



Notes de cours
M2 — Équations aux dérivées partielles
elliptiques

Hervé Le Dret

9 octobre 2006

Table des matières

1	Rappels en tous genres	7
1.1	Les théorèmes de convergence de Lebesgue	7
1.2	La convolution	9
1.3	Les distributions	12
1.4	Les espaces de Sobolev	14
1.5	Dualité et convergences faibles	18
1.6	Formulations variationnelles et leur interprétation	20
1.7	Appendice : topologies de \mathcal{D} et \mathcal{D}'	23
2	Théorèmes de point fixe et applications	33
2.1	Les théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder	33
2.2	Résolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe	46
3	Les opérateurs de superposition	53
3.1	Les opérateurs de superposition dans $L^p(\Omega)$	53
3.2	Les opérateurs de superposition dans $H^1(\Omega)$	60
3.3	Opérateurs de superposition et trace au bord	69
4	La méthode de Galerkin	73
4.1	Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin	73
4.2	La méthode de Galerkin pour la mécanique des fluides	76
5	Principe du maximum, régularité elliptique et applications	89
5.1	Le principe du maximum fort	89
5.2	Le principe du maximum faible	96
5.3	Résultats de régularité elliptique	98
5.4	Méthode des sur- et sous-solutions	104
6	Calcul des variations et problèmes quasi-linéaires	111
6.1	Rappels d'analyse fonctionnelle et convexe abstraites	111

6.2	Application aux problèmes aux limites quasi-linéaires scalaires	115
6.3	Calcul des variations dans le cas vectoriel	119
7	Calcul des variations et points critiques	143
7.1	Pourquoi rechercher des points critiques ?	143
7.2	La condition de Palais-Smale et le lemme d'Ekeland	145
7.3	Le lemme de déformation, le principe du min-max et le théorème du col	154
8	Opérateurs monotones et inéquations variationnelles	167
8.1	Opérateurs monotones, définitions et premières propriétés	167
8.2	Exemples d'opérateurs monotones	169
8.3	Inéquations variationnelles	170
8.4	Exemples d'inéquations variationnelles	175
8.5	Opérateurs pseudo-monotones	177
8.6	Exemples, les opérateurs de Leray-Lions	180

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe et applications

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle *point fixe* de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$. De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être (re)formulés sous forme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application. Nous en verrons des exemples plus loin.

On rappelle d'abord le théorème de point fixe de Picard pour une contraction stricte, un résultat élémentaire mais peu utilisé pour les applications que l'on a en vue :

Théorème 19 *Soit (E, d) un espace métrique complet, $T : E \rightarrow E$ une contraction stricte, i.e., telle qu'il existe une constante $k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in E, \quad d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$. De plus, pour tout $z \in E$, la suite des itérés $T^m(z)$ converge vers x_0 quand $m \rightarrow +\infty$.

Ce théorème, ou des variantes de ce théorème, est néanmoins utile dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'évolution, contexte qui ne nous concerne pas ici.

2.1 Les théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder

Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie. Soit $\bar{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de \mathbb{R}^m muni de la

norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial \bar{B}^m$ la sphère qui en est la frontière. Le théorème de Brouwer affirme que :

Théorème 20 *Toute application continue de \bar{B}^m dans \bar{B}^m admet au moins un point fixe.*

Notons une amusante illustration « physique » (avec des réserves) du théorème de Brouwer. Si l'on prend un disque de papier posé sur une table, qu'on le froisse sans le déchirer et qu'on le repose sur la table de façon à ce qu'il ne dépasse pas de sa position initiale, alors au moins un point du papier froissé se retrouve exactement à la verticale de sa position de départ.

Le théorème de Brouwer est un résultat non trivial, sauf dans le cas $m = 1$ où il se montre très simplement par un argument de connexité. Il en existe plusieurs démonstrations dans le cas général, faisant toutes appel à des notions plus ou moins élémentaires. Nous allons en donner une preuve aussi élémentaire que possible (notion subjective, malgré tout, ce qui est élémentaire pour l'un ne l'est pas forcément pour l'autre).

Commençons par le théorème de non-rétraction de la boule sur la sphère — une rétraction d'un espace topologique sur un sous-ensemble de cet espace est une application continue de cet espace à valeurs dans le sous-ensemble et égale à l'identité sur le sous-ensemble — dans le cas d'une application de classe C^1 . On verra un peu plus loin qu'il est équivalent au théorème de Brouwer.

Théorème 21 *Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^m \rightarrow S^{m-1}$ de classe C^1 telle que l'on ait $f|_{S^{m-1}} = Id$.*

Démonstration. Soit f une rétraction de \bar{B}^m sur S^{m-1} de classe C^1 . Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $f_t(x) = (1-t)x + tf(x)$. Comme la boule est convexe, f_t envoie \bar{B}^m dans \bar{B}^m . De plus, comme f est une rétraction, la restriction de f_t à S^{m-1} est l'identité.

Soit $c = \max_{\bar{B}^m} \|\nabla f\|$ (∇f désigne la matrice $m \times m$ des dérivées partielles de f et l'on en prend la norme matricielle subordonnée associée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^m). Par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in \bar{B}^m$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Comme

$$\|f_t(x) - f_t(y)\| \geq (1-t)\|x - y\| - t\|f(x) - f(y)\| \geq ((1-t) - ct)\|x - y\|,$$

on en déduit que f_t est injective dès que $0 \leq t < 1/(1+c)$. Comme f_t est l'identité sur S^{m-1} , il s'ensuit que $f_t(B^m) \subset B^m$ (on note B^m la boule ouverte) pour ces valeurs de t .

On remarque également que pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, on a

$$\nabla f_t = (1-t)I + t\nabla f = (1-t)\left(I + \frac{t}{1-t}\nabla f\right),$$

avec

$$\frac{t}{1-t}\|\nabla f\| \leq \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour ces valeurs de t , ∇f_t est partout inversible. Par le théorème d'inversion locale, on en déduit que f_t est un C^1 -difféomorphisme local sur B^m . En particulier, l'image de B^m par f_t est un ouvert.

