$, alors que si $x \in [\Omega \setminus E_c(u)] \setminus N$, on a $|u_1(x) - c| \neq 0$. □

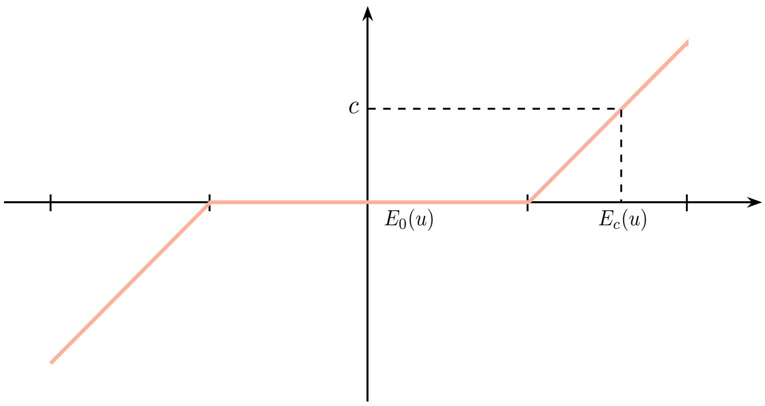
Remarque 17 L'ensemble $E_c(u)$ est donc un ensemble de niveau défini de façon raisonnable pour une fonction localement intégrable. Dans le cas où u est continue, c'est-à-dire quand il existe un représentant continu et que l'on choisit ce dernier, alors on vérifie aisément que $E_c(u) = u^{-1}(\{c\})$. □

Nous allons montrer simultanément deux résultats importants concernant les opérateurs de superposition dans $H^1(\Omega)$. Le premier d'entre eux est une propriété des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème 39 *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ presque partout sur $E_c(u)$.*

Remarque 18 i) Notons d'abord que ce résultat peut sembler contradictoire, puisqu'il a l'air d'impliquer que ∇u est nul presque partout. Naturellement il n'en est rien car même si l'on avait $\Omega = \cup_{c \in \mathbb{R}} E_c(u)$, l'ensemble $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable* et une mesure n'est que dénombrablement additive. La réunion non dénombrable d'ensembles de mesure nulle où ∇u n'est pas nul est bien de mesure strictement positive en général.

De plus, si $\operatorname{mes} E_c(u) = 0$, alors l'énoncé est correct, mais vide. Or il s'agit de la situation générique par rapport à c. Donnons en un exemple : soit $\Omega =]-2,2[$ et $u(x) = x+1$ si $-2 \leq x < -1$, $u(x) = 0$ si $-1 \leq x < 1$ et $u(x) = x-1$ si $1 \leq x \leq 2$ (on choisit évidemment le représentant continu dans ce cas). On vérifie aisément que $u \in H^1(\Omega)$ avec $u'(x) = 1$ si $-2 < x < -1$ et $1 < x < 2$, et $u'(x) = 0$ si $-1 < x < 1$. Donc, si $c \neq 0$, $E_c(u)$ est soit vide, soit réduit à un point, donc de mesure nulle, et $E_0(u) = [-1,1]$, ensemble sur lequel u' est presque partout nul.



Nullité presque partout du gradient sur les ensembles de niveau

ii) Il faut faire attention au fait que même pour une fonction de $H^1(\Omega)$, la définition des ensembles de niveau $E_c(u)$ ne va pas de soi. Ainsi, si en dimension 1, les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont continues, dès que la dimension d'espace est supérieure à 2, il existe des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui ne sont localement bornées nulle part. Dans ce cas, il n'est pas évident de choisir représentant adéquat vis-à-vis des ensembles de niveau. $\square$

Théorème 40 *Soit T une fonction globalement Lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et n'ayant qu'un nombre fini de points de non dérivabilité $c_1, c_2, \dots, c_k$. Si $\operatorname{mes} \Omega = +\infty$, on suppose en outre que $T(0) = 0$. Alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$,*

i) $T(u) \in H^1(\Omega)$,

ii) $\nabla(T(u)) = T'(u)\nabla u$ sur $\Omega \setminus \cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$ et $\nabla(T(u)) = 0$ presque partout sur $\cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$,

