Chapitre 1

Rappels en tous genres

Dans ce chapitre, on passe rapidement en revue les résultats d'analyse dont on se servira le plus souvent dans le reste du cours. On en trouvera des démonstrations dans la plupart des ouvrages qui traitent de ces questions. On pourra également jeter un œil à http ://www.ann.jussieu.fr/~ledret/OBAA-2003-2004.pdf et à http ://www.ann.jussieu.fr/~ledret/M1/ComplementsM1ApproxEDP.pdf pour certains détails.

1.1 Les théorèmes de convergence de Lebesgue

Soit (X,μ) un espace mesuré. La plupart du temps, X sera un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et μ la mesure de Lebesgue, définie sur la complétion de la tribu borélienne. À la base de tout se trouve le théorème suivant, que l'on utilise rarement tel quel.

Théorème 1 (Convergence monotone de Lebesgue) *Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Cette suite converge simplement vers une fonction mesurable f et l'on a*

$$\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu \text{ quand } n \to +\infty.$$

Une conséquence immédiate du théorème de convergence monotone est le lemme de Fatou, que l'on peut voir comme un résultat de semi-continuité inférieure de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2 (Lemme de Fatou) *Soit f_n une suite de fonctions mesurables de X dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. On a*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\int_X f_n\,d\mu\Big).$$

Une conséquence presque immédiate du lemme de Fatou est le théorème de convergence dominée de Lebesgue, qui est de loin le plus employé dans la pratique.

Théorème 3 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit f_n une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ quand } n \to +\infty \text{ presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction g sur X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, intégrable, telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ presque partout dans } X.$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En particulier,

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée existe aussi en version L^p.

Théorème 4 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et f_n une suite de fonctions de $L^p(X, d\mu)$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ quand } n \to +\infty \text{ presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction $g \in L^p(X, d\mu)$ telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ presque partout dans } X.$$

Alors $f \in L^p(X, d\mu)$ et l'on a

$$\|f_n - f\|_{L^p(X,d\mu)} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On fera un usage répété de la réciproque partielle du théorème de convergence dominée.

Théorème 5 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et f_n une suite de fonctions de $L^p(X, d\mu)$ telle que $\|f_n - f\|_{L^p(X,d\mu)} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Alors on peut extraire une sous-suite n' telle qu'il existe $g \in L^p(X, d\mu)$ avec*

$$f_{n'}(x) \to f(x) \text{ quand } n \to +\infty \text{ presque partout dans } X,$$

et

$$|f_{n'}(x)| \leq g(x) \text{ presque partout dans } X.$$

Attention ! L'extraction d'une sous-suite est obligatoire dans ce théorème. Ce résultat moins connu que le théorème direct, mais très utile, est un sous-produit de la démonstration usuelle du fait que $L^p(X,d\mu)$ est complet.

À propos de sous-suites, on utilisera aussi souvent la petite astuce d'unicité suivante.

Lemme 1 *Soit X un espace topologique et x_n une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x. Alors la suite entière x_n converge vers x.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite ne converge pas vers x. Il existe donc un voisinage V de x et une sous-suite $x_{n'}$ telle que $x_{n'} \notin V$ pour tout n'. Extrayons de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $x_{n''}$ qui converge vers x. Il existe donc un n''_0 tel que pour tout $n'' \geq n''_0$, $x_{n''} \in V$, contradiction. □

1.2 La convolution

La convolution est une technique de base dont les applications sont nombreuses. Nous nous en servirons principalement comme outil de régularisation des fonctions. Pour la convolution, on travaille dans $\mathbb{R}^N$ (ou on s'y ramène d'une façon ou d'une autre) avec la mesure de Lebesgue.

Théorème 6 *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^N$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable et la fonction F définie par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$. Elle est appelée la convoluée *de f et de g et notée $f \star g$. L'opération de* convolution *ainsi définie est une application bilinéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, avec l'estimation*

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

De plus, on a $f \star g = g \star f$.

La valeur de la fonction F en x peut être vue comme une moyenne des valeurs de f autour de x pondérée par celles de g (en brisant la symétrie entre f et g, et autour de x pouvant signifier sur $\mathbb{R}^N$ entier, naturellement).

Plus généralement, on peut définir la convolution de deux fonctions si elles appartiennent à des espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ convenables. Plus précisément :

Théorème 7 *Soit (p,q,r) un triplet de $[1,+\infty]$ tel que*

$$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \text{ avec la convention } \frac{1}{+\infty}=0\cdot \tag{1.1}$$

Alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^N$, la fonction

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable et la fonction $f\star g$ définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$f\star g(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

appartient à $L^r(\mathbb{R}^N)$. L'application $(f,g)\mapsto f\star g$ est bilinéaire continue de $L^p(\mathbb{R}^N)\times L^q(\mathbb{R}^N)$ dans $L^r(\mathbb{R}^N)$ avec

$$\|f\star g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Il est instructif d'explorer les couples (p,q) admissibles pour la convolution, c'est-à-dire tels qu'il existe $r\in[1,+\infty]$ satisfaisant la relation (1.1), et quelles sont les valeurs de r correspondantes. Notre intérêt premier pour la convolution vient ici des deux résultats suivants dont la conjonction permet de régulariser les fonctions (la convolution a bien sûr nombre d'autres applications).

Théorème 8 *Soit $k\in\mathbb{N}$. Si g appartient à $C^k(\mathbb{R}^N)$ et est à support compact, alors pour tout $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $f\star g\in C^k(\mathbb{R}^N)$ et l'on a $\partial^\alpha(f\star g)=f\star\partial^\alpha g$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha|\leq k$. Si g appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et est à support compact, alors $f\star g\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

On rappelle que la longueur d'un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$ est donnée par $|\alpha|=\sum_{i=1}^N \alpha_i$ et que $\partial^\alpha g=\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.

Théorème 9 *Soient g une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale 1 et $p\in[1,+\infty[$. Posons*

$$g_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-N}g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot$$

On a alors, pour toute fonction f appartenant à $L^p(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|g_\varepsilon\star f-f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=0.$$

Pour approcher une fonction f de $L^p(\mathbb{R}^N)$ au sens de la norme de $L^p(\mathbb{R}^N)$ par une suite de fonctions C^∞, il suffit donc de construire une fonction C^∞ à support compact et d'intégrale égale à 1. Cela n'est pas très difficile.

Lemme 2 *Soit θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\theta(t) = e^{\frac{1}{t-1}} \textit{ si } t < 1 \quad \textit{et} \quad \theta(t) = 0 \textit{ sinon},$$

et $g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{\int_{B(0,1)} \theta(|y|^2)\,dy}\theta(|x|^2).$$

Alors g est C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ à support égal à $\bar{B}(0,1)$ et d'intégrale 1.

On remarque dans ce cas que le support de g_ε est $\bar{B}(0,\varepsilon)$. La fonction g_ε se concentre dans cette boule en gardant une intégrale égale à 1 grâce au facteur ε^{-N}. La suite g_ε est appelée *suite régularisante*. La remarque suivante va permettre de travailler dans des ouverts quelconques.