On va montrer que f_t est aussi surjective. Pour cela, il suffit de voir que $f_t(B^m) = B^m$, puisque $f_t(S^{m-1}) = S^{m-1}$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $f_t(B^m) \neq B^m$. Comme on a vu que $f_t(B^m) \subset B^m$, il existe donc $y \in B^m \setminus f_t(B^m)$. Choisissons un point $y_0 \in f_t(B^m)$ et posons

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+; y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin f_t(B^m)\}.$$

Comme $f_t(B^m)$ est un ouvert, on a $\lambda_0 > 0$. On a aussi $\lambda_0 \leq 1$ par le choix de y . La suite $y_{\lambda_0-1/n}$ est donc dans $f_t(B^m)$ pour n assez grand, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_n \in B^m$ telle que $f_t(x_n) = y_{\lambda_0-1/n} \rightarrow y_{\lambda_0}$. Comme la suite x_n appartient au compact \bar{B}^m , on peut supposer qu'elle converge vers un certain $x_0 \in \bar{B}^m$. Naturellement, par continuité de f_t , il vient $f_t(x_0) = y_{\lambda_0}$, donc $x_0 \notin S^{m-1}$ puisque dans le cas contraire, on aurait $y_{\lambda_0} = x_0 \in S^{m-1}$, et le segment $\{y_\lambda, \lambda \in [0, 1]\}$, est inclus dans B^m par convexité. On a donc $x_0 \in B^m$, et f_t est par conséquent un difféomorphisme local au voisinage de x_0 , ce qui implique que l'image de f_t est un voisinage de y_{λ_0} . Par conséquent, il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $y_\lambda \in f_t(B^m)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1[$. Ceci contredit la définition de λ_0 comme borne inférieure.

Jusqu'ici, on a démontré que pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, f_t est un C^1 -difféomorphisme de B^m sur B^m . Posons, pour $t \in [0, 1]$,

$$V(t) = \int_{B^m} \det \nabla f_t(x) dx.$$

Il est clair que pour t au voisinage de 0, $\det \nabla f_t > 0$. Par conséquent, c'est le jacobien de f_t et par la formule de changement de variable dans une intégrale, on a

$$V(t) = \int_{B^m} dx = \text{volume } B^m.$$

En particulier cette valeur ne dépend pas de t au voisinage de 0. Or, il est clair d'après la forme de ∇f_t que V_t est un polynôme de degré inférieur ou égal à m en la variable t . C'est donc un polynôme constant, d'où $V(1) = V(0) = \text{volume } B^m$. Comme $f_1 = f$ et que f est une rétraction, on a $\det \nabla f = 0$, sinon l'image de f ne serait pas d'intérieur vide par le théorème d'inversion locale. On en déduit que $V(1) = 0$, contradiction. \square

Venons-en à la démonstration du théorème de Brouwer, le théorème 20.

Démonstration du théorème de Brouwer. Soit g une application continue de \bar{B}^m dans \bar{B}^m et supposons qu'elle n'admette pas de point fixe. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \bar{B}^m$, $\|x - g(x)\| \geq \alpha$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une application polynomiale $h: \bar{B}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que l'on ait $\max_{\bar{B}^m} \|g(x) - h(x)\| \leq \alpha/2$. Écrivant

$$\|x - h(x)\| = \|x - g(x) + g(x) - h(x)\| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2},$$

on voit que h n'a pas de point fixe non plus. Bien sûr, h n'est pas à valeurs dans \bar{B}^m , mais $(1 + \frac{\alpha}{2})^{-1}h$ l'est. On a donc remplacé g continue sans point fixe par une application C^1 (en fait C^∞) sans point fixe. À partir de maintenant, on suppose sans perte de généralité g de classe C^1 .

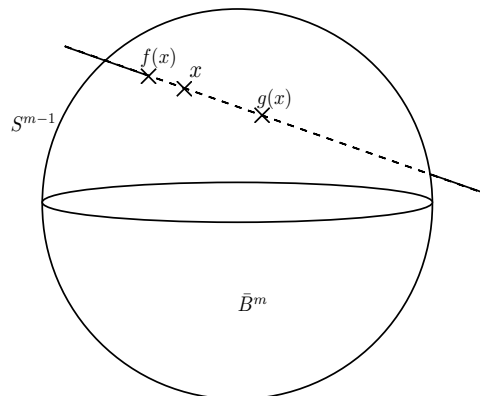
L'application $x \mapsto \|x - g(x)\|^{-1}$ est donc de classe C^1 comme composée d'applications de classe C^1 et il en est de même de $x \mapsto u(x) = \|x - g(x)\|^{-1}(x - g(x))$, qui est de surcroît à valeurs dans la sphère unité S^{m-1} . On considère la droite qui passe par x et est dirigée par $u(x)$. Cette droite coupe la sphère S^{m-1} en deux points. On appelle $f(x)$ le point d'intersection situé du côté de x sur cette droite.

Il est clair par construction que f est à valeurs dans S^{m-1} et que si $x \in S^{m-1}$, alors $f(x) = x$. Vérifions que f est de classe C^1 . Par définition de f , il existe un nombre réel $t(x)$ tel que $f(x) = x + t(x)u(x)$. Ce nombre s'obtient en résolvant l'équation du second degré qui exprime que $\|f(x)\|^2 = 1$ et en en prenant la racine positive. On trouve par un calcul élémentaire :

$$t(x) = -x \cdot u(x) + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x \cdot u(x))^2}.$$

Remarquons que le nombre situé sous la racine carrée est toujours strictement positif. On en déduit que t est de classe C^1 , ainsi que f , laquelle est donc une rétraction de \bar{B}^m sur son bord de classe C^1 , ce qui est impossible. \square

Voici la construction géométrique :



Construction d'une rétraction à partir d'une application sans point fixe

Remarque 3 Il est amusant de constater que cette démonstration du théorème de Brouwer repose, entre autres, sur le théorème d'inversion locale, qui est lui-même une conséquence du théorème de point fixe de Picard. Remarquons également que la formule de changement de variable dans une intégrale, autre ingrédient crucial de cette démonstration, n'est pas tout à fait un résultat élémentaire. \square

Grâce au théorème de Brouwer, nous pouvons maintenant généraliser le théorème de non rétraction de la boule sous une forme topologiquement plus satisfaisante.