Remarque 19 i) Dans la suite, nous écrirons plus rapidement $\nabla(T(u)) = T'(u)\nabla u$ presque partout, avec la convention que là où $T'(u)$ n'est pas défini, c'est-à-dire sur $\cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$, le produit vaut 0 puisque $\nabla u = 0$ presque partout cet ensemble.

ii) Le résultat est inchangé si l'on remplace $H^1(\Omega)$ par $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

iii) Si $\operatorname{mes}\Omega = +\infty$ mais $T(0) \neq 0$, alors $T(u) \notin L^2(\Omega)$, mais on a néanmoins $T(u) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\nabla(T(u)) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

iv) Il n'est pas nécessaire de supposer que T est de classe C^1 par morceaux avec un nombre fini de points de non dérivabilité. Le résultat subsiste encore pour T globalement Lipschitzienne, *i.e.*, $T(u) \in H^1(\Omega)$, ce qui n'est pas très difficile à montrer en procédant par approximations comme dans la démonstration qui suit. Par contre, écrire une formule qui donne le gradient est plus délicat et nous ne le ferons pas ici. Il faut en particulier utiliser le fait que $\nabla u = 0$ presque partout sur l'image réciproque par u de tout ensemble de mesure nulle. □

Nous allons décomposer la démonstration de ces deux théorèmes en une série de lemmes procédant par approximations successives. On commence par traiter le cas où la fonction T est régulière.

Lemme 7 *Soit $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, globalement Lipschitzienne (avec $S(0) = 0$ si $\operatorname{mes}\Omega = +\infty$). Alors si $u \in H^1(\Omega)$, on a $S(u) \in H^1(\Omega)$ et $\nabla(S(u)) = S'(u)\nabla u$.*

Démonstration. Comme S est globalement Lipschitzienne, il existe une constante L telle que $|S(t) - S(s)| \leq L|t - s|$, d'où comme S est de classe C^1

$$\Big|\frac{1}{t-s}\int_s^t S'(u)\,du\Big| \leq L.$$

Faisant tendre s vers t, on en déduit que $|S'(t)| \leq L$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme S' est bornée sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'estimation

$$|S(t)| = \Big|S(0) + \int_0^t S'(u)\,du\Big| \leq |S(0)| + \|S'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|t|.$$

Considérons une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, $S(\phi) \in C^1(\Omega)$ et $\nabla(S(\phi)) = S'(\phi)\nabla\phi$. De plus

$$\int_\Omega |S(\phi)|^2\,dx \leq 2\big(S(0)^2 \operatorname{mes}\Omega + \|S'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\big) < +\infty,$$

d'une part d'après l'estimation que nous venons de noter, et

$$\int_\Omega |\nabla(S(\phi))|^2\,dx \leq \|S'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

d'autre part. Par conséquent, nous avons aussi $S(\phi) \in H^1(\Omega)$.

Soit maintenant $u \in H^1(\Omega)$. Par le théorème de Meyers-Serrin, *cf.* Adams, il existe une suite $\phi_n \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ telle que $\phi_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. En extrayant une sous-suite, nous pouvons aussi bien supposer que $\phi_n \to u$ presque partout dans Ω. Par conséquent, comme S est de classe C^1, $S'(\phi_n) \to S'(u)$ presque partout. De plus, il est clair que $S'(u)\nabla u \in L^2(\Omega)$ et que $S(u) \in L^2(\Omega)$.

Comme la fonction S est globalement Lipschitzienne, nous voyons comme plus haut que $|S(\phi_n(x)) - S(u(x))| \leq \|S'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\phi_n(x) - u(x)|$. Intégrant le carré de cette inégalité sur Ω, il vient,

$$\|S(\phi_n) - S(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|S'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_n - u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

(on pouvait aussi faire appel ici au théorème de Carathéodory).

D'autre part, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|\nabla(S(\phi_n)) - S'(u)\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(S'(\phi_n) - S'(u))\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ + \|S'(\phi_n)(\nabla\phi_n - \nabla u)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour le second terme du membre de droite, nous avons clairement

$$\|S'(\phi_n)(\nabla\phi_n - \nabla u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|S'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla\phi_n - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Pour le premier terme du membre de droite, on note que

$$\begin{cases} (S'(\phi_n) - S'(u))^2|\nabla u|^2 \to 0 \text{ presque partout,} \\ (S'(\phi_n) - S'(u))^2|\nabla u|^2 \leq 4\|S'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega). \end{cases}$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|(S'(\phi_n) - S'(u))\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Reportant cette convergence dans l'inégalité (3.5), nous obtenons que la suite $\nabla(S(\phi_n))$ converge dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ vers $S'(u)\nabla u$.

