Approximations variationnelles des E.D.P.

Vivette Girault – DEA 2005-2006

I. Rappels d'analyse fonctionnelle

Convention. Dans ce cours, on travaillera dans des ouverts de $I\!R^d$, et dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, la dimension d sera quelconque.

• **Ouverts lipschitziens.**

Définition intuitive. Un ouvert Ω est lipschitzien s'il est borné et si au voisinage de tout point sur la frontière, la frontière peut être localement paramétrée par une fonction φ lipschitzienne, le domaine se trouvant localement d'un seul côté de la frontière. Cette définition n'est pas rigoureuse parce qu'elle ne précise pas comment sont les voisinages, que veut dire localement d'un seul côté de la frontière, etc.
Important. Un ouvert lipschitzien est borné, la mesure de sa frontière est finie et il est toujours localement d'un seul côté de sa frontière. Exemples: polygones en dimension 2, presque tous les polyèdres en dimension 3. Exemples d'ouverts non-lipschitziens: ceux dont la frontière a un ou des points de rebroussement (car au point de rebroussement, la frontière ne peut pas être paramétrée par une seule fonction), un ou des points cuspides (pour la même raison), des ouverts avec fissures (car le domaine se trouve des deux côtés de la fissure).

Notation. On note $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal unitaire sur la frontière $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω.

• **Ouverts de classe $\mathcal{C}^{m,1}$.** Même définition, mais on remplace φ fonction lipschitzienne par φ fonction de classe $\mathcal{C}^m$, dont les dérivées d'ordre m sont lipschitziennes. Un ouvert lipschitzien correspond à $m = 0$. Noter que $\boldsymbol{n}$ n'est pas continue si la frontière a un point anguleux, mais que $\boldsymbol{n}$ est continue dès que $m \geq 1$.

Convention. Dans tout ce cours, pour simplifier, on ne considèrera que des ouverts lipschitziens, à l'exception de l'espace entier $I\!R^d$, et ce dernier cas sera mentionné explicitement.

• **Notions de base sur les distributions.**

Définition de $\mathcal{D}(\Omega)$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables dans Ω et à support compact dans Ω (*i.e.* pour chaque φ il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que φ est nulle en dehors de K).

Exemple: on pose $|\boldsymbol{x}| = (\sum_{i=0}^d x_i^2)^{1/2}$, et

$$\rho(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{1}{1-|\boldsymbol{x}|^2}} \text{ si } |\boldsymbol{x}| \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ ailleurs}.$$

On vérifie facilement que cette fonction appartient à $\mathcal{D}(B(0;1+\varepsilon))$ pour tout $\varepsilon > 0$, où $B(0;1+\varepsilon)$ désigne la boule de centre 0 et rayon $1+\varepsilon$.

On rappelle que pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x} < \infty \, .$$

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions v mesurables telles que

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \text{ess} \, |v(\boldsymbol{x})| < \infty \, .$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{0,p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x}\Big)^{1/p} \, ,$$

ou si $p = \infty$,

$$\|v\|_{0,\infty,\Omega} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \text{ess} \, |v(\boldsymbol{x})| \, ,$$

c'est un espace de Banach; il est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1 admis. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout p avec $1 \leq p < \infty$.*

Il est facile de comprendre pourquoi ceci n'a pas lieu dans $L^\infty(\Omega)$: si c'était vrai, comme $L^\infty(\Omega)$ a la même norme que $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, alors ces deux espaces seraient égaux.

Définition de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Si Ω est borné c'est $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et dans ce cas c'est différent de $\mathcal{D}(\Omega)$. Exception intéressante: $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

"Topologie" sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Une suite φ_j de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ si:

(i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ qui contient tous les supports des φ_j;

(ii) Quand $j \to \infty$, les dérivées de tous les ordres de φ_j convergent uniformément sur K vers les dérivées correspondantes de φ. Noter que l'uniformité ne porte pas sur l'ordre des dérivées.

Définition: espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$. C'est l'espace des fonctionnelles linéaires et continues pour la topologie ci-dessus sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(i) l'application $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ est linéaire;

(ii) si $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_j \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Par définition, deux distributions T_1 et T_2 sont égales si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ , \ \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \, .$$

Exemples.