Théorème 22 *Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^m \rightarrow S^{m-1}$ continue telle que l'on ait $f|_{S^{m-1}} = Id$.*

Démonstration. Soit f une telle rétraction. On pose $g(x) = -f(x)$. Alors $g \in C^0(\bar{B}^m; \bar{B}^m)$ admet un point fixe x_0 , lequel satisfait donc $x_0 = -f(x_0)$. Comme f est à valeurs dans la sphère unité, $x_0 \in S^{m-1}$. Comme f est une rétraction, on en déduit que $f(x_0) = x_0$, et donc que $x_0 = 0$, ce qui contredit $\|x_0\| = 1$. \square

Finalement, théorème de non rétraction continue de la boule et théorème de Brouwer sont deux résultats équivalents.

La boule unité fermée de \mathbb{R}^m n'est pas le seul ensemble à posséder la propriété de point fixe. On déduit facilement du théorème de Brouwer la propriété suivante.

Théorème 23 *Soit K un compact homéomorphe à la boule unité fermée de \mathbb{R}^m . Toute application continue de K dans K admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit g une application continue de K dans K et soit h un homéomorphisme qui envoie K sur la boule unité fermée. L'application $h \circ g \circ h^{-1}$ est continue de \bar{B}^m dans \bar{B}^m . Elle admet donc un point fixe $y = h \circ g \circ h^{-1}(y) \in \bar{B}^m$. Par conséquent, $h^{-1}(y) \in K$ est point fixe de g . \square

Donnons une conséquence utile de ce résultat.

Théorème 24 *Soit C un convexe compact non vide de \mathbb{R}^m . Toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

Démonstration. On va montrer que tout convexe compact non vide de \mathbb{R}^m est homéomorphe à la boule unité fermée d'un espace \mathbb{R}^n avec $n \leq m$ auquel cas le théorème précédent s'applique, ou bien se réduit à un point, auquel cas il n'y a qu'une seule application de C dans C , qui a trivialement un point fixe.

Soit C un tel convexe. Supposons d'abord que $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Par translation (un homéomorphisme !), on peut toujours supposer que $0 \in \overset{\circ}{C}$ et il existe donc une boule $B(0, r)$ incluse dans C . On introduit la jauge du convexe C . C'est la fonction

$$j(x) = \inf\{t > 0; x/t \in C\}.$$

D'après ce qui précède, on a facilement $j(x) \leq \|x\|/r$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. De même, comme C est compact, il existe une boule $B(0, R)$ qui contient C et l'on en déduit que $\|x\|/R \leq j(x)$. Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

- i) si $x \in C$ alors $j(x) \leq 1$,
- ii) $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$,
- iii) $j(x+y) \leq j(x) + j(y)$. Cette dernière propriété utilise la convexité de C .

En effet, soient $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ tels que x/t_1 et y/t_2 appartiennent à C . On en déduit que

$$\frac{x+y}{t_1+t_2} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)\frac{x}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1+t_2}\right)\frac{y}{t_2} \in C$$

d'où $j(x+y) \leq t_1 + t_2$ et iii) par passage aux bornes inférieures dans le membre de droite.

Remarquons que réciproquement, si $j(x) \leq 1$, alors $x \in C$. En effet, il existe alors une suite $t_n \rightarrow j(x)$ et $y_n \in C$ tels que $x = t_n y_n + (1-t_n)0$. S'il existe un indice n_0 tel que $t_n \leq 1$, alors x est combinaison convexe d'éléments de C , donc appartient à C . Si $t_n > 1$ pour tout n , alors $t_n \rightarrow j(x) = 1$ et $y_n \rightarrow x$. Comme C est fermé, il vient $x \in C$.

On déduit de la sous-additivité de j qu'elle est continue de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R} . En effet, il vient pour tous $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$-j(-y) \leq j(x+y) - j(x) \leq j(y)$$

avec $\max(|j(-y)|, |j(y)|) \leq \|y\|/r$. Définissons alors deux fonctions g et h de \mathbb{R}^m dans lui-même par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{j(x)}{\|x\|}x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad h(y) = \begin{cases} \frac{\|y\|}{j(y)}y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que g et h sont réciproques l'une de l'autre. De plus, elles sont continues en dehors de 0 d'après la continuité de j . Comme $\|g(x)\| \leq j(x) \leq \|x\|/r$, g est continue en 0 et comme $\|h(y)\| \leq \|y\|^2/j(y) \leq R\|y\|$, il en va de même pour h . Donc g et h sont des homéomorphismes de \mathbb{R}^m .

Pour conclure, il suffit de voir que $g(C) = \bar{B}^m$. Or, si $x \in C$, alors $j(x) \leq 1$, donc $\|g(x)\| \leq 1$, c'est à dire $g(C) \subset \bar{B}^m$.

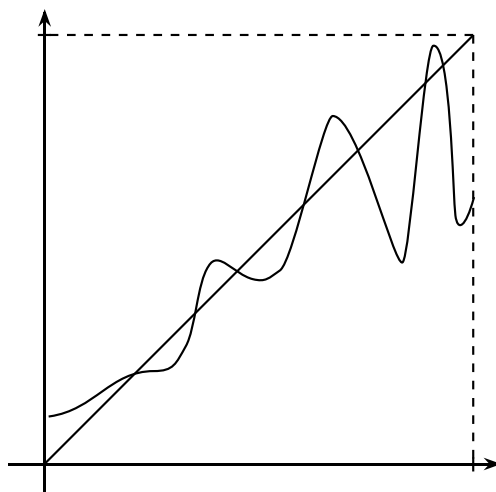
Soit donc $y \in \bar{B}^m$. On a $j(h(y)) = \frac{\|y\|}{j(y)}j(y) \leq 1$, donc $h(y) \in C$, c'est à dire $h(\bar{B}^m) \subset C$, d'où en composant par g , $\bar{B}^m \subset g(C)$. Ceci termine l'étude du cas où $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$.