Comme nous avons déjà établi que $S(\phi_n) \to S(u)$ dans $L^2(\Omega)$, nous en déduisons que la suite $S(\phi_n)$ converge dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, sa limite $S(u)$ appartient à $H^1(\Omega)$ et $\nabla(S(u)) = S'(u)\nabla u$. □

Nous considérons maintenant le cas où T est affine par morceaux avec un point c de non dérivabilité. Soit donc $T \in C^0(\mathbb{R})$ telle que

$$T'(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < c, \\ b & \text{si } t > c. \end{cases}$$

On introduit des fonctions auxiliaires

$$\gamma_-(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \leq c, \\ b & \text{si } t > c, \end{cases} \quad \gamma_+(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < c, \\ b & \text{si } t \geq c. \end{cases}$$

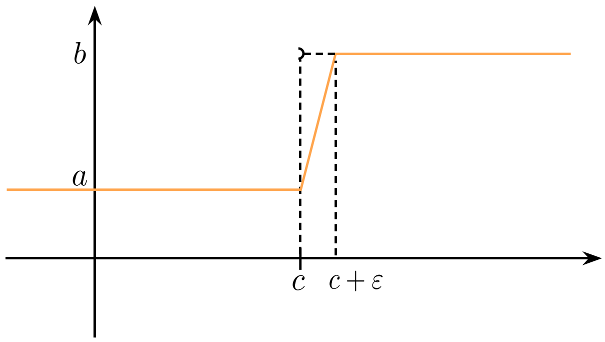
Lemme 8 *On a $T(u) \in H^1(\Omega)$ et $\nabla(T(u)) = \gamma_-(u)\nabla u$ presque partout.*

Remarque 20 Notons que la formule qui donne le gradient de $T(u)$ est définie sans ambiguïté, puisque γ_- est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. □

Démonstration. L'idée est de régulariser T pour se ramener au lemme 7. Pour cela, on pose pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\gamma_-^\varepsilon(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \leq c, \\ a + \frac{b-a}{\varepsilon}(t-c) & \text{si } c \leq t \leq c+\varepsilon, \\ b & \text{si } t \geq c+\varepsilon. \end{cases}$$

La fonction γ_-^ε est continue et $\gamma_-^\varepsilon \to \gamma_-$ simplement quand $\varepsilon \to 0$.



Les fonctions γ_-^ε et γ_-

On pose alors

$$S_-^\varepsilon(t) = \int_0^t \gamma_-^\varepsilon(s)\,ds + T(0).$$

Il est facile de voir que S_-^ε est de classe C^1 et globalement Lipschitzienne, que $S(0) = 0$ si $T(0) = 0$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |S_-^\varepsilon(t) - T(t)| \leq \varepsilon \frac{|b-a|}{2},$$

c'est à dire que S_-^ε tend uniformément vers T quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent,

$$\begin{cases} S_-^\varepsilon(u) \to T(u) \text{ partout et} \\ |S_-^\varepsilon(u)| \leq \max(|a|,|b|)|u| + |T(0)| \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|S_-^\varepsilon(u) - T(u)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

De même,

$$\begin{cases} (\gamma_-^\varepsilon(u) - \gamma_-(u))\nabla u \to 0 \text{ partout et} \\ |(\gamma_-^\varepsilon(u) - \gamma_-(u))\nabla u| \leq 2\max(|a|,|b|)|\nabla u| \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

et le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne encore

$$\|\nabla(S_-^\varepsilon(u)) - \gamma_-(u)\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

ce qui montre le lemme. □

Nous pouvons maintenant établir le théorème 39 ainsi que le point ii) du théorème 40 dans le cas du lemme 8.

Lemme 9 *On a* $\nabla u = 0$ *presque partout sur* $E_c(u)$.