Lemme 3 *Soit F le support de $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x,F) \leq \varepsilon\}$. Alors le support de $g_\varepsilon \star f$ est inclus dans F_ε.*

Démonstration. En effet, on rappelle que le support d'une fonction f est un fermé, c'est le complémentaire de la réunion des ouverts où f est nulle presque partout. Si $d(x,F) > \varepsilon$, alors $B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$. Par conséquent, $f = 0$ presque partout dans $B(x,\varepsilon)$. Or $g_\varepsilon \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy = \int_{B(x,\varepsilon)} g_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy = 0$, vu que le support de $g_\varepsilon(x-\cdot)$ est exactement $\bar{B}(x,\varepsilon)$. Donc g est identiquement nulle sur le complémentaire de F_ε. □

Comme l'effet de la convolution par g_ε est de « lisser les aspérités » des valeurs de f, un peu comme on estompe un dessin fait au crayon, ceci se fait au prix d'une petite expansion d'au plus ε du support de f.

Une image noir et blanc est représentée par une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $[0,1]$. Le blanc correspond à la valeur 0, le noir à la valeur 1, et les nuances de gris aux valeurs intermédiaires. À gauche on voit la fonction caractéristique du carré unité, à droite une régularisation par convolution.

Soit maintenant Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. On note alors $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

Théorème 10 *L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Démonstration. En deux mots, on prend une suite exhaustive de compacts de Ω, K_n (une suite de compacts tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Il en existe une dans tout ouvert de $\mathbb{R}^N$). Pour tout $f \in L^p(\Omega)$, on a $f\mathbf{1}_{K_n} \to f$ quand $n \to +\infty$ dans $L^p(\Omega)$ par le théorème de convergence dominée ($\mathbf{1}_{K_n}$ désigne la fonction caractéristique de K_n). On prolonge $f\mathbf{1}_{K_n}$ par 0 à $\mathbb{R}^N$ tout entier. Alors $g_\varepsilon \star f\mathbf{1}_{K_n} \to f\mathbf{1}_{K_n}$ quand $\varepsilon \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, c'est une suite de fonctions C^∞, et pour $\varepsilon < d(K_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, $g_\varepsilon \star f\mathbf{1}_{K_n}$ est à support dans $(K_n)_\varepsilon \subset \Omega$ et compact. On conclut par un argument de double limite. □

Ce résultat est bien sûr faux pour $p = +\infty$. L'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ est $C_0(\bar{\Omega})$, l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ nulles au bord et qui tendent vers 0 à l'infini.

1.3 Les distributions

Dans la pratique des équations aux dérivées partielles, il n'est pas nécessaire de maîtriser totalement les détails de la topologie naturelle de l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ (la topologie limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet). Il suffit d'en connaître les suites convergentes.

Proposition 1 *Une suite φ_n de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si*

i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que le support de φ_n est inclus dans K pour tout n,

ii) Pour tout multi-indice α, $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K.

En fait, on peut voir cette proposition comme une définition de travail, largement suffisante dans la pratique.

De même, il n'est nul besoin de connaître les détails de la topologie de son dual $\mathscr{D}'(\Omega)$, l'espace des formes linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$, *i.e.* l'espace des distributions sur Ω. On doit être capable de reconnaître une distribution.

Proposition 2 *Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour tout compact K de Ω, il existe un entier n et une constante C telles que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ à support dans K*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq n, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

En fait, cette propriété de continuité se trouve être équivalente à la continuité séquentielle.

Proposition 3 *Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour toute suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ qui converge vers φ au sens de $\mathscr{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

De même, la convergence d'une suite de distribution dans l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ s'exprime de façon particulièrement simple.

Proposition 4 *Une suite de distributions T_n converge vers une distribution T au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

La plupart des espaces de fonctions raisonnables s'injectent dans les distributions. En particulier,

Proposition 5 *L'application $\imath : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle \imath(f), \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi \, dx,$$

est une injection continue.

On identifie donc les fonctions localement intégrables — donc a fortiori toutes les fonctions L^p, les fonctions continues — à des distributions sans autre forme de procès.

On dérive indéfiniment les distributions par dualité.

Proposition 6 *Soit T une distribution sur Ω. La forme linéaire définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

est une distribution. Si T se trouve être une fonction de classe C^1, alors sa dérivée partielle au sens des distributions coïncide avec sa dérivée partielle au sens classique. Enfin, l'application $T \mapsto \partial T / \partial x_i$ est continue de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

On multiplie les distributions par des fonctions C^∞ par dualité également.

Proposition 7 *Soit T une distribution sur Ω et $v \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle vT, \varphi \rangle = \langle T, v\varphi \rangle$$

est une distribution. Si T se trouve être une fonction de L^1_{loc}, alors vT coïncide avec le produit au sens classique.

Grâce à ces deux propositions, on peut donc appliquer n'importe quel opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞ à n'importe quelle distribution.

Quelques mots d'avertissement : une distribution n'est en général pas une fonction (sauf quand c'en est une au sens précédent, of course), penser par exemple à la masse de Dirac. Elle n'a pas de valeurs ponctuelles ou presque partout. On ne l'intègre pas sur Ω. Écrire une formule comme $\int_\Omega T(x)\varphi(x)\,dx$ à la place d'un crochet de dualité est un crime grave si on ne s'est pas assuré au préalable que T est en fait dans L^1_{loc}. La convergence au sens des distributions n'est pas une manipulation magique susceptible de justifier n'importe quoi.

Remarquons quand même que si une distribution ne prend pas de valeurs ponctuelles, elle conserve néanmoins un caractère local. En particulier, on peut restreindre une distribution définie sur Ω à un ouvert plus petit. Deux distributions sur Ω_1 et Ω_2 qui coïncident au sens précédent sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ peuvent se recoller en une distribution sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (on dit que les distributions forment un faisceau).

1.4 Les espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. Une autre partie se déroule dans les espaces de Hölder, ainsi que dans plusieurs autres espaces fonctionnels plus sophistiqués dont nous ne parlerons pas ici.

Il existe plusieurs caractérisations des espaces de Sobolev. Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positif $k \in \mathbb{N}$, on retiendra que

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \le k\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$$

pour $p \in [1, +\infty[$ et

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

pour $p = +\infty$. On utilise parfois la notation $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ pour désigner ces normes. Les dérivées partielles sont naturellement prises au sens des distributions. Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach. Dans le cas $p = 2$, on note $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u|v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} (\partial^\alpha u|\partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

On utilise parfois la notation $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ pour désigner la norme sur H^k. Notons que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ d'où la notation $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ parfois employée pour la norme L^p, qui devient $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ pour L^2.

Clairement, les fonctions C^∞ à support compact sont dans $W^{k,p}(\Omega)$, et l'on note $W_0^{k,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$, pour $p < +\infty$. On note bien sûr $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. C'est un sous-espace vectoriel fermé (donc complet) de $W^{k,p}(\Omega)$, qui est en général un sous-espace strict pour $k \geq 1$. Les exceptions à cette règle sont $\Omega = \mathbb{R}^N$, ou bien $\mathbb{R}^N$ privé d'un ensemble « petit », la signification précise de ce « petit » dépendant des valeurs de k et p.

Par définition, on peut approcher tout élément de $W_0^{k,p}(\Omega)$ au sens de $W^{k,p}(\Omega)$ par une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ pour n'importe quel ouvert Ω. Dans le même ordre d'idées,

Théorème 11 (Théorème de Meyers-Serrin) *L'espace* $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$*, pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Il se démontre à l'aide de convolutions astucieusement menées. Naturellement, les fonctions de $C^\infty(\Omega)$ n'ont aucune propriété d'intégrabilité sur Ω, d'où l'intersection dans le théorème de Meyers-Serrin.