Supposons maintenant que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$. On procède par récurrence descendante sur la dimension de l'espace. Si C contient une famille libre de m vecteurs, alors il contient le simplexe engendré par ces vecteurs et le vecteur nul, qui est d'intérieur

non vide. Donc, $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ implique que C est contenu dans un hyperplan de \mathbb{R}^m , soit un espace de dimension $m - 1$. On a alors l'alternative suivante : soit l'intérieur de C comme sous-ensemble de cet hyperplan est non vide, auquel cas on applique l'étape précédente, soit cet intérieur est vide et on recommence. Au bout d'au plus $m - 1$ étapes, on a ainsi établi que C est homéomorphe à une boule de dimension inférieure à m ou bien que C est inclus dans une droite et d'intérieur vide dans cette droite. Dans ce cas, C est réduit à un point. \square

Remarque 4 i) En général, il n'y a pas unicité du point fixe.

ii) Il existe des ensembles compacts qui ne possèdent pas la propriété de point fixe. Par exemple, le théorème de Brouwer est visiblement faux dans une couronne circulaire, bien qu'il n'existe pas de rétraction de la couronne circulaire sur son bord. En fait, plus généralement, si X est une variété compacte à bord, alors il n'existe aucune rétraction continue de X sur ∂X . \square



Non unicité du point fixe de Brouwer

Voici un résultat qui est également équivalent au théorème de Brouwer et à celui de non rétraction de la boule unité.

Théorème 25 Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) et soit $P : E \rightarrow E$ une application continue telle qu'il existe $\rho > 0$ pour lequel tout point x sur la sphère de rayon ρ satisfait $P(x) \cdot x \geq 0$. Il existe alors un point x_0 , $\|x_0\| \leq \rho$, tel que $P(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que P ne s'annule pas sur la boule fermée $\bar{B}(0, \rho)$, en d'autres termes que pour tout $\|x\| \leq \rho$, $\|P(x)\| > 0$. Par conséquent, la fonction $g : \bar{B}(0, \rho) \rightarrow \partial\bar{B}(0, \rho)$ définie par

$$g(x) = -\frac{\rho}{\|P(x)\|}P(x)$$

est continue. Par le théorème de Brouwer, cette application admet un point fixe x^* , qui est donc tel que

$$g(x^*) = x^* = -\frac{\rho}{\|P(x^*)\|}P(x^*).$$

On en déduit d'une part que $\|x^*\| = \rho$ et d'autre part que $\rho^2 = \|x^*\|^2 = g(x^*) \cdot x^* = -\frac{\rho}{\|P(x^*)\|}P(x^*) \cdot x^* \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\rho > 0$. \square

Remarque 5 i) L'hypothèse s'interprète géométriquement sans utiliser la structure euclidienne comme le fait que la fonction g « pointe » vers l'extérieur sur le bord du convexe $\bar{B}(0, \rho)$. Changeant g en $-g$, on peut aussi bien supposer qu'elle pointe vers l'intérieur.

ii) Le théorème 25 implique le théorème de non-rétraction de la boule unité, car on peut l'appliquer à une rétraction, laquelle doit donc s'annuler en un point de la boule. Il est donc bien équivalent au théorème de Brouwer. \square

Les résultats précédents utilisent de façon cruciale la dimension finie, par exemple par l'intermédiaire de la formule de changement de variable dans les intégrales ou la compacité de la boule fermée. En dimension infinie, le théorème de Brouwer n'est plus vrai. En voici un exemple. On considère l'espace des suites de carré sommable $l^2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$. Muni de la norme $\|x\|_{l^2} = (\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$, c'est un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit \bar{B} sa boule unité fermée et S sa sphère unité. Alors l'application

$$T : \bar{B} \rightarrow \bar{B}, T(x) = (\sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

est continue mais n'a pas de point fixe. En effet, T est à valeurs dans la sphère unité, donc un éventuel point fixe devrait satisfaire à la fois $\|x\|_{l^2} = 1$ et $x_0 = 0$ et $x_{i+1} = x_i$ pour tout $i \geq 0$, soit $x = 0$.

De même, l'application $R : \bar{B} \rightarrow S$ obtenue par la même construction qu'en dimension finie, *i.e.*,

$$\begin{cases} R(x)_0 = x_0 + \frac{1 - \|x\|_{l^2}^2}{\|x - T(x)\|_{l^2}^2} (x_0 - \sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2}), \\ R(x)_i = x_i + \frac{1 - \|x\|_{l^2}^2}{\|x - T(x)\|_{l^2}^2} (x_i - x_{i-1}), i \geq 1, \end{cases}$$

est une rétraction de \bar{B} sur son bord.

Le problème vient en fait d'un manque de compacité, les espaces de dimension infinie n'étant pas localement compacts. Nous avons besoin d'une propriété d'approximation des compacts d'un espace vectoriel normé par des ensembles de dimension finie qui va nous permettre de nous ramener à ce dernier cas.

Lemme 4 *Soit E un espace vectoriel normé et soit K un compact de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie et une application g_ε continue de K dans F_ε tels que pour tout $x \in K$, $\|x - g_\varepsilon(x)\|_E < \varepsilon$. De plus, $g_\varepsilon(K) \subset \text{conv } K$.*

Note : $\text{conv } K$ dénote l'enveloppe convexe de K . Le lemme exprime que tout compact K peut être approché arbitrairement près par un sous-ensemble de E de dimension finie.

Démonstration. Comme K est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points x_i , $i = 1, \dots, p$, de K , tel que K soit recouvert par les boules ouvertes de centre x_i et de rayon ε , i.e., $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$. Pour chaque indice i , on définit une fonction positive sur E par

$$\delta_i(x) = (\varepsilon - \|x - x_i\|_E)_+.$$

Il est clair que $\delta_i \in C^0(E; \mathbb{R}_+)$ comme composée d'applications continues et qu'elle est strictement positive dans la boule ouverte $B(x_i, \varepsilon)$. De plus,

$$\forall x \in K, \quad \sum_{i=1}^p \delta_i(x) > 0.$$

En effet, quel que soit x dans K , il existe un indice j tel que $x \in B(x_j, \varepsilon)$ par la propriété de recouvrement. Pour ce j , nous avons donc $\delta_j(x) > 0$ et par conséquent, $\sum_{i=1}^p \delta_i(x) \geq \delta_j(x) > 0$ (en fait cette somme est même minorée inférieurement par un $\delta > 0$). Définissons alors

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)}.$$

D'après ce qui précède, $g_\varepsilon \in C^0(K; F_\varepsilon)$, où F_ε est le sous-espace vectoriel de E engendré par les points x_i , ce qui implique que $\dim F_\varepsilon \leq p$. De plus, il est clair par construction que $g_\varepsilon(K) \subset \text{conv } K$.