Démonstration. Reprenant la démonstration précédente avec γ_+, nous obtenons de même $\nabla(T(u)) = \gamma_+(u)\nabla u$. Par conséquent,

$$[\gamma_+(u) - \gamma_-(u)]\nabla u = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Comme $\gamma_+(u) = \gamma_-(u) = T'(u)$ presque partout sur $\Omega \setminus E_c(u)$ et $\gamma_+(u) - \gamma_-(u) = b - a$ presque partout sur $E_c(u)$ par la Proposition 19, on obtient le lemme. □

Pour conclure la démonstration du théorème 40, on utilise le lemme suivant.

Lemme 10 *Soit T une fonction globalement Lipschitzienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, de classe* C^1 *par morceaux et n'ayant qu'un nombre fini de points de non dérivabilité* $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$*. Alors, il existe S de classe* C^1 *et des fonctions* T_i *affines par morceaux, de classe* C^1 *sauf en* c_i*, telles que*

$$T = S + \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Démonstration. Soit $\gamma_1 = \lim_{t \to c_1^-} T'(t) - \lim_{t \to c_1^+} T'(t)$ et $T_1(t) = \gamma_1(t - c_1)_+$. Alors $T - T_1$ est de classe C^1 en c_1 et a donc un point de non dérivabilité de moins que T. On réitère la construction en chacun des c_i jusqu'à les avoir tous éliminés, ce qui définit S. □

Fin de la démonstration du théorème 40. — Soit u appartenant à $H^1(\Omega)$. On a donc $T(u) = S(u) + \sum_{i=1}^k T_i(u)$. D'après le lemme 7, $S(u) \in H^1(\Omega)$ et d'après le lemme 8, $T_i(u) \in H^1(\Omega)$ également. Par conséquent, $T(u) \in H^1(\Omega)$. Enfin, les lemmes 7, 8 et 9 montrent que la formule ii) donnant le gradient de $T(u)$ est correcte. □

En ce qui concerne les propriétés de continuité des opérateurs de superposition dans $H^1(\Omega)$, la situation diffère sensiblement du cas $L^2(\Omega)$.

Théorème 41 *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 40, l'application $u \mapsto T(u)$ est*
i) *continue de $H^1(\Omega)$ fort dans $H^1(\Omega)$ fort,*
ii) *séquentiellement continue de $H^1(\Omega)$ faible dans $H^1(\Omega)$ faible.*

Démonstration. i) Soit u_n une suite de $H^1(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $H^1(\Omega)$. Notons tout d'abord que comme T est Lipschitzienne,

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|T'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort (ce qui découle aussi du théorème de Carathéodory).

Pour ce qui concerne les gradients, on commence par extraire une sous-suite arbitraire $u_{n'}$. De cette sous-suite, on extrait une autre sous-suite $u_{n''}$ qui converge presque partout. Soit $\gamma_{-,i}$ la fonction associée comme au Lemme 8 à T_i' du lemme précédent. On pose $\Gamma_- = S' + \sum_{i=1}^k \gamma_{-,i}$, d'où clairement, $\nabla(T(u)) = \Gamma_-(u)\nabla u$, formule qui est définie sans ambiguité, car $\Gamma_-(u)$ l'est aussi. Les produits de la forme $\Gamma_-(u)\nabla v$ sont également bien définis.

On a alors

$$\begin{aligned} \|\nabla(T(u_{n''})) - \nabla(T(u))\|_{L^2(\Omega)} \leq{}& \|\Gamma_-(u_{n''})(\nabla u_{n''} - \nabla u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|(\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\|\Gamma_-(u_{n''})(\nabla u_{n''} - \nabla u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|T'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\nabla u_{n''} - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Pour l'autre terme, on remarque que

$$\|(\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega \setminus \cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)} (\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))^2 |\nabla u|^2 \, dx$$

puisque $\nabla u = 0$ presque partout sur $\cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)$. Comme la fonction Γ_- est continue sur $\mathbb{R} \setminus \cup_{i=1}^k c_i$, on voit donc que

$$\begin{cases} (\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))\nabla u \to 0 \text{ partout sur } \Omega \setminus \cup_{i=1}^k E_{c_i}(u) \text{ et} \\ |(\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))\nabla u| \leq 2\|T'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |\nabla u| \in L^2(\Omega \setminus \cup_{i=1}^k E_{c_i}(u)), \end{cases}$$

et le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|(\Gamma_-(u_{n''}) - \Gamma_-(u))\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n'' \to +\infty.$$