La masse de Dirac $\delta_{\boldsymbol{a}}$ pour $\boldsymbol{a} \in \Omega$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \delta_{\boldsymbol{a}}, \varphi \rangle = \varphi(\boldsymbol{a})\,.$$

La distribution T_f pour f dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Théorème 1.2 admis. *Deux fonctions f et g de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définissent la même distribution $T_f = T_g$ ssi elles sont égales pp. Conséquence: on peut identifier f et T_f et on écrit:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Conséquence. Les distributions sont une généralisation des fonctions et le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une généralisation du produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Définition: convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Une suite T_j de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle\,.$$

Ceci s'appelle convergence au sens des distributions. Application: la convergence dans $L^2(\Omega)$ entraine la convergence au sens des distributions, mais la réciproque est fausse.

Remarque. Dans tout ce cours, on identifiera $L^2(\Omega)$ à son dual. Alors, on a la situation suivante

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle\,.$$

On peut étendre cette définition aux dérivées d'ordre supérieur. Soit $m = (m_1, m_2, \cdots, m_d)$ un multi-entier et $|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_d$ sa longueur. On définit $\partial^m T = \frac{\partial^{|m|} T}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_d^{m_d}}$ par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \partial^m T, \varphi \rangle = (-1)^{|m|} \langle T, \partial^m \varphi \rangle\,.$$

Théorème 1.3 (exercice). *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ses dérivées de tous les ordres appartiennent à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\partial^m T_j \to \partial^m T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Exemples.

Dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ d'une fonction f de $\mathcal{C}^1(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$$
$$= -\int_\Omega f\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \varphi\, d\boldsymbol{x}\,,$$

car φ est à support compact dans Ω. Donc la distribution $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coincide avec la dérivée usuelle.

Dérivée de la masse de Dirac $\delta_{\boldsymbol{a}}$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \frac{\partial \delta_{\boldsymbol{a}}}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle \delta_{\boldsymbol{a}}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\,.$$

Donc $\frac{\partial \delta_a}{\partial x_i}$ est la distribution qui à φ associe la valeur $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Dérivée de la fonction de Heaviside H dans $\mathbb{R}$:

$$H(x) = 1 \ \text{ si } x \geq 0 \quad \text{ et } \quad H(x) = 0 \ \text{ si } x < 0\,,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ,\ \langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle\,.$$

Donc au sens des distributions, $H' = \delta_0$.

• **Les espaces de Sobolev.**

Définition: $H^1(\Omega)$**.**

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)\,;\, \nabla v \in L^2(\Omega)^d\}, \quad \text{où } \nabla v \text{ est pris au sens des distributions.}$$

Produit scalaire:

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ ((u,v))_{1,\Omega} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v)\,,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)^d$. Norme associée:

$$\forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ \|v\|_{1,\Omega} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} = ((v,v))_{1,\Omega}^{1/2}\,,$$

semi-norme

$$\forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ |v|_{1,\Omega} = \|\nabla v\|_{0,\Omega}\,,$$

où $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$.

Exemple dans $\mathbb{R}$, la fonction “chapeau”:

$$v(x) = 1 + x \ \text{ si } x \in [-1,0]\ ,\ v(x) = 1 - x \ \text{ si } x \in [0,1]\ ,\ v(x) = 0 \ \text{ ailleurs}\,.$$

Au sens des distributions,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I\!R)\ ,\ \langle v', \varphi \rangle = -\langle v, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^{0} (1+x)\,\varphi'\,dx - \int_{0}^{1} (1-x)\,\varphi'\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} \varphi\,dx - \int_{0}^{1} \varphi\,dx\,.$$

Définissons la fonction w par

$$w(x) = 1 \ \text{ si } x \in [-1, 0]\ ,\ w(x) = -1 \ \text{ si } x \in [0, 1]\ ,\ w(x) = 0 \ \text{ ailleurs}\,.$$

Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I\!R)\ ,\ \langle v', \varphi \rangle = \langle w, \varphi \rangle\,.$$

Donc, au sens des distributions, $v' = w$. Or $w \in L^2(I\!R)$. Donc $v \in H^1(I\!R)$. Cette fonction est continue car on est en dimension un, mais en dimension $d \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas forcément continues.