Vérifions la propriété d'approximation. Pour tout x dans K et pour tout i , nous pouvons écrire $x_i = x + h_i$, où h_i est tel que $\|h_i\|_E < \varepsilon$ si et seulement si $\delta_i(x) > 0$. On a donc

$$g_\varepsilon(x) = x + \frac{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)h_i}{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)},$$

et

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^p \delta_i(x) h_i}{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)} \right\|_E \leq \frac{\sum_{i=1}^p \delta_i(x) \|h_i\|_E}{\sum_{i=1}^p \delta_i(x)} < \varepsilon$$

puisque, dans la somme du numérateur du deuxième membre de l'inégalité, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $\|h_i\|_E < \varepsilon$. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 26 *Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe compact de E et T une application continue de C dans C . Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. D'après le lemme 4, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un sous-espace de dimension finie F_n et une application g_n continue de C dans F_n tels que

$$\forall x \in C, \quad \|x - g_n(x)\|_E < \frac{1}{n} \text{ et } g_n(C) \subset \text{conv} C = C.$$

Si A est un sous-ensemble de E , on note $\text{conv} A$ l'enveloppe convexe de A , c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A , ou encore le plus petit convexe qui contient A , et $\overline{\text{conv}} A$ l'enveloppe convexe fermée de A , c'est-à-dire l'adhérence de l'enveloppe convexe de A . Posons $K_n = \overline{\text{conv}} g_n(C)$. C 'est un convexe de F_n , compact comme sous-ensemble fermé du compact C . On considère l'application $T_n: K_n \rightarrow K_n$ définie par $T_n(x) = g_n(T(x))$. Cette application est continue comme composée d'applications continues, donc, par le théorème 24, elle admet un point fixe $x_n \in K_n \subset C$. Comme C est un compact métrique, on peut extraire de la suite x_n une sous-suite $x_{n'}$ qui converge vers un certain $x \in C$.

L'application T étant continue, on en déduit d'abord que $T(x_{n'}) \rightarrow T(x)$ quand $n' \rightarrow +\infty$. Puis, utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\|x - T(x)\|_E \leq \|x - x_{n'}\|_E + \|x_{n'} - T_{n'}(x_{n'})\|_E + \|T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})\|_E + \|T(x_{n'}) - T(x)\|_E.$$

Le premier et le dernier terme du membre de droite de cette inégalité tendent vers zéro quand n' tend vers l'infini, par les convergences que nous venons de montrer. Le deuxième terme est identiquement nul par la propriété de point fixe pour $T_{n'}$. Enfin,

$$\|T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})\|_E = \|g_{n'}(T(x_{n'})) - T(x_{n'})\|_E < \frac{1}{n'} \rightarrow 0 \text{ quand } n' \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, $x = T(x)$ est point fixe de T . \square

Dans le cas d'un espace de Banach, le théorème de Schauder est souvent utilisé sous la forme suivante :

Théorème 27 *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Soit $C' = \overline{\text{conv}}T(C)$. Il s'agit d'un convexe inclus dans C . En effet, $T(C) \subset C$, donc $\text{conv}T(C) \subset C$ car C est convexe, et $\overline{\text{conv}}T(C) \subset C$ car C est fermé. De plus, C' est compact comme enveloppe convexe fermée d'un ensemble relativement compact dans un espace complet, cf. lemme suivant.

On applique alors le théorème de Schauder à la restriction de T à C' . \square

Remarque 6 i) Dans la suite, la mention du théorème de point fixe de Schauder réfèrera indifféremment aux théorèmes 26 ou 27 (lesquels sont clairement équivalents dans le cas d'un espace de Banach).

ii) Dans les applications du théorème de Schauder aux problèmes aux limites non linéaires, on dispose d'une certaine liberté. Il faut d'abord reformuler le problème sous forme d'un problème de point fixe d'une certaine application T . Il faut ensuite choisir un espace E sur lequel T soit continue, puis un convexe fermé C tel que T envoie C dans C , qui soit compact ou tel que $T(C)$ soit relativement compact. Notons que pour cette dernière propriété, il suffit parfois de montrer que pour toute suite $x_n \in C$, il existe une sous-suite telle que $T(x_{n'})$ converge dans E , sans nécessairement montrer que la sous-suite $x_{n'}$ elle-même converge, ce qui n'est d'ailleurs pas forcément le cas. \square

On a utilisé dans la démonstration précédente une propriété de compacité d'enveloppe convexe fermée qui mérite d'être démontrée à part.

Lemme 5 *Soit E un espace de Banach et A une partie relativement compacte de E . Alors $\overline{\text{conv}}A$ est compact.*

Démonstration. Comme A est relativement compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points x_1, \dots, x_k de A tels que les boules de centre x_i et de rayon $\varepsilon/2$ recouvrent A , i.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/2).$$

Posons $C = \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$. C est un convexe borné de dimension inférieure à $k-1$, il est donc relativement compact (en fait il est compact). Il existe par conséquent un nombre fini de points y_1, \dots, y_m de $C \subset \text{conv}A$ tels que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^m B(y_j, \varepsilon/2).$$

Soit maintenant $z \in \text{conv}A$. Il existe donc un nombre fini de points $z_l \in A$, $l = 1, \dots, p$, et des scalaires $\lambda_l \in [0, 1]$ avec $\sum_{l=1}^p \lambda_l = 1$ tels que $z = \sum_{l=1}^p \lambda_l z_l$. Par la première propriété de recouvrement, pour chaque valeur de l , nous pouvons écrire

$$z_l = x_{k_l} + r_{k_l} \text{ pour un certain indice } k_l, \text{ avec } \|r_{k_l}\|_E \leq \varepsilon/2.$$

Il vient donc

$$z = \sum_{l=1}^p \lambda_l x_{k_l} + \sum_{l=1}^p \lambda_l r_{k_l}.$$

Or, $\sum_{l=1}^p \lambda_l x_{k_l} \in C$, donc par la deuxième propriété de recouvrement, nous pouvons écrire

$$\sum_{l=1}^p \lambda_l x_{k_l} = y_j + s_j \text{ pour un certain indice } j, \text{ avec } \|s_j\|_E \leq \varepsilon/2.$$