La question de la densité des fonctions régulières jusqu'au bord dans $W^{k,p}(\Omega)$ dépend quant à elle de la régularité de l'ouvert Ω lui-même. Rappelons la définition d'un ouvert Lispchitzien de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1 *On dit qu'un ouvert* Ω *est Lipschitzien s'il est borné et si l'on peut recouvrir sa frontière* $\partial\Omega$ *par un nombre fini d'hypercubes ouverts* C_j *chacun associé à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées,* $y^j = (y_1^j, y_2^j, \dots, y_N^j)$*, de telle sorte que*

$$C_j = \{y \in \mathbb{R}^N; |y_i^j| < a_j \text{ pour } i = 1, \dots, N\},$$

et qu'il existe une fonction $\varphi_j \colon \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ *Lipschitzienne telle que l'on ait*

$$\Omega \cap C_j = \{y \in C_j; y_N^j < \varphi_j((y^j)')\},$$

avec la notation $\mathbb{R}^{N-1} \ni (y^j)' = (y_1^j, y_2^j, \dots, y_{N-1}^j)$.

On note $C^\infty(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions C^∞ qui admettent, ainsi que toutes leurs dérivées partielles à tous ordres, un prolongement continu à $\bar{\Omega}$.

Théorème 12 *Soit* Ω *un ouvert Lipschitzien. Alors l'espace* $C^\infty(\bar{\Omega})$ *est dense dans* $W^{1,p}(\Omega)$*, pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Mentionnons un résultat de première importance : les injections de Sobolev pour $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou bien Ω ouvert régulier (disons C^∞, c'est-à-dire que les fonctions φ_j sont de classe C^∞. C'est une hypothèse un peu trop forte, mais du moins avec elle on est sûr de ne pas avoir de mauvaise surprise...)

Théorème 13 *Soit $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors*
i) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$,
ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$ (mais pas pour $q = +\infty$ si $p > 1$),
iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Dans ce dernier cas, si $k - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions de classe C^l dont les dérivées l-èmes sont Höldériennes d'exposant β) où $l = \left[k - \frac{N}{p}\right]$ et $\beta = k - \frac{N}{p} - l$ sont respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de $k - \frac{N}{p}$.
Toutes ces injections sont continues.

Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections de Sobolev restent vraies localement, *i.e.* dans tout ouvert compactement inclus dans Ω. En d'autres termes, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, etc. Elles restent vraies globalement si l'on remplace $W^{m,p}(\Omega)$ par $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Il est utile de réécrire ce théorème dans le cas $k = 1$ et Ω borné, régulier.

Théorème 14 *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors*
i) Si $1 \leq p < N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, ou encore $p^* = \frac{Np}{N-p}$,
ii) Si $p = N$, on a $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$,
iii) Si $p > N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ où $\beta = 1 - \frac{N}{p}$.

Notons que si Ω est borné régulier, alors $W^{1,\infty}(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à l'espace $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ des fonctions Lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$.

On peut également jouer avec les injections de Sobolev ci-dessus pour obtenir par exemple que pour $p < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega)$, et ainsi de suite. Bien sûr, $p^* > p$.

Un autre résultat de première importance est un résultat de compacité que l'on regroupe sous le terme générique de théorème de Rellich-Kondrašov.

Théorème 15 *Soit Ω borné, régulier et $p \in [1, +\infty[$. Alors les injections*
i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < p^*$, si $1 \leq p < N$,
ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < +\infty$, si $p = N$,
iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ avec $0 \leq \gamma < \beta$, si $p > N$,
sont des injections compactes.

En particulier, l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte. Sans hypothèse de régularité sur Ω, mais toujours avec Ω borné, les injections restent compactes à condition de considérer les espaces L^q_{loc}, etc., à l'arrivée, ou bien en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ au bord de Ω. Dans le cas où $p \leq N$, les éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continus. Il s'agit de classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout et l'on ne peut pas aisément définir de façon raisonnable les valeurs qu'elles pourraient prendre sur $\partial\Omega$.

Le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert Lipschitzien est muni d'une mesure naturelle $(N-1)$-dimensionnelle, que nous noterons $d\sigma$ et d'un vecteur normal au bord, unitaire, extérieur n, défini presque partout par rapport à cette mesure, que l'on peut calculer à l'aide des fonctions φ_j de la définition 1. Pour contourner de façon naturelle le problème des valeurs au bord, on dispose du théorème de trace suivant.

Théorème 16 *Soit Ω un ouvert Lipschitzien et $p \in [1, +\infty[$. Il existe une unique application linéaire continue $\gamma_0 \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ qui prolonge l'application de restriction $u \mapsto u_{|\partial\Omega}$ définie sur le sous espace dense $C^1(\bar{\Omega})$.*

Cette application, appelée *application trace*, n'est pas surjective. Son image est notée $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, ou bien $H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour $p = 2$ (il s'agit d'espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire que l'on n'a pas définis en tant que tels ici). Son noyau n'est autre que $W^{1,p}_0(\Omega)$.

On définit aussi des traces d'ordre supérieur sur $W^{k,p}(\Omega)$ pour $k > 1$ qui prolongent par continuité la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ et ainsi de suite. À ce propos, il convient de bien distinguer les espaces $W^{k,p}_0(\Omega)$ et $W^{k,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ quand $k > 1$. Dans le premier espace, toutes les traces jusqu'à l'ordre $k-1$ sont nulles (moralement, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = \cdots = 0$ sur $\partial\Omega$) alors que dans le second, seule la première trace est nulle.

Notons la formule d'intégration par parties :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) n_i\, d\sigma,$$

où n_i est la i-ème composante du vecteur normal n. Cette formule porte des noms variés (formule de Green, etc.) et donne naissance à tout un tas d'autres formules par applications répétées. On l'établit d'abord pour des fonctions $C^1(\bar{\Omega})$, puis on conclut par densité. Mentionnons le cas particulier important

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) n_i\, d\sigma.$$

Pour conclure ces brefs rappels sur les espaces de Sobolev, mentionnons l'inégalité de Poincaré.

Théorème 17 *Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}.$$

Il s'agit encore d'un résultat que l'on montre d'abord sur les fonctions régulières, puis que l'on étend par densité. Il implique clairement que, dans un ouvert borné dans une direction, la semi-norme $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$. On note parfois $|u|_{1,p,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ cette semi-norme.

1.5 Dualité et convergences faibles

On rappelle que pour tout $p \in [1,+\infty[$, le dual de $L^p(X,d\mu)$ s'identifie isométriquement à $L^{p'}(X,d\mu)$ où la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ définit une paire d'exposants conjugués, par l'intermédiaire de la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \int_X uv\,d\mu$. Par contre, $L^1(X,d\mu)$ est un sous-espace strict de $\big(L^\infty(X,d\mu)\big)'$, en tout cas pour la plupart des mesures μ qui peuvent nous intéresser ici. Le plus souvent, par exemple quand X est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue, $L^1(X,d\mu)$ n'est pas un dual.

On déduit de ce qui précède que pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(X,d\mu)$ est réflexif. Par conséquent, de toute suite u_n bornée dans $L^p(X,d\mu)$, on peut extraire une sous-suite $u_{n'}$ faiblement convergente. On rappelle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(X,d\mu)$ si et seulement si $\int_X u_n v\,d\mu \to \int_X uv\,d\mu$ pour tout $v \in L^{p'}(X,d\mu)$. Pour $p=+\infty$, X ouvert de $\mathbb{R}^N$ et μ la mesure de Lebesgue, alors on peut extraire une sous-suite faiblement-étoile convergente, car dans ce cas le prédual de L^∞, qui n'est autre que L^1, est séparable. On rappelle que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ si et seulement si $\int_X u_n v\,d\mu \to \int_X uv\,d\mu$ pour tout $v \in L^1(X,d\mu)$. Enfin, une suite bornée dans $L^1(X,d\mu)$ n'a en général pas de propriété de convergence faible vis-à-vis de L^1 sans hypothèse supplémentaire (il existe plusieurs caractérisations des compacts faibles de L^1).