Exemple en dimension 2 de fonction de $H^1(\Omega)$ **discontinue**. Soit Ω la boule ouverte $B(0; 1)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ un réel et

$$v(\boldsymbol{x}) = |\log(|\boldsymbol{x}|)|^{\alpha}\,.$$

On vérifie que v est dans $H^1(B(0; 1))$, mais que v n'est pas bornée au voisinage de 0.

Théorème 1.4. *$H^1(\Omega)$ est un Hilbert.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $H^1(\Omega)$ est complet. Soit v_n une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$. Alors, v_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et ∇v_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)^d$. Comme ces deux espaces sont complets, il existe une fonction v dans $L^2(\Omega)$ et un vecteur $\boldsymbol{w}$ dans $L^2(\Omega)^d$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \ \text{ dans } L^2(\Omega) \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} \nabla v_n = \boldsymbol{w} \ \text{ dans } L^2(\Omega)^d\,.$$

Il faut montrer que $\boldsymbol{w} = \nabla v$. D'une part, comme la convergence dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

D'après le Théorème 1.3, ceci entraine que

$$\lim_{n\to\infty} \nabla v_n = \nabla v \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^d\,.$$

De même,

$$\lim_{n\to\infty} \nabla v_n = \boldsymbol{w} \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^d\,.$$

L'unicité de la limite entraine que $\boldsymbol{w} = \nabla v$. $\diamondsuit$

Théorème 1.5 admis. *$H^1(\Omega)$ est séparable.*

Facile à démontrer si on admet que $L^2(\Omega)$ est séparable.

Théorème 1.6 admis. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Facile à démontrer quand $\Omega = \mathbb{R}^d$. Difficile dans le cas général à cause de la frontière.

Ce théorème de densité a des conséquences importantes.

• Il permet de définir la trace des fonctions de $H^1(\Omega)$ sur la frontière $\partial\Omega$. On commence par énoncer une inégalité sur les valeurs au bord des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.7 admis. *Il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ , \ \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{1,\Omega} \, . \tag{1.1}$$

Notation. On note $\gamma_0\varphi$ la restriction à $\partial\Omega$ des valeurs de φ.
L'application γ_0 est linéaire et continue de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ muni de la norme de $L^2(\partial\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on peut prolonger cette application à $H^1(\Omega)$. L'application prolongée, qui se note encore γ_0, s'appelle la trace, applique $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et vérifie l'inégalité (1.1) avec la même constante. En fait l'application γ_0 n'est pas surjective et parcourt un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$.

Définition, espace image de la trace. L'espace image de γ_0 est $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (on verra à la fin de cette section la signification de l'exposant $1/2$). C'est un espace de Hilbert pour la norme:

$$\|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = \mu} \|v\|_{1,\Omega} \, . \tag{1.2}$$

Avec cette définition et (1.2), on peut améliorer (1.1):

$$\forall v \in H^1(\Omega) \ , \ \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{1,\Omega} \, . \tag{1.3}$$

Remarque importante. L'application trace n'est pas définie pour les fonctions de $L^2(\Omega)$.

• Toujours grâce à la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on peut démontrer la formule de Green pour les fonctions de $H^1(\Omega)$:

$$\forall u \in H^1(\Omega) \ , \ \forall v \in H^1(\Omega) \ , \quad \int_\Omega u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\boldsymbol{x} = - \int_\Omega v \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, d\sigma \, ,$$

où n_i est la $i$ème composante de $\boldsymbol{n}$.

Définition de $H^1_0(\Omega)$.

$$H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \, ; \, \gamma_0 v = 0 \} \, .$$

Remarque. Si Ω est lipschitzien, $H^1_0(\Omega) \neq H^1(\Omega)$. Mais si $\Omega = I\!R^d$, alors $H^1_0(I\!R^d) = H^1(I\!R^d)$.