Par conséquent, $T(u_{n''}) \to T(u)$ dans $H^1(\Omega)$ fort. L'unicité de la limite des suites extraites implique alors que c'est la suite entière qui converge.

ii) Soit maintenant u_n une suite de $H^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$. Par le théorème de Rellich, $u_n \to u$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fort (on a besoin du «loc» ici, car on ne fait aucune hypothèse de régularité sur Ω). Donc, comme précédemment, $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fort. Par ailleurs, il découle du théorème 40 que l'on a une estimation de la forme

$$\|T(u_n)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|u_n\|_{H^1(\Omega)} + |T(0)|).$$

Par conséquent, de toute sous-suite $u_{n'}$ on peut extraire une sous-suite $u_{n''}$ telle que $T(u_{n''}) \rightharpoonup v$ dans $H^1(\Omega)$ faible pour un certain v, donc dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fort. Par conséquent, $v = T(u)$ et on conclut encore par unicité de la limite des sous-suites. □

Corollaire 42 *Sous les hypothèses précédentes, si de plus $T(0) = 0$, alors $u \in H^1_0(\Omega)$ entraîne $T(u) \in H^1_0(\Omega)$.*

Démonstration. Si $u \in H^1_0(\Omega)$ alors il existe une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ fort. Comme $T(0) = 0$ et φ_n est à support compact dans Ω, $T(\varphi_n)$ est dans $H^1(\Omega)$ et à support compact. On en déduit immédiatement, par convolution par un noyau régularisant, que $T(\varphi_n) \in H^1_0(\Omega)$, ce qui implique que $T(u) \in H^1_0(\Omega)$, puisque $T(\varphi_n) \to T(u)$ dans $H^1(\Omega)$ et que $H^1_0(\Omega)$ est fermé. □

Ainsi, par exemple, pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ et $k \geq 0$, $(u-k)_+ \in H^1_0(\Omega)$.

Nous terminons cette section par l'étude de quelques opérateurs de superposition particuliers. Mentionnons tout d'abord quelques relations simples mais fort utiles concernant les parties positives et négatives. En premier lieu, si $u \in L^2(\Omega)$, on a

$$u = u_+ - u_-,\ |u| = u_+ + u_-,\ u_+ = \mathbf{1}_{u>0}u = \mathbf{1}_{u\geq 0}u,\ u_- = -\mathbf{1}_{u<0}u = -\mathbf{1}_{u\leq 0}u,$$

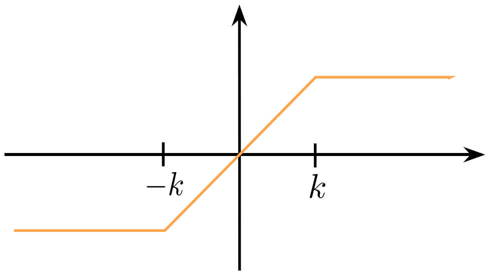
où $\mathbf{1}_{u>0}$ est une notation rapide pour désigner la fonction caractéristique de l'ensemble des x tels que $u(x) > 0$, et ainsi de suite. Si $u \in H^1(\Omega)$, on a en outre

$$\nabla u = \nabla u_+ - \nabla u_-,\ \nabla|u| = \nabla u_+ + \nabla u_-,\ \nabla u_+ = \mathbf{1}_{u>0}\nabla u = \mathbf{1}_{u\geq 0}\nabla u,$$

et l'analogue pour u_-. Notons enfin que $|\nabla u_+|.|\nabla u_-| = 0$ presque partout.

Un autre opérateur également fort utile est la *troncature à hauteur k*. Elle est définie pour $k > 0$ par la formule suivante :

$$T_k(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq k, \\ k\frac{t}{|t|} & \text{si } |t| > k. \end{cases}$$



La troncature à hauteur k

La troncature à hauteur est une approximation de l'identité dans divers espaces.