Pour X ouvert de $\mathbb{R}^N$ et μ la mesure de Lebesgue, ces convergences faible ou faible-étoile impliquent trivialement la convergence au sens des distributions.

Intéressons nous maintenant à la dualité des espaces de Sobolev. Tout d'abord, les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, sont réflexifs. On peut donc extraire de tout suite bornée une suite faiblement convergente. Malheureusement pour nous, le dual de $W^{1,p}(\Omega)$ n'est pas si facile à identifier à un autre espace fonctionnel concret. Qu'à cela ne tienne, on a la caractérisation suivante de la convergence faible.

Proposition 8 *Une suite u_n converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si et seulement si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ et $\partial u_n/\partial x_i \rightharpoonup g_i$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, $i=1,\dots,N$. Dans ce cas, on a $g_i = \partial u/\partial x_i$.*

On a une caractérisation analogue avec des étoiles dans le cas $p = +\infty$. Grâce au théorème de Rellich, on a en prime que $u_n \to u$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fort.

Le cas de $H^1(\Omega)$ est particulier, puisqu'il s'agit d'un espace de Hilbert. Il est donc isométrique à son dual par l'intermédiaire de son produit scalaire (théorème de Riesz). On peut donc dire que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si, pour tout v dans $H^1(\Omega)$, $\int_\Omega (u_n v + \nabla u_n \cdot \nabla v)\,dx \to \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\,dx$. Mais l'un dans l'autre, la caractérisation de la proposition 8 est plus commode.

La dualité de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est en un sens plus simple. En effet, $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ par définition. Il s'ensuit que toute forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ définit une distribution et une seule. En d'autres termes, on a une injection canonique de $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. On note $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'image de cette injection canonique (c'est un espace de Sobolev d'ordre négatif, que nous n'avons pas défini comme tel ici). Il est clair qu'une distribution T appartient à $W^{-1,p'}(\Omega)$ si et seulement si il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C|\varphi|_{1,p,\Omega},$$

car elle se prolonge alors en une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Poincaré. La norme de T dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, notée $\|T\|_{-1,p',\Omega}$, est la borne inférieure des constantes C pouvant apparaître dans l'inégalité ci-dessus.

On peut également caractériser l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ à l'aide de dérivées partielles premières de fonctions de $L^{p'}(\Omega) = W^{0,p'}(\Omega)$, ce qui explique un peu la notation. Dans le cas $p = 2$, on note $H^{-1}(\Omega)$ le sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$ ainsi identifié à $(H_0^1(\Omega))'$.

Attention : l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, et peut donc être identifié à son dual par l'intermédiaire de son produit scalaire (il suffit de prendre le produit scalaire des gradients par l'inégalité de Poincaré). Cette identification, qui dit que pour toute forme linéaire continue ℓ sur $H_0^1(\Omega)$, il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\ell(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, est tout aussi légitime que la précédente, mais ce n'est pas la même ! En particulier, elle n'est pas compatible avec l'identification de dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même par son produit scalaire, identification qui ne fait guère débat. Par contre, l'identification $(H_0^1(\Omega))' \simeq H^{-1}(\Omega)$ est compatible avec l'identification du dual de L^2 avec lui-même précédente, ainsi que l'identification de L^2 à un sous-espace de $\mathscr{D}'$. En effet, si $T \in L^2(\Omega)$, alors

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega T \varphi\,dx \right| \leq \|T\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} \leq C\|T\|_{0,\Omega} |\varphi|_{1,\Omega},$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'abord, puis celle de Poincaré, montre que $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ canoniquement (alors que L^2 n'est absolument pas inclus dans

H_0^1 !). Quand on utilise H^{-1}, on a donc droit à l'harmonieux diagramme

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$$

où toutes les injections sont continues, denses et canoniques.

Dans la pratique, on préfère le plus souvent $H^{-1}(\Omega)$, pour la raison qui précède, mais il arrive de temps à autre qu'il soit plus avantageux d'utiliser l'identification $(H_0^1(\Omega))' \simeq H_0^1(\Omega)$ du théorème de Riesz. Plus généralement, quand on a affaire à deux espaces de Hilbert $V \hookrightarrow H$ avec injection continue et dense, pour identifier leurs duaux de façon compatible, on procède le plus souvent selon le même schéma

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'.$$

Enfin, au niveau des espaces de traces, on note $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$. Ce n'est pas seulement une notation, c'est aussi un espace de Sobolev fractionnaire négatif sur un hypersurface.

1.6 Formulations variationnelles et leur interprétation

On rappelle le résultat fondamental dans le contexte des EDP elliptiques linéaires, le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 18 *Soit V un espace de Hilbert, ℓ une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire continue sur H telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \text{ (\textit{on dit que a est V-elliptique})}.$$

Alors le problème : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v),$$

admet une solution unique. De plus, l'application qui à ℓ associe u est linéaire continue de V' dans V.

Il s'agit d'un résultat hilbertien abstrait. Pour en déduire des résultats d'existence pour des problèmes aux limites, on doit *interpréter* les problèmes variationnels. Donnons en deux exemples simples.

Tout d'abord, le problème de Dirichlet homogène. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On cherche une fonction u tel que $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, où le second membre f est donné.

On lui associe le problème variationnel suivant : $V = H_0^1(\Omega)$ qui incorpore la condition de Dirichlet homogène, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$ et $\ell(v) = \langle f, v\rangle$ en choisissant $f \in H^{-1}(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram s'applique, la V-ellipticité étant une conséquence immédiate de l'inégalité de Poincaré. En quoi la fonction u ainsi trouvée satisfait-elle le problème aux limites de départ ?

Notons d'abord que $H_0^1(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, donc $-\Delta u$ a un sens en tant que distribution. En fait, on voit facilement que $-\Delta$ est un opérateur continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. En effet, en utilisant la convention de sommation des indices répétés,

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle = -\langle \partial_{ii} u, \varphi\rangle = \langle \partial_i u, \partial_i \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx,$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, par définition de la dérivation au sens des distributions et l'identification des fonctions L^2 à des distributions à l'aide de l'intégrale. Par conséquent,

$$|\langle -\Delta u, \varphi\rangle| \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega},$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On voit donc que $u \mapsto -\Delta u$ est bien continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Comme $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on peut de plus utiliser la formulation variationnelle avec φ comme fonction-test, qui nous dit que $a(u,\varphi) = \ell(\varphi)$ pour en conclure que

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, soit $-\Delta u = f$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ (en fait de $H^{-1}(\Omega)$, espace auquel appartiennent les deux membres de l'égalité). On a donc *interprété* la solution du problème variationnel en termes de problème aux limites.

Réciproquement, supposons que l'on nous donne une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$. En remontant les calculs précédents, ceci signifie que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad a(u,\varphi) = \ell(\varphi).$$

Or, par définition, $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$. Comme a et ℓ sont continues, on passe à la limite et on obtient que u est solution du problème variationnel, donc est l'unique solution donnée par le théorème de Lax-Milgram. En d'autres termes, le problème aux limites n'a pas d'autre solution dans $H_0^1(\Omega)$ que u.