Théorème 1.8 admis. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$.*

Théorème 1.9 admis (L'inégalité de Poincaré). *On suppose que Ω est borné dans une direction. Il existe une constante $\mathcal{P}$ telle que*

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \ , \ \|v\|_{0,\Omega} \leq \mathcal{P}\|\nabla\, v\|_{0,\Omega} \, ,$$

i.e. la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H^1_0(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Pour cette raison, on prend souvent $|\cdot|_{1,\Omega}$ comme norme sur $H^1_0(\Omega)$. On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H^1_0(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme duale

$$\|f\|_{-1,\Omega} = \sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{|v|_{1,\Omega}} \, ,$$

où les crochets désignent la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$. Du fait de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$, on peut identifier les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ à des distributions. On dit alors que $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de distributions. Ceci justifie les crochets pour noter la dualité.

Exemple. Si $v \in L^2(\Omega)$, alors $\nabla v \in H^{-1}(\Omega)^d$.

Théorème 1.10 admis (Caractérisation de $H^{-1}(\Omega)$). *Tout élément de $H^{-1}(\Omega)$ s'écrit de manière non-unique sous la forme:*

$$f = f_0 + \Sigma_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, ,$$

où $f_i \in L^2(\Omega)$ pour $0 \leq i \leq d$.

Définition. On note $(H^1(\Omega))'$ le dual de $H^1(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme duale:

$$\|f\|_{(H^1(\Omega))'} = \sup_{v\in H^1(\Omega), v\neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \, .$$

On définit aussi la convergence faible dans $H^1(\Omega)$:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \ \text{ dans } \ H^1(\Omega) \text{ faible si } \ \forall f \in (H^1(\Omega))' \ , \ \lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(v) \, .$$

Théorème 1.11 admis (Analogue du Théorème de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$.*

Remarque. Si Ω est lipschitzien, $(H^1(\Omega))'$ est différent de $H^{-1}(\Omega)$ et ne s'identifie pas à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Exemple, l'application $v \mapsto \int_{\partial\Omega} v\, d\sigma$ est dans $(H^1(\Omega))'$, mais est nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, alors que ce n'est évidemment pas l'application nulle. On dit que $(H^1(\Omega))'$ n'est pas un espace de distributions. Par contre, si $\Omega = I\!R^d$, alors $(H^1(I\!R^d))' = H^{-1}(I\!R^d)$.

- Les espaces $H^m(\Omega)$, $m \in I\!N$:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)\,;\, \forall \text{multi-entier } k \in I\!N^d, 1 \le |k| \le m, \partial^k v \in L^2(\Omega)\}$$
$$= \{v \in H^{m-1}(\Omega)\,;\, \forall \text{multi-entier } k \in I\!N^d, |k| = m, \partial^k v \in L^2(\Omega)\}\,.$$

Norme:

$$\forall v \in H^m(\Omega)\ ,\ \|v\|_{m,\Omega} = (\sum_{|k|=0}^{m} \sum \|\partial^k v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}\,,$$

semi-norme:

$$\forall v \in H^m(\Omega)\ ,\ |v|_{m,\Omega} = (\sum_{|k|=m} \|\partial^k v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}\,.$$

Exemple quand $m = 2$:

$$H^2(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\,;\, \text{pour toutes les dérivées d'ordre } 2, \partial^2 v \in L^2(\Omega)\}\,.$$

Norme:

$$\forall v \in H^2(\Omega)\ ,\ \|v\|_{2,\Omega} = (\|v\|_{1,\Omega}^2 + \sum \|\partial^2 v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}\,,$$

semi-norme:

$$\forall v \in H^2(\Omega)\ ,\ |v|_{2,\Omega} = (\sum \|\partial^2 v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}\,.$$

Théorème 1.12 (exercice). *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.13 admis. *$H^m(\Omega)$ est séparable.*

Théorème 1.14 admis. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Cette densité permet de définir les traces d'ordre supérieur des fonctions de $H^m(\Omega)$ sur $\partial\Omega$. Exemple important: la dérivée normale $\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ sur $\partial\Omega$:

$$\forall v \in H^2(\Omega)\ ,\ \gamma_1 v = \nabla v \cdot \boldsymbol{n}\,.$$

On démontre que $\gamma_1 v \in L^2(\partial\Omega)$ pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$ et on a la formule de Green pour le Laplacien:

$$\forall u \in H^2(\Omega)\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega)\ ,\quad \int_\Omega \Delta u\, v\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma\,.$$

Définition de $H_0^2(\Omega)$.