Théorème 43 *Si $u \in L^2(\Omega)$, alors $T_k(u) \to u$ dans $L^2(\Omega)$ fort quand $k \to +\infty$. Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $T_k(u) \to u$ dans $H^1(\Omega)$ fort.*

Démonstration. Commençons par le cas L^2. Nous avons

$$\begin{aligned} \|u - T_k(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_{\{u<-k\}} |u+k|^2\,dx + \int_{\{u>k\}} |u-k|^2\,dx \\ &\le \int_{\{u<-k\}} |u|^2\,dx + \int_{\{u>k\}} |u|^2\,dx \\ &= \int_\Omega |u|^2 \mathbf{1}_{|u|>k}\,dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $k \to +\infty$ car mes$\{x \in \Omega; |u(x)| > k\} \to 0$. Pour ce qui concerne les gradients, si u est dans $H^1(\Omega)$, on a de façon similaire

$$\|\nabla u - \nabla(T_k(u))\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (T_k'(u) - 1)^2 |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathbf{1}_{|u|>k}\,dx \longrightarrow 0,$$

quand $k \to +\infty$. □

Remarque 21 i) Dans tous les cas, $T_k(u) \in L^\infty(\Omega)$ et $\|T_k(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \le k$.

ii) Le résultat subsiste dans $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. En fait, si $u \in L^\infty(\Omega)$, $T_k(u) = u$ dès que $k \ge \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$!

iii) Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ puisque $T_k(0) = 0$. □

Concluons cette étude générale par quelques remarques.

Remarque 22 1) Les opérateurs de Nemytsky n'opèrent pas en général sur les espaces de Sobolev d'ordre supérieur à 1. Ainsi, par exemple, si $u \in H^2(\Omega)$, on n'a pas nécessairement $u_+ \in H^2(\Omega)$. Il est immédiat de le vérifier en dimension 1, puisqu'alors $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar\Omega)$. Toutefois, le problème n'est pas seulement lié à un défaut de régularité de la fonction T. Ainsi, même si T est C^∞ et $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on n'a pas $T(u) \in H^2(\Omega)$. En effet, dans ce cas, $\partial_i(T(u)) =$

$T'(u)\partial_i u$ et $\partial_{ij}(T(u)) = T''(u)\partial_i u \partial_j u + T'(u)\partial_{ij} u$. Le second terme est bien dans $L^2(\Omega)$, par contre pour le premier terme, en général $\partial_i u \partial_j u \notin L^2(\Omega)$ (sauf si $N \leq 4$ par les injections de Sobolev). Mentionnons le résultat le plus général dans cette direction, voir Meyer pour une démonstration faisant appel à des techniques de décomposition dyadique, si T est C^∞, alors pour s réel, si $u \in W^{s,p}(\Omega)$ on a $T(u) \in W^{s,p}(\Omega)$ dès que $s - N/p > 0$.

2) Le cas vectoriel est comparable au cas scalaire. Si $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est globalement Lipschitzienne, alors pour tout $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $T(u) \in H^1(\Omega)$. Par contre, la formule qui donne le gradient de la fonction composée n'est plus valable telle quelle, car $DT(u)\nabla u$ n'a pas de sens en général. Par exemple, pour $m = 2$, considérons $T(u_1,u_2) = \max(u_1,u_2)$. Si $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ est de la forme $u = (v,v)$ avec $v \in H^1(\Omega)$, alors $DT(u)$ n'est défini nulle part sur Ω alors que ∇u n'est pas nul presque partout sur Ω et l'on est bien en peine de définir raisonnablement un produit de la forme $DT(u)\nabla u$ dans ce cas. Il existe des formules plus compliquées pour décrire ce gradient. $\square$

3.3 Opérateurs de superposition et trace au bord

Comme les traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ sont des fonctions de $L^2(\partial\Omega)$, on peut également leur appliquer des opérateurs de superposition. Une question naturelle est de savoir si ces opérateurs commutent avec la trace.

Théorème 44 *Soit Ω un ouvert Lipschitzien et T comme au théorème 40. Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma_0(T(u)) = T(\gamma_0(u))$.*

Démonstration. Notons d'abord que si $u \in H^1(\Omega)$, alors $T(u) \in H^1(\Omega)$ et donc $\gamma_0(T(u))$ a bien un sens. Soit une suite $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ fort. Par définition de la trace, $u_{n|\partial\Omega} = \gamma_0(u_n) \to \gamma_0(u)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ fort. Comme les opérateurs de superposition sont continus sur $L^2(\partial\Omega)$ fort (même démonstration que le théorème de Carathéodory), on en déduit que

$$T(\gamma_0(u_n)) \longrightarrow T(\gamma_0(u)) \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega) \text{ fort.}$$