Deuxième exemple un peu plus délicat, le problème de Neumann non homogène, $-\Delta u + u = f$ dans Ω et $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$, où f et g sont donnés. On suppose ici Ω régulier.

On lui associe le problème variationnel suivant :

$$V = H^1(\Omega), a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx \text{ et } \ell(v) = \int_\Omega f v\, dx + \langle g, \gamma_0(v)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}$$

en choisissant $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram s'applique trivialement.

Interprétons ce problème. On commence par obtenir l'EDP à l'intérieur en prenant des fonctions-test dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Le calcul est analogue au précédent et donne

$$\langle -\Delta u + u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire $-\Delta u + u = f$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$. En effet, $\gamma_0(\varphi) = 0$. Réécrivant $-\Delta u = f - u$, on voit que $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ et l'EDP a donc en fait lieu au sens de $L^2(\Omega)$. Maintenant, et à la différence du problème de Dirichlet, $\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

À tout $w \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta w \in L^2(\Omega)$, on associe une forme linéaire $\gamma_1(w)$ continue sur $H^1(\Omega)$, définie par

$$\langle \gamma_1(w), v \rangle = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \Delta w \, dx.$$

Notons que si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\langle \gamma_1(w), \varphi \rangle = 0$, par définition de la dérivation au sens des distributions. Par conséquent, par densité $\langle \gamma_1(w), v \rangle = 0$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On en déduit que la forme linéaire $\gamma_1(w)$ passe au quotient modulo $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire qu'elle est en fait une forme linéaire continue sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. En effet, cet espace est l'image de γ_0 et $H_0^1(\Omega)$ est son noyau. En résumé, on a défini $\gamma_1(w) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ par

$$\langle \gamma_1(w), \gamma_0(v) \rangle = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \Delta w \, dx.$$

De plus, si $w \in C^1(\bar{\Omega})$, la formule de Green montre que $\gamma_1(w) = \frac{\partial w}{\partial n}$. On a donc étendu ainsi de façon naturelle la dérivée normale aux fonctions de H^1 dont le Laplacien est L^2.

Reprenons alors notre problème variationnel, avec une fonction-test v arbitraire dans $H^1(\Omega)$. On peut la réécrire

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \Delta u \, dx + \int_\Omega (u - \Delta u) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, \gamma_0(v) \rangle.$$

Or on a déjà établi que $u - \Delta u = f$ à l'étape précédente. Il vient donc

$$\langle \gamma_1(w), \gamma_0(v) \rangle = \langle g, \gamma_0(v) \rangle,$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Comme l'application trace est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, on en déduit que la condition de Neumann $\gamma_1(u) = g$ est satisfaite au sens de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Naturellement, si on peut établir par ailleurs que u est plus régulière (voir plus loin les résultats de *régularité elliptique*), alors on obtient la forme classique de la condition de Neumann.

Comme dans le cas du problème de Dirichlet, on peut remonter les calculs à partir des relations $-\Delta u + u = f$ et $\gamma_1(u) = g$ avec $u \in H^1(\Omega)$, pour retomber sur l'unique solution du problème variationnel.

Un dernier mot d'avertissement : les formulations du style « on multiplie l'équation par une fonction-test et on intègre par parties… » sont informelles (curieusement, on dit souvent « on multiplie formellement etc. »). Elles sont utiles car elles permettent de guider l'intuition dans la construction de formulations variationnelles mais ne constituent pas des raisonnements rigoureux.

1.7 Appendice : topologies de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

Dans la littérature des équations aux dérivées partielles appliquées, on a l'habitude de passer sous silence la description des topologies de $\mathscr{D}(\Omega)$ et de $\mathscr{D}'(\Omega)$, car il n'est pas crucial de les connaître pour travailler. Les propriétés séquentielles décrites plus haut suffisent amplement. On peut donc sans risque se passer de la lecture de cette section. Néanmoins, on peut aussi être légitimement curieux de ces topologies et avoir envie d'en savoir un peu plus, même si cela demande un peu plus d'efforts, sans devoir absorber la totalité de la théorie abstraite des espaces vectoriels topologiques. Nous avons en effet affaire à des espaces vectoriels topologiques qui ne sont pas des espaces vectoriels normés, mais qui sont munis de topologies plus sophistiquées.

Commençons donc par la notion *d'espace de Fréchet*. On rappelle qu'une semi-norme sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ positivement homogène et satisfaisant l'inégalité triangulaire.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable, croissante de semi-normes sur E telles que pour tout $u \neq 0$ de E, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(u) > 0$. Notons $V_{n,\alpha}(u) = \{v \in E; p_n(v-u) < \alpha\}$ (V pour voisinage, bien sûr). On définit une famille $\mathscr{O}$ de parties de E par

$$U \in \mathscr{O} \iff \forall u \in U, \exists n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, V_{n,\alpha}(u) \subset U.$$

Proposition 9 *La famille $\mathscr{O}$ est une topologie sur E. Cette topologie est métrisable et l'application*

$$d(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} \min(1, p_n(u-v)) \tag{1.2}$$

définit une distance qui engendre cette topologie.

Démonstration. Vérifions les axiomes de topologie. Trivialement, $E \in \mathscr{O}$ et $\emptyset \in \mathscr{O}$, puisque dans ce dernier cas, la condition à remplir est vide.

Soit $(U_i)_{i=1,\ldots,k}$ une famille finie d'éléments de $\mathscr{O}$ et $U = \cap_{i=1}^k U_i$. Soit $u \in U$. Par définition, pour tout $i = 1, \ldots k$, il existe n_i, α_i tels que $V_{n_i,\alpha_i}(u) \subset U_i$. Posons $n = \max\{n_i\} \in \mathbb{N}$ et $\alpha = \min\{\alpha_i\} > 0$. Comme la suite p_n est croissante, les inégalités

$$p_{n_i}(v-u) \leq p_n(v-u) < \alpha \leq \alpha_i,$$

montrent que $V_{n,\alpha}(u) \subset V_{n_i,\alpha_i}(u) \subset U_i$ pour tout i. Par conséquent, $V_{n,\alpha}(u) \subset U$, ce qui implique que $U \in \mathscr{O}$.

Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathscr{O}$ et $U = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Soit $u \in U$. Par définition, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $u \in U_\lambda$. Choisissons le n et α associés à ce U_λ. Trivialement, $V_{n,\alpha}(u) \subset U_\lambda \subset U$ et $U \in \mathscr{O}$.

On donc bien affaire à une topologie. Vérifions qu'elle est métrisable. Pour cela, on s'assure tout d'abord trivialement que la formule (1.2) définit bien une distance sur E. Pour conclure, on doit montrer que tout ouvert de $\mathscr{O}$ contient une boule ouverte non vide associée cette distance et réciproquement. Comme toutes ces notions sont invariantes par translation (c'est bien la moindre des choses dans un espace vectoriel topologique !), il suffit de se placer en $u = 0$.

Donnons nous donc d'abord $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On veut montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $B(0,\beta) \subset V_{n,\alpha}(0)$. Remarquons qu'il suffit de considérer le cas $\alpha < 1$, puisque $V_{n,\alpha}(0) \subset V_{n,\alpha'}(0)$ dès que $\alpha \leq \alpha'$. Prenons $\beta = 2^{-(n+1)}\alpha$. Si $v \in B(0,\beta)$, alors $2^{-(n+1)}\min(1, p_n(v)) < 2^{-(n+1)}\alpha$. Comme $\alpha < 1$, on en déduit que $p_n(v) < \alpha$, c'est-à-dire $y \in V_{n,\alpha}(0)$, d'où $B(0,\beta) \subset V_{n,\alpha}(0)$.