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega)\,;\, \gamma_0 v = 0 \ \text{ et } \gamma_1 v = 0\}\,.$$

Théorème 1.15 admis. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\Omega)$.*

Notation. On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ le dual de $H_0^2(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\Omega)$, $H^{-2}(\Omega)$ est un espace de distributions.

Théorème 1.16 admis Extension de l'inégalité de Poincaré. *Il existe une constante $\mathcal{B}$ telle que*

$$\forall v \in H_0^2(\Omega)\ ,\ \|v\|_{2,\Omega} \leq \mathcal{B}\|\Delta\, v\|_{0,\Omega}\,,$$

i.e. la semi-norme $\|\Delta\cdot\|_{0,\Omega}$ est une norme sur $H_0^2(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{2,\Omega}$.

Remarque. De même que l'application γ_0 n'est pas définie pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, l'application γ_1 n'est pas définie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. En particulier, on ne peut pas définir l'espace:

$$\{v \in H^1(\Omega)\,;\, \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}\,.$$

Rappel. Une application d'un espace A dans un espace B est compacte si elle transforme toute suite bornée de A en une suite dont on peut extraire une sous-suite qui converge dans B.

Théorème 1.17 admis Les injections de Sobolev. *Pour $d \geq 2$, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue pour tout nombre réel p qui satisfait à la fois $1 \leq p < \infty$ et $p \leq p_0$, où p_0 vérifie $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$ et cette injection est compacte pour tout $p < p_0$. Pour $d \geq 1$, l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^n(\overline{\Omega})$ est continue pour tout n et m, tels que $\frac{1}{2} < \frac{m-n}{d}$.*

Application. Si $d = 1$ on trouve bien que $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, car $\frac{1}{2} < 1$, mais c'est faux si $d = 2$, qui est le cas limite. Si $d = 2$, $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et l'injection est compacte pour tout p, mais si $d = 3$, $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout $p \leq 6$ et l'injection est compacte pour tout $p < 6$. Conséquence, si $d = 2$, de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$ pour tout p et si d est quelconque, de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$, car $p_0 > 2$, quel que soit d.

Notation. Pour tout entier $k \geq 0$, $I\!P_k$ est l'espace des polynômes à d variables de degré total inférieur ou égal à k. Pour tout entier m, puisque Ω est borné, $I\!P_k \subset H^m(\Omega)$ et on peut définir l'espace quotient $H^m(\Omega)/I\!P_k$, qui est un espace de Hilbert pour la norme quotient

$$\|f\|_{H^m(\Omega)/I\!P_k} = \inf_{p \in I\!P_k} \|f + p\|_{m,\Omega}\,.$$

Théorème 1.18 de Deny-Lions. *On suppose que Ω est lipschitzien et connexe. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante C telle que*

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k \ , \ \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq C|v|_{k+1,\Omega} \, . \tag{1.4}$$

Démonstration : 1. La première des choses est de se débarrasser de la norme quotient dans (1.4). Pour cela, il suffit de construire un représentant convenable de la classe de v. Soit Π l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbb{P}_k$ pour la norme de $L^2(\Omega)$: pour tout $v \in L^1(\Omega)$, $\Pi v \in \mathbb{P}_k$ est défini par

$$\forall q \in \mathbb{P}_k \ , \ \int_\Omega (\Pi v - v) \, q \, d\boldsymbol{x} = 0 \, .$$

C'est un système linéaire carré dont la dimension est celle de $\mathbb{P}_k$. Il admet une solution unique, Πv. De plus, Πv vérifie $\Pi(\Pi v) = \Pi v$ et $\|\Pi v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{0,\Omega}$. Alors

$$\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq \|v - \Pi v\|_{k+1,\Omega} = \{\|v - \Pi v\|_{k,\Omega}^2 + |v|_{k+1,\Omega}^2\}^{1/2} \, .$$

Comme $\Pi(v - \Pi v) = 0$, il suffit de montrer qu'il existe une contante D telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega) \ , \quad \text{telle que } \Pi v = 0 \ , \ \|v\|_{k,\Omega} \leq D|v|_{k+1,\Omega} \, , \tag{1.5}$$

et on aura (1.4) avec $C = (1 + D^2)^{1/2}$.