Par conséquent,

$$z = y_j + \left(s_j + \sum_{l=1}^p \lambda_l r_{k_l} \right),$$

avec

$$\left\| s_j + \sum_{l=1}^p \lambda_l r_{k_l} \right\|_E \leq \varepsilon,$$

par l'inégalité triangulaire. En d'autres termes, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points y_1, \dots, y_m de $\text{conv}A$ tels que

$$\text{conv}A \subset \bigcup_{j=1}^m B(y_j, \varepsilon),$$

propriété qui caractérise bien les sous-ensembles relativement compacts d'un espace métrique complet. \square

Remarque 7 Si E est de dimension finie et si $K \subset E$ est compact, alors $\text{conv}K$ est compact. En effet, un théorème de Carathéodory affirme que si $A \subset E$, alors $\text{conv}A = \{x \in E, x = \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i = 1, x_i \in A\}$. Par conséquent, si K est un compact de E , $\text{conv}K$ est l'image du compact

$$K^{\dim E+1} \times \left\{ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

par l'application continue $(x_i, \lambda_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\dim E+1} \lambda_i x_i$. Par contre, cette propriété est fautive en dimension infinie. Pour le voir, on considère $l^2 \supset K = \{e_i/i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \cup \{0\}$ où e_i est la base hilbertienne canonique de l^2 . On prend la suite $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e_i}{i^2} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{e_k}{k} \in \text{conv}K$. Alors $x_k \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i^2} \notin \text{conv}K$ quand $k \rightarrow +\infty$, donc $\text{conv}K$ n'est pas fermé, donc pas compact. \square

Mentionnons qu'il n'est pas nécessaire que l'espace E soit un espace normé. On a en effet le théorème de point fixe de Tychonov :

Théorème 28 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, C un convexe compact de E et T un application continue de C dans C . Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Ce résultat peut s'établir à l'aide d'arguments de degré topologique, voir J.T. Schwartz. \square

Remarque 8 On pourrait penser utiliser le théorème de Tychonov dans la situation suivante. Soit E un espace de Banach réflexif que l'on munit de sa topologie faible. Alors tout convexe fermé borné est compact et l'on a aucune difficulté à ce niveau. Par contre, on rencontrera probablement des difficultés pour montrer qu'une application non linéaire donnée T est continue pour la topologie faible. Ceci limite l'emploi de ce théorème, au moins dans cette situation. \square

Nous donnons pour clore cette section quelques théorèmes de point fixe qui peuvent être utiles. Rappelons à toutes fins utiles qu'une application entre deux espaces vectoriels normés est dite être *compacte* si elle transforme les bornés de l'espace de départ en ensembles relativement compacts dans l'espace d'arrivée.

Théorème 29 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E qui satisfait la condition suivante : il existe $R \geq 0$ tel que $x = tT(x)$ avec $t \in [0, 1[$ implique $\|x\|_E \leq R$. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Considérons l'application $T^* : \bar{B}(0, R+1) \rightarrow \bar{B}(0, R+1)$ définie par

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } \|T(x)\|_E \leq R+1, \\ (R+1) \frac{T(x)}{\|T(x)\|_E} & \text{si } \|T(x)\|_E > R+1. \end{cases}$$

Comme T^* est obtenue en composant T avec une fonction continue de E dans E , T^* est continue et compacte. Par conséquent, $T^*(\bar{B}(0, R+1))$ est relativement compact et T^* admet un point fixe $x^* \in \bar{B}(0, R+1)$ par le théorème de Schauder.

Montrons que x^* est aussi un point fixe de T . Si $\|T(x^*)\|_E \leq R+1$, il n'y a rien à montrer. Si $\|T(x^*)\|_E > R+1$, alors d'une part $\|x^*\|_E = \|T^*(x^*)\|_E = R+1$ et d'autre part $x^* = tT(x^*)$ avec $t = (R+1)/\|T(x^*)\|_E \in [0, 1[$. Par hypothèse, on a donc $\|x^*\|_E \leq R$, contradiction. \square

Remarque 9 En remplaçant $R+1$ par $R+1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, on voit que l'on peut en outre assurer l'existence d'un point fixe tel que $\|x^*\|_E \leq R$. \square

Ce résultat est dû à Leray et Schauder en utilisant la théorie du degré topologique de Leray et Schauder. Il admet une version un peu plus générale.

Théorème 30 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de $[0, 1] \times E$ dans E qui satisfait la condition suivante : $T(0, x) = 0$ et il existe $R \geq 0$ tel que $x = T(t, x)$ avec $t \in [0, 1]$ implique $\|x\|_E \leq R$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $T(t, \cdot)$ admet un point fixe $x^*(t)$ qui dépend continûment de t .*

Citons enfin,

Théorème 31 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E telle qu'il existe $R \geq 0$ tel que $T(\partial B(0, R)) \subset \bar{B}(0, R)$. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Analogue à celle du Théorème 29. □

Remarque 10 Le théorème de Leray et Schauder est un peu surprenant. En effet, on doit vérifier que si pour chaque élément de la famille tT , $t \in [0, 1[$, il existe un point fixe, alors celui-ci doit nécessairement rester dans une certaine boule indépendante de t , alors ceci implique l'existence même de ces points fixes. En d'autres termes, une estimation *a priori* des solutions éventuelles, avant même de savoir s'il y en a ou pas, suffit à assurer leur *existence*. Notons que l'expression « estimation *a priori* » est souvent employée improprement, quand on estime des solutions dont on a déjà montré l'existence. □

2.2 Résolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe

En application des théorèmes de point fixe, nous nous intéressons dans cette section à un problème d'EDP elliptique non linéaire modèle très simple. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit f fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Le problème consiste à trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Nous verrons par la suite comment préciser le sens fonctionnel de cette équation.

Pour mettre ce problème sous forme d'un problème de point fixe, on commence par énoncer un résultat d'existence et d'unicité linéaire.