Réciproquement, donnons-nous $\beta > 0$ et considérons la boule $B(0,\beta)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(v,0) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-(k+1)}\min(1, p_k(v)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-(k+1)}\min(1, p_k(v)).$$

Comme $\min(1, p_k(v)) \leq 1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-(k+1)}\min(1, p_k(v)) \leq 2^{-(n+1)}.$$

Choisissons donc n tel que $2^{-(n+1)} < \beta/2$. Comme $\min(1, p_k(v)) \leq p_k(v)$ et que la suite des semi-normes est croissante, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-(k+1)}\min(1, p_k(v)) \leq p_n(v).$$

On choisit alors $\alpha = \beta/2$. On voit donc que, si $v \in V_{n,\alpha}(0)$, alors $d(v,0) \leq p_n(v) + \beta/2 < \beta$, c'est-à-dire $V_{n,\alpha}(0) \subset B(0,\beta)$. $\square$

Définition 2 *On dit qu'un espace vectoriel E muni d'une famille de semi-normes comme ci-dessus est un* espace de Fréchet *s'il est complet pour la distance* (1.2).

Remarque 1 Si la suite des semi-normes est stationnaire, c'est-à-dire s'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p_n = p_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$, alors on vérifie aisément que p_{n_0} est une norme et que cette norme engendre la topologie ci-dessus. On n'a donc introduit quelque chose de nouveau par rapport aux evn, respectivement par rapport aux espaces de Banach dans le cas complet, que si la suite p_n est strictement croissante. □

Remarque 2 Les espaces de Fréchet fournissent un exemple de l'utilité de la notion d'espace métrisable : leur topologie est définie naturellement à l'aide de voisinages. Il se trouve qu'il existe une distance qui engendre cette topologie, mais cette distance n'a rien de canonique. D'ailleurs, on peut en donner d'autres équivalentes. Quand on manipulera un espace de Fréchet, on n'utilisera qu'exceptionnellement la distance de façon explicite. Par contre, on utilisera les semi-normes et les voisinages qui leur sont associés. □

La topologie d'un espace de Fréchet étant métrisable, elle se décrit également à l'aide de suites convergentes. Ces suites admettent elles-mêmes une description fort simple.

Proposition 10 *Soit E un espace muni d'une suite dénombrable, croissante de semi-normes comme plus haut. Une suite u_n tend vers u au sens de E si et seulement si, $p_k(u_n - u) \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Le résultat est presque évident. Une suite u_n tend vers u si et seulement si, pour tout voisinage V de u, il existe n_0 tel que $u_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci a donc lieu si et seulement si, pour tout k et tout $\alpha > 0$, il existe n_0 tel que $u_n \in V_{k,\alpha}(u)$, c'est-à-dire $p_k(u_n - u) < \alpha$ pour tout $n \geq n_0$. □

Naturellement, pour une telle suite, on a $d(u_n, u) \to 0$ et réciproquement, un petit exercice facile si l'on ne sait pas encore que les deux topologies coïncident.

Arrêtons là les généralités sur les espaces de Fréchet pour introduire notre exemple principal dans le contexte des distributions.

Proposition 11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et K un compact de Ω. L'espace*

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \operatorname{supp} u \subset K\}$$

des fonctions indéfiniment différentiables à support dans K, muni de la famille des semi-normes

$$p_n(\varphi) = \max_{|\gamma| \leq n, x \in K} |\partial^\gamma \varphi(x)|, \tag{1.3}$$

est un espace de Fréchet.

Démonstration. On a clairement affaire à une famille dénombrable croissante de semi-normes, et p_0 étant une norme, on a aussi $p_0(\varphi) > 0$ dès que $\varphi \neq 0$. La seule difficulté est la complétude.

Soit donc $\varphi_k \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ une suite de Cauchy. On remarque que p_n est en fait la norme dans $C_K^n(\Omega)$. Si φ_k est de Cauchy dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$, elle est donc a fortiori de Cauchy dans $C_K^n(\Omega)$ pour tout n. Or $C_K^n(\Omega)$ est complet, et $C_K^n(\Omega) \hookrightarrow C_K^{n+1}(\Omega)$. Par conséquent, φ_k converge dans $C_K^n(\Omega)$ vers un φ, lequel est le même pour tous les n. D'après la proposition 10, ceci est équivalent à sa convergence vers φ dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$. □

On remarque au passage que la proposition 10 se traduit dans ce cas particulier par le fait qu'une suite converge dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$ si et seulement si toutes ses dérivées partielles à tous ordres convergent uniformément sur K.

Notons quand même que l'espace $\mathscr{D}_K(\Omega)$ n'est pas un espace normable. Il n'existe aucune norme qui engendre sa topologie d'espace de Fréchet, donc on n'a pas travaillé pour rien. En effet, on a la proposition, un peu surprenante au premier abord, suivante.

Proposition 12 *Les fermés bornés de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ sont compacts.*

Démonstration. On rappelle qu'une partie A d'un espace vectoriel topologique E est bornée si et seulement, pour tout voisinage V de 0, il existe un scalaire λ tel que $A \subset \lambda V$ (on dit que A est absorbé par tout voisinage de 0).

Soit A une partie bornée de $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Pour tout n et tout α, il existe donc $\lambda_{n,\alpha}$ tel que $A \subset \lambda_{n,\alpha} V_{n,\alpha}(0)$. Prenons $\alpha = 1$. On voit donc que

$$\forall\, \varphi \in A, \quad p_n(\varphi) \leq \lambda_n.$$

Par le théorème des accroissements finis, ceci implique que $\partial^\gamma A$ est une partie équicontinue de $C_K^0(\Omega)$ pour tout multi-indice $|\gamma| \leq n-1$, et que $\max_K |\partial^\gamma \varphi| \leq \lambda_n$ pour tout $\varphi \in A$. L'ensemble K étant compact, on applique le théorème d'Ascoli pour en déduire que ces ensembles sont relativement compacts dans $C_K^0(\Omega)$.

Prenons maintenant une suite dans A. Utilisant la remarque si dessus, on en extrait une sous-suite qui converge dans tous les $C_K^n(\Omega)$ par le procédé diagonal. L'ensemble A est donc relativement compact. □

Attention : la notion de partie bornée introduite ci-dessus n'est pas une notion métrique. En fait, la distance d définie plus haut est elle-même bornée. Le diamètre de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est inférieur à 1 pour cette distance, mais ce n'est évidemment pas cela que l'on entend quand on veut parler de partie bornée d'un espace vectoriel topologique. Les deux notions, borné dans un evt et borné au sens de la distance, coïncident par contre dans un evn quand on prend la distance canonique associée à la norme (pas celle de tout à l'heure, qui reste bornée).

Un espace qui a la propriété 12 et qui est réflexif est appelé *espace de Montel*. En raison du théorème de Riesz, un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas un espace de Montel. Or $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est manifestement de dimension infinie. *Attention :* ceci ne signifie pas que $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est localement compact ! En fait, une version plus complète du théorème de Riesz dit qu'un espace vectoriel topologique est localement compact si et seulement si il est de dimension finie. Simplement, ici les fermés-bornés = compacts de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ sont d'intérieur vide.