D'un autre côté, comme les opérateurs de superposition sont continus sur $H^1(\Omega)$ fort, nous avons aussi $T(u_n) \to T(u)$ dans $H^1(\Omega)$ fort. La continuité de l'application trace implique donc que

$$\gamma_0(T(u_n)) \longrightarrow \gamma_0(T(u)) \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega) \text{ fort.}$$

Nous ne pouvons pas conclure directement, car $T(u_n)$ n'est pas a priori C^1 sur $\bar{\Omega}$. Néanmoins, $T(u_n) \in C^0(\bar{\Omega})$. Or pour toute fonction $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, on a aussi $\gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega}$. En effet, on peut construire une suite v_n de fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ par prolongement de v à un ouvert contenant $\bar{\Omega}$, puis convolution par une suite régularisante, laquelle converge vers v à la fois dans $H^1(\Omega)$ et dans $C^0(\bar{\Omega})$, à cause des propriétés standard de la convolution par des noyaux régularisants. Pour cette suite, $\gamma_0(v_n) \to \gamma_0(v)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et $v_{n|\partial\Omega} \to v_{|\partial\Omega}$ dans $C^0(\partial\Omega)$. Appliquant cette remarque à $T(u_n)$, nous en déduisons que $\gamma_0(T(u_n)) = T(u_n)_{|\partial\Omega} = T(\gamma_0(u_n))$, d'où le théorème. $\square$

Remarque 23 Un cas particulier intéressant est le fait que $\gamma_0(u_+) = (\gamma_0(u))_+$. De même, on retrouve que si $k \geq 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $(u-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$. En effet, dans ce cas $\gamma_0((u-k)_+) = (\gamma_0(u-k))_+ = (-k)_+ = 0$. $\square$

Exercices du chapitre 2

1. Soit la suite u_n de la Proposition 17. Montrer que la mesure de Young associée à la suite $v_n = u_n + \sin x$ est $\nu_x = \theta\delta_{a+\sin x} + (1-\theta)\delta_{b+\sin x}$.

2. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Montrer que la suite $u_n(x) = u(nx)$ tend vers la moyenne de u, $\frac{1}{T}\int_0^T u(x)\,dx$, dans $L^\infty(\mathbb{R})$ faible-étoile. Supposant de plus u de classe C^1 et croissante sur $[0,T[$, en déduire que la mesure de Young associée à la suite u_n est

$$\nu_x = \frac{1}{T}\mathbf{1}_{[u(0),u(1)^-]}\frac{dy}{u'(u^{-1}(y))}.$$

3. Montrer que $\sin x \sin nx \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ et que $\sin^2 x \sin^2 nx \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}\sin^2 x$. En déduire que la mesure de Young associée dépend de x.

4. Soit T une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du théorème 34 de Carathéodory. Le but de l'exercice est de montrer que l'opérateur de superposition N associé est différentiable au sens de Fréchet de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ en $u = 0$ si et seulement si la fonction T est affine.

4 i. Soit $s \in \mathbb{R}^*$ fixé. Montrer que la suite

$$u_n^s(x) = \begin{cases} s & \text{pour } x \in B(0,1/n), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est telle que $\|u_n^s\|_{L^2(\Omega)} = C_N n^{-N/2}|s|$ où C_N est une constante que ne dépend que de la dimension N et en déduire qu'elle tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

4 ii. On suppose N différentiable en 0 et on note $DN(0)$ sa différentielle de Fréchet. On rappelle que ceci signifie que $DN(0)$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ telle que l'on a

$$N(u) = N(0) + DN(0)u + \|u\|_{L^2(\Omega)}\varepsilon(u),$$

où $\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quand $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Montrer que T est dérivable en 0 et que si $A \subset \Omega$, alors

$$DN(0)\mathbf{1}_A = T'(0)\mathbf{1}_A.$$

4 iii. Utilisant le point 4 i, en déduire que $T(s) - T(0) - sT'(0) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que l'opérateur de superposition $u \mapsto u^2$ est différentiable — et même de classe C^∞ — de $L^2(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. Comment pouvez-vous généraliser ce résultat et comment le comparez-vous à celui de l'exercice 4 ?