Proposition 16 *Soit $g \in H^{-1}(\Omega)$. Il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta v = g$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cette fonction v est l'unique solution du problème variationnel :*

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \langle g, w \rangle. \quad (2.1)$$

De plus, l'application $g \mapsto (-\Delta)^{-1}g = v$ est continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration est très simple. Pour l'existence, on note que la forme bilinéaire $a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \partial_i v \partial_i w \, dx$ (on utilise la convention de sommation des indices répétés) est continue sur $H_0^1(\Omega)$, qu'elle est $H_0^1(\Omega)$ -elliptique par l'inégalité de Poincaré et que la forme linéaire $l(w) = \langle g, w \rangle$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ par définition. Le lemme de Lax-Milgram implique donc l'existence et l'unicité de la solution v du problème variationnel. Montrons que cette fonction est solution de l'équation au sens des distributions. Par définition de la dérivation des distributions, Δv est la distribution donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \Delta v, \varphi \rangle = \langle \partial_{ii} v, \varphi \rangle = -\langle \partial_i v, \partial_i \varphi \rangle = -\int_{\Omega} \partial_i v \partial_i \varphi \, dx$$

puisque $\partial_i v \in L^2(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, nous avons donc

$$\langle \Delta v, \varphi \rangle = \langle -g, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire $\Delta v = -g$.

Pour montrer l'unicité, considérons $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta v = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. D'après ce qui précède, ceci signifie que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_i v \partial_i \varphi \, dx = 0$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, $\partial_i \varphi_n \rightarrow \partial_i v$ dans $L^2(\Omega)$. En passant à la limite dans l'intégrale, on voit donc que $\nabla v = 0$, ce qui implique $v = 0$ par l'inégalité de Poincaré.

La continuité de l'application $(-\Delta)^{-1}$ découle directement de la formulation variationnelle et de l'inégalité de Poincaré en prenant $w = v$. \square

Corollaire 32 *L'application $(-\Delta)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. En effet, $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. \square

Dans le problème modèle apparaît au second membre de l'équation un terme de la forme $f(u)$ dont nous n'avons pas encore précisé le sens. C'est l'objet du théorème de Carathéodory, introduit par un lemme. On note \sim la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables.

Lemme 6 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $f \in C^0(\mathbb{R})$. Pour tout couple de fonctions mesurables u_1 et u_2 sur Ω , si $u_1 \sim u_2$ alors $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$.*

Démonstration. Notons d'abord que si une fonction u est mesurable alors $f \circ u$ l'est aussi, puisque f est continue. Supposons que $u_1 \sim u_2$, i.e., $u_1 = u_2$ presque partout dans Ω . Il existe donc un ensemble négligeable N tel que si $x \notin N$, $u_1(x) = u_2(x)$, d'où également $f(u_1(x)) = f(u_2(x))$, c'est-à-dire $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$. \square

En d'autres termes, on vient de voir que l'application $u \mapsto f \circ u$ passe au quotient par la relation d'égalité presque partout.

Théorème 33 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $|f(t)| \leq a + b|t|$. On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur Ω la classe d'équivalence $f(u) = f \circ u$ comme au lemme précédent. Alors l'application $u \mapsto f \circ u$ envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et est continue pour la topologie forte.

Démonstration. Si $u \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} |f(u)|^2 dx \leq 2a^2 \text{mes } \Omega + 2b^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty,$$

donc $f(u) \in L^2(\Omega)$.

Montrons que l'application ainsi définie est continue de $L^2(\Omega)$ fort dans $L^2(\Omega)$ fort. Soit u_n une suite convergente dans $L^2(\Omega)$ vers une limite u . Soit $u_{n'}$ une sous-suite de u_n . Extrayons une nouvelle sous-suite $u_{n''}$ qui converge presque partout, *i.e.*, il existe un ensemble N de mesure nulle tel que pour tout x n'appartenant pas à N , $u_{n''}(x) \rightarrow u(x)$, et telle qu'il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $|u_{n''}(x)| \leq g(x)$ presque partout (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue). Nous avons donc $|f(u_{n''}(x)) - f(u(x))|^2 \rightarrow 0$ presque partout puisque f est continue et $|f(u_{n''}) - f(u)|^2 \leq 4a^2 + 4b^2 g^2 + 2|f(u)|^2$. Le second membre de cette inégalité est une fonction de $L^1(\Omega)$ qui ne dépend pas de n'' . Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour en déduire que $\int_{\Omega} |f(u_{n''}) - f(u)|^2 dx \rightarrow 0$, c'est à dire que $f(u_{n''}) \rightarrow f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Nous avons montré que de toute sous-suite $f(u_{n'})$, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers $f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort. L'unicité de cette limite implique que c'est la suite entière $f(u_n)$ qui converge. \square

Remarque 11 i) L'hypothèse Ω borné n'est pas nécessaire dans cette démonstration. Il suffit clairement que $\text{mes } \Omega < +\infty$. De même, les hypothèses que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N et que l'on considère la mesure de Lebesgue peuvent visiblement être considérablement généralisées.

ii) Le théorème de Carathéodory est en fait plus général. Par exemple, soit A un borélien de \mathbb{R}^N et $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\begin{cases} f(\cdot, s) & \text{est mesurable sur } A \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, \\ f(x, \cdot) & \text{est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } x \in A, \end{cases}$$

(une telle fonction est dite fonction de Carathéodory). On suppose qu'il existe des exposants $1 \leq p, q < +\infty$, une fonction $a \in L^q(A)$ et une constante $b \geq 0$ tels que

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p/q} \quad \text{pour presque tout } x \text{ et tout } s.$$

Alors l'application $u \mapsto \tilde{f}(u)$ définie par $\tilde{f}(u)(x) = f(x, u(x))$ est continue de $L^p(A)$ fort dans $L^q(A)$ fort. \square

Nous pouvons maintenant attaquer le problème modèle.

Théorème 34 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. On donne deux démonstrations utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

Première démonstration. On prend comme espace de Banach de base $E = L^2(\Omega)$. D'après le théorème 33, si $v \in E$ alors $f(v) \in E$ (en fait, ici $f(v) \in L^\infty(\Omega)$). Posons $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T: E \rightarrow E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues :

$$\begin{array}{ccccccc} & \tilde{f} & & (-\Delta)^{-1} & & \text{injection} & \\ L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) & \rightarrow & H_0^1(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ v & \mapsto & f(v) & \mapsto & T(v) & \mapsto & T(v) \end{array}$$

Vérifions que tout point fixe de T est une solution de notre problème. Soit donc $u \in L^2(\Omega)$ tel que $T(u) = u$. Comme $T(u) = (-\Delta)^{-1}(f(u))$, on en déduit d'abord que $u \in H_0^1(\Omega)$. D'autre part, par définition de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, $-\Delta T(u) = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc u est solution du problème modèle (et réciproquement).

Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici $C = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M\}$ où M est une constante à choisir (on prend ici $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ en utilisant l'inégalité de Poincaré). Par le théorème de Rellich, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc C qui est borné dans $H_0^1(\Omega)$, est relativement compact dans E . De plus, c'est un fermé de E . En effet, si $v_n \in C$ converge vers $v \in E$ dans E , alors v_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous-suite $v_{n'}$ qui converge faiblement vers un élément de $H_0^1(\Omega)$, lequel ne peut être que v . De plus, la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la norme implique que $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n' \rightarrow +\infty} \|v_{n'}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$, c'est à dire $v \in C$. Par conséquent, C est compact dans E .

Nous allons choisir la constante M pour que $T(C) \subset C$. Il s'agit d'un problème d'estimation de $T(v)$. D'après le théorème 16, $T(v)$ est solution du problème variationnel :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla T(v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f(v)w \, dx.$$

Prenant $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient :

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(v)T(v) \, dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\Omega} |T(v)| \, dx,$$

puisque $|f(v)T(v)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|T(v)|$. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons que

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\text{mes } \Omega)^{1/2}\|T(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_Ω telle que pour tout z dans $H_0^1(\Omega)$, $\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$. Comme $T(v) \in H_0^1(\Omega)$, nous obtenons donc, pour tout v dans E ,

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\text{mes } \Omega)^{1/2}.$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, il suffit donc de prendre $M = C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\text{mes } \Omega)^{1/2}$, puisqu'alors, $T(E) \subset C$.

Les hypothèses du théorème de Schauder, première version, sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins une solution du problème modèle dans l'ensemble C .

Deuxième démonstration. On prend cette fois comme espace $E = H_0^1(\Omega)$ et l'on pose encore $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T: E \rightarrow E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\text{injection}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{f}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} & H_0^1(\Omega) \\ v & \longmapsto & v & \longmapsto & f(v) & \longmapsto & T(v) \end{array}$$

Notons que par le théorème de Rellich, l'injection est compacte et que par conséquent, T transforme les bornés de E en ensembles relativement compacts de E , puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact.

Nous prenons une nouvelle fois $C = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M\}$ avec toujours $M = C_\Omega\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\text{mes } \Omega)^{1/2}$. Par le même calcul d'estimation que précédemment, nous avons donc $T(C) \subset C$. L'ensemble C est un convexe fermé de E . Il est de plus borné, donc d'après la remarque faite plus haut, $T(C)$ est relativement compact. Les hypothèses du théorème de Schauder, dans sa deuxième version, sont donc satisfaites. \square

Remarque 12 i) Notons que si les ingrédients utilisés dans les deux démonstrations sont essentiellement les mêmes, l'ordre dans lequel on les utilise change.

ii) On a supposé que f est bornée. Si f n'est pas bornée, il peut exister des solutions, mais pas toujours. Donnons en un exemple. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur Ω avec condition de Dirichlet au bord. On sait que l'on peut choisir une fonction propre associée $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ de telle sorte que $\varphi_1 > 0$ dans Ω . Considérons la fonction $f(t) = 1 + \lambda_1 t$. Alors $-\Delta u = f(u)$

n'a pas de solution u dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, une telle solution devrait satisfaire en particulier

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \varphi_1 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx.$$

D'un autre côté, comme φ_1 est une fonction propre associée à la valeur propre λ_1 , on a aussi

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla u dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 u dx.$$

Par conséquent, nous obtenons $\int_{\Omega} \varphi_1 dx = 0$, ce qui est impossible. \square

Terminons ce chapitre sur un exemple d'unicité pour le problème modèle.

Théorème 35 *On suppose qu'en outre des hypothèses précédentes f est décroissante. Alors la solution u du problème modèle est unique.*

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions. D'après le théorème 34, elles satisfont donc :

$$\begin{aligned} \forall v_1 \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx &= \int_{\Omega} f(u_1) v_1 dx, \\ \forall v_2 \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx &= \int_{\Omega} f(u_2) v_2 dx, \end{aligned}$$

Prenons $v_1 = u_1 - u_2$ et $v_2 = u_2 - u_1$ et additionnons les deux équations. Nous obtenons :

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) dx \leq 0,$$

puisque l'intégrande du membre de droite est négative à cause de la décroissance de f . Par conséquent, $u_1 = u_2$ par l'inégalité de Poincaré. \square

Rappelons qu'en général, il n'y a aucune raison pour que l'unicité ait lieu.

Exercices du chapitre 1

1. Montrer le Théorème 31.

2. Montrer que tout convexe ouvert borné d'un espace de Banach est homéomorphe à la boule unité ouverte de cet espace. En déduire un théorème de point fixe analogue au Théorème 31 utilisant un tel convexe.

3. Soit E un espace de Banach et $T : E \rightarrow E$ une application continue et compacte telle qu'il existe $R > 0$ avec

$$\|x - T(x)\|_E^2 \geq \|T(x)\|_E^2 - \|x\|_E^2$$

pour tout x tel que $\|x\|_E \geq R$. Montrer que T admet un point fixe (*Indication* : on pourra montrer que si $0 \leq t < 1$, l'application tT n'a pas de point fixe hors de la boule de rayon R). En déduire que si T continue compacte est telle que $\|T(x)\|_E \leq a\|x\|_E + b$ avec $0 \leq a < 1$, alors T admet un point fixe.

4. Soit $m \geq 3$, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^m et $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et telle que

$$|f(s, \xi)| \leq a + b|s|^{\frac{m}{m-2}} + c\|\xi\|$$

avec $a, b, c \geq 0$. Montrer que l'application $u \mapsto f(u, \nabla u)$ est bien définie et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ munis de leur topologies fortes respectives (*Indication* : utiliser les injections de Sobolev).

5. On suppose maintenant que $b = c = 0$. Montrer que le problème : $u \in H_0^1(\Omega)$, $-\Delta u = f(u, \nabla u)$ admet au moins une solution (*Indication* : on pourra montrer que l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ en montrant à l'aide de la formulation variationnelle que si $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^2(\Omega)$, alors $u_n = (-\Delta)^{-1}g_n \rightharpoonup (-\Delta)^{-1}g = u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et que $\|\nabla u_n\|_{L^2} \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2}$).