Il convient enfin de ne pas perdre de vue que, comme $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est de dimension infinie, on peut le munir de plusieurs topologies raisonnables différentes. La topologie que nous avons décrite jusqu'ici est la topologie forte de $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

Identifions maintenant le dual de $\mathscr{D}_K(\Omega)$, que nous noterons $\mathscr{D}'_K(\Omega)$.

Proposition 13 *Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est continue si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C p_n(\varphi), \tag{1.4}$$

si et seulement si, pour toute suite $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$, $\langle T, \varphi_k\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.

Démonstration. La deuxième caractérisation est triviale puisque $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est métrisable. Pour la première, on commence par noter qu'il suffit de considérer la continuité de T en 0 par linéarité. Soit T une forme linéaire qui satisfait (1.4). Comme $\varphi_k \to 0$ implique que $p_n(\varphi_k) \to 0$ pour tout n, on a trivialement $\langle T, \varphi_k\rangle \to 0$.

Réciproquement, soit $T \in \mathscr{D}'_K(\Omega)$. Comme c'est une application continue de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathscr{D}_K(\Omega)$. En particulier, comme $0 \in T^{-1}(]-1,1[)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tels que $V_{n,\alpha}(0) \subset T^{-1}(]-1,1[)$. En termes clairs, ceci signifie que si $p_n(\varphi) < \alpha$, alors $|\langle T, \varphi\rangle| < 1$. Or, si $\varphi \neq 0$, on a $p_n\big(\frac{\alpha\varphi}{2p_n(\varphi)}\big) < \alpha$ par positivité homogène. On en déduit que pour tout φ non nul, $\big|\big\langle T, \frac{\alpha\varphi}{2p_n(\varphi)}\big\rangle\big| < 1$, soit $|\langle T, \varphi\rangle| \leq \frac{2}{\alpha} p_n(\varphi)$ pour tout φ (en effet $0 \leq 0$:-). □

Quelle topologie va-t-on mettre sur $\mathscr{D}'_K(\Omega)$? Encore une fois, on a le choix entre plusieurs possibilités. Le seule susceptible de nous intéresser ici est la topologie faible-étoile. Il s'agit de la topologie la moins fine, c'est-à-dire qui a le moins d'ouverts possible, qui rend continues toutes les applications de la forme $T \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ quand φ parcourt $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

Arrêtons-nous un instant sur cette notion de topologie la moins fine qui etc., d'un point de vue abstrait.

Proposition 14 *Soit X un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une famille de parties de X. Il existe une unique topologie sur X qui est la moins fine de toutes les topologies contenant $\mathscr{A}$. On l'appelle* topologie engendrée par $\mathscr{A}$. *Elle consiste en les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$.*

Démonstration. La topologie discrète contient $\mathscr{A}$. L'intersection d'une famille non vide quelconque de topologies est trivialement une topologie. L'intersection de toutes les topologies contenant $\mathscr{A}$ répond donc à la question.

Décrivons cette topologie plus explicitement. Si elle contient $\mathscr{A}$, elle contient toutes les intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$, par stabilité par intersection finies. Par stabilité par réunion quelconque, elle contient les réunions quelconques de telles intersections finies. Il nous suffit donc de montrer que l'ensemble des réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$ est une topologie.

Soit $\mathscr{O}$ cet ensemble. Il contient manifestement $\emptyset$, X et est stable par réunions quelconques. La seule (petite) difficulté est la stabilité par intersections finies. Il suffit de traiter le cas de deux éléments de $\mathscr{O}$. On se donne donc A_1 et A_2 tels qu'il existe deux ensembles d'indices Λ_1 et Λ_2, et pour chaque $\lambda_i \in \Lambda_i$ un entier p_{λ_i} tels que l'on puisse écrire

$$A_1 = \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \Big(\bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1} \Big), \quad A_2 = \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \Big(\bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2} \Big),$$

avec $u_{k_i} \in A$. On veut montrer que $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{O}$. Posons $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ et

$$B = \bigcup_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda} \Big(\Big(\bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1} \Big) \bigcap \Big(\bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2} \Big) \Big),$$

de telle sorte que $B \in \mathscr{O}$. Soit $x \in A_1 \cap A_2$. Il existe donc $\lambda_1 \in \Lambda_1$ et $\lambda_2 \in \Lambda_2$ tels que $x \in \bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1}$ et $x \in \bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2}$. En d'autres termes, $x \in \big(\bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1}\big) \bigcap \big(\bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2}\big)$. On vient donc de montrer que $A_1 \cap A_2 \subset B$.

Réciproquement, soit $x \in B$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ tel que l'on ait $x \in \big(\bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1}\big) \bigcap \big(\bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2}\big)$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{k_1=1}^{p_{\lambda_1}} U_{k_1}$ et $x \in \bigcap_{k_2=1}^{p_{\lambda_2}} U_{k_2}$, c'est-à-dire $x \in A_1$ et $x \in A_2$. On vient donc de montrer que $B \subset A_1 \cap A_2$. □

Définition 3 *Soit X un ensemble, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque λ, une application $f_\lambda : X \to X_\lambda$. La topologie sur X la moins fine qui rend toutes les applications f_λ continues est appelée* topologie projective *relativement aux $(X_\lambda, f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Cette topologie existe et est unique. En effet, c'est tout simplement la topologie engendrée par la famille d'ensembles $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ où λ parcourt Λ et U_λ parcourt les ouverts de X_λ. Une base de voisinages — c'est-à-dire une famille d'ensembles qui engendrent les ouverts par réunion quelconque — en est donnée par les ensembles de la forme $\bigcap_{k=1}^{p} f_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})$ où U_{λ_k} est un ouvert de X_{λ_k}, d'après la proposition 14.

Les suites convergentes de cette topologie sont également très simples.

Définition 4 *Soit x_n une suite de X muni de la topologie projective. Alors $x_n \to x$ si et seulement si $f_\lambda(x_n) \to f_\lambda(x)$ dans X_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Démonstration. Supposons que $x_n \to x$. Comme chaque f_λ est continue, on en déduit que $f_\lambda(x_n) \to f_\lambda(x)$.

Réciproquement, supposons que $f_\lambda(x_n) \to f_\lambda(x)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donnons nous un voisinage de x pour la topologie projective, que l'on peut prendre de la forme $\bigcap_{k=1}^{p} f_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})$, d'après ce qui précède. Par hypothèse, pour tout $1 \leq k \leq p$, il existe un entier n_k tel que $f_{\lambda_k}(x_n) \in U_{\lambda_k}$ pour tout $n \geq n_k$. Posons $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_p\}$. On voit donc que $x_n \in \bigcap_{k=1}^{p} f_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci montre que $x_n \to x$ pour la topologie projective. □

Trêve d'abstractions, appliquons tout ceci à $\mathscr{D}'_K(\Omega)$. La topologie faible-étoile n'est autre que la topologie projective relative à $\Lambda = \mathscr{D}_K(\Omega)$, $\lambda = \varphi$, $X_\varphi = \mathbb{R}$ et $f_\varphi(T) = \langle T, \varphi \rangle$. Une base de voisinages de 0 en est donnée par les ensembles de la forme $\bigcap_{k=1}^{p}\{T; |\langle T, \varphi_k \rangle| < \varepsilon\}$. Une suite T_n converge vers T pour la topologie faible-étoile si et seulement si $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ (ceci explique aussi pourquoi on parle de topologie de la convergence simple).

Passons maintenant à l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$. On va aller un peu plus vite. Notons tout d'abord que $\mathscr{D}(\Omega)$ est bien un espace vectoriel. En effet, $\operatorname{supp}(\varphi + \psi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\psi)$ et $\operatorname{supp}(\lambda\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi)$ qui sont des compacts de Ω.

Un tout petit peu d'abstraction pour commencer.

Proposition 15 *Soit X un ensemble et $(\mathscr{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille non vide de topologies sur X. Il existe une unique topologie sur X qui est la plus fine de toutes les topologies incluses dans chaque $\mathscr{O}_\lambda$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\mathscr{O} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{O}_\lambda$. □

Un ensemble est un ouvert de $\mathscr{O}$ si et seulement si c'est un ouvert de $\mathscr{O}_\lambda$ pour tout λ.

Définition 5 *Soit X un ensemble, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque λ, une application $f_\lambda : X_\lambda \to X$. La topologie sur X la plus fine qui rend toutes les applications f_λ continues est appelée* topologie inductive *relativement aux $(X_\lambda, f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Cette topologie est bien définie. En effet, soit

$$\mathscr{O}_\lambda = \{U \subset X; f_\lambda^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } X_\lambda\}.$$

C'est clairement une topologie sur X et c'est la plus fine pour laquelle f_λ est continue. On prend l'intersection de toutes ces topologies.

Appliquons ceci à $\mathscr{D}(\Omega)$. On rappelle que l'ouvert Ω admet une suite exhaustive de compacts $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$. Soit $\iota_n \colon \mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ l'injection canonique. On munit $\mathscr{D}(\Omega)$ de la topologie inductive associée à ces données, dont on vérifie qu'elle ne dépend pas du choix de la famille exhaustive de compacts (c'est important). En fait, comme on a aussi des injections $\iota_{nm} \colon \mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \to \mathscr{D}_{K_m}(\Omega)$ pour $n \leq m$ qui commutent avec les injections de départ, puisque les K_n sont ordonnés par l'inclusion, et que la topologie induite sur $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ par celle de $\mathscr{D}_{K_m}(\Omega)$ quand $m \geq n$ coïncide avec la topologie de $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$, on parle dans ce cas de *topologie limite inductive stricte* et l'on note

$$\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}_{K_n}(\Omega).$$

Il s'agit donc de la topologie la plus fine telle que les injections ι_n soient toutes continues. Un ouvert U de $\mathscr{D}(\Omega)$ est par définition un ensemble tel que $U \cap \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ pour tout n, c'est-à-dire

$$U \text{ est ouvert } \Leftrightarrow \forall\, \varphi \in U, \forall\, n \text{ tel que } \operatorname{supp} \varphi \subset K_n; \exists\, p_n, \alpha_n, V_{K_n,p_n,\alpha_n}(\varphi) \subset U,$$

avec une notation évidente $V_{K_n,p,\alpha}(\varphi)$ pour la base de voisinages de $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$. Notons que la suite des topologies $\mathscr{O}_n$ associées à ι_n pour n fixé, et dont on prend l'intersection, est décroissante pour l'inclusion. On impose de plus en plus de restrictions sur les ensembles considérés au fur et à mesure que n augmente. Remarquons aussi qu'un ouvert non vide contient nécessairement des fonctions de support arbitrairement grand : tous les $\mathscr{D}_K(\Omega)$ sont d'intérieur vide dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

La convergence d'une suite dans $\mathscr{D}(\Omega)$ est bien celle donnée par la proposition 1. En effet, si on a une suite φ_k qui satisfait les conditions i) et ii) de cette même proposition 1, il existe n_0 tel que $K \subset K_{n_0}$. La deuxième condition nous dit que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}_{K_{n_0}}(\Omega)$, et la continuité des injections canoniques que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la topologie limite inductive.

Réciproquement, soit $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Démontrons la condition i). Une fois celle-ci acquise, la condition ii) est une trivialité. Il suffit de traiter le cas $\varphi = 0$. En effet, $\operatorname{supp}(\varphi_k - \varphi + \varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi_k - \varphi) \cup \operatorname{supp}(\varphi)$ qui est un compact de Ω. Soit donc U un ouvert qui contient 0. Nous en déduisons qu'il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\varphi_k \in U$.

On va prendre un ouvert U bien choisi. Pour cela, supposons que la condition i) ne soit pas satisfaite. Pour tout m, il existe donc k_m tel que $\operatorname{supp} \varphi_{k_m} \not\subset K_m$ et il existe $x_m \in \Omega \setminus K_m$ tel que $\varphi_{k_m}(x_m) \neq 0$. Soit $\ell(m) = \min\{\ell; x_m \in K_\ell\}$. On pose alors

$$p(\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2 \max_{x \in K_{\ell(m)} \setminus K_m} \left| \frac{\psi(x)}{\varphi_{k_m}(x_m)} \right|.$$

Notons que cette quantité est bien définie sur $\mathscr{D}(\Omega)$, car pour tout ψ à support compact, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la somme. On voit aisément qu'il s'agit en fait d'une semi-norme sur $\mathscr{D}(\Omega)$. On choisit alors

$$U = \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega); p(\psi) < 1\}.$$

C'est bien un ouvert de $\mathscr{D}(\Omega)$, puisque sur $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ la semi-norme p est manifestement équivalente à la semi-norme p_0 (encore une fois, seul un nombre fini de termes entrent en jeu). On a bien $0 \in U$, mais $p(\varphi_{k_n}) \geq 2$, ce qui implique que $\varphi_{k_n} \notin U$, contradiction.

Pour conclure sur l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$, on note qu'il n'est pas normable car une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Montel est un espace de Montel.

Parlons enfin de son dual, l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$. De façon duale à ce que l'on a vu plus haut, on a une application de restriction $r_n \colon \mathscr{D}^*(\Omega) \to \mathscr{D}^*_{K_n}(\Omega)$ définie par $\langle r_n T, \varphi\rangle = \langle T, \iota_n \varphi\rangle$ (il s'agit ici des duaux *algébriques*, sans condition de continuite). La définition de la topologie limite inductive implique que T est continue si et seulement si $r_n T$ est continue pour tout n, c'est-à-dire d'après la proposition 13, la condition 2. En effet, T est continue si et seulement si pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}$, $T^{-1}(\omega)$ est ouvert, c'est-à-dire si et seulement si $T^{-1}(\omega) \cap \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ est ouvert dans $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ pour tout n.

Pour la condition 3, prenons T telle que $\langle T, \varphi_k\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ dès que $\varphi_k \to \varphi$. En particulier, cela est vrai pour toutes les suites à support dans K_n. Comme $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ est métrisable, on a donc que $r_n T$ est continue, pour tout n.

On munit enfin $\mathscr{D}'(\Omega)$ de la topologie projective associée aux restrictions r_n et aux espaces $\mathscr{D}'_{K_n}(\Omega)$ munis de leur topologie faible-étoile. Comme les K_n sont ordonnés par inclusion, on parle de *topologie limite projective* et l'on note

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \varprojlim \mathscr{D}'_{K_n}(\Omega).$$

Par les propriétés générales des topologies projectives, une suite de distributions T_k converge vers T si et seulement si $r_n T_k \to r_n T$ dans $\mathscr{D}'_{K_n}(\Omega)$ pour tout n. On en déduit immédiatement la proposition 4, d'après ce que l'on a vu plus haut de la convergence dans $\mathscr{D}'_{K_n}(\Omega)$.

On a ainsi à peu près balayé toutes les propriétés pratiques des distributions.