2. On démontre (1.5) par l'absurde. Si (1.5) est faux, on peut construire une suite v_n de $H^{k+1}(\Omega)$ telle que $\Pi v_n = 0$ et telle que

$$\lim_{n\to\infty} |v_n|_{k+1,\Omega} = 0 \ \text{ et } \ \|v_n\|_{k,\Omega} = 1 \, .$$

Comme v_n est bornée dans $H^{k+1}(\Omega)$, grâce à une extension du Théorème 1.11, on peut extraire de v_n une sous-suite, encore notée v_n, qui converge faiblement dans $H^{k+1}(\Omega)$ (en fait le Théorème 1.11 est valable pour des espaces de Banach réflexifs): il existe v dans $H^{k+1}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \ \text{ faiblement dans } H^{k+1}(\Omega) \, .$$

Mais $\Pi v_n = 0$, *i.e.* $\int_\Omega v_n \, q \, d\boldsymbol{x} = 0$ pour tout q dans $\mathbb{P}_k$. Donc, en passant à la limite faible dans cette égalité, on a $\int_\Omega v \, q \, d\boldsymbol{x} = 0$ pour tout q dans $\mathbb{P}_k$, ce qui veut dire que $\Pi v = 0$. D'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \partial^{k+1} v_n = 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \, .$$

Mais $\partial^{k+1} v_n$ converge faiblement vers $\partial^{k+1} v$ dans $L^2(\Omega)$. L'unicité de la limite entraine que $\partial^{k+1} v = 0$. Alors (grâce à un résultat difficile), ceci entraine que $v \in \mathbb{P}_k$. Donc $\Pi v = v$, et comme $\Pi v = 0$, ceci entraine $v = 0$.

Enfin, comme l'injection de $H^{k+1}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$ est compacte (ce qui est une extension facile du Théorème 1.17), quitte à extraire une sous-suite, v_n converge vers $v = 0$ dans $H^k(\Omega)$. Ceci contredit le fait que $\|v_n\|_{k,\Omega} = 1$. $\diamondsuit$

Remarques sur les hypothèses. La contradiction ne s'obtient qu'à la fin, quand on se sert de la compacité de l'injection. Si on n'a pas cette compacité, on ne peut rien conclure. Cette injection est fausse si Ω n'est pas borné et l'énoncé du théorème est faux dans ce cas car aucun polynôme de $I\!P_k$ n'appartient à $L^2(\Omega)$.

La connexité de Ω permet de conclure que si $\partial^{k+1}v = 0$ alors $v \in I\!P_k$. Si Ω n'est pas connexe, les polynômes ne sont pas les mêmes dans chaque composante connexe de Ω et l'énoncé du théorème est faux.

• **Les espaces de Sobolev dans L^p et les espaces fractionnaires.** Pour $m \geq 1$ entier et $1 \leq p \leq \infty$ réel,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega)\,;\, \partial^k v \in L^p(\Omega), 1 \leq |k| \leq m\}\,.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{|k|=1}^{m} \sum_{k} \|\partial^k v\|_{0,p,\Omega}^p\Big)^{1/p}\,,$$

où la somme sur k porte sur tous les multi-entiers de longueur $|k|$; et pour $p = \infty$, c'est un Banach pour la norme

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega} = \sup_{1\leq |k|\leq m} \sup_{k} \|\partial^k v\|_{0,\infty,\Omega}\,.$$

On définit aussi la semi-norme

$$|v|_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{|k|=m} \|\partial^k v\|_{0,p,\Omega}^p\Big)^{1/p}\,.$$

Soit $1 \leq p < \infty$, $s = m + \sigma$, où $m \geq 0$ est un entier et $0 < \sigma < 1$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $v \in W^{m,p}(\Omega)$ telles que

$$\forall k, |k| = m\,, \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^k v(\boldsymbol{x}) - \partial^k v(\boldsymbol{y})|^p}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{d+\sigma p}} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} < \infty\,.$$

C'est un espace de Banach pour la norme:

$$\|v\|_{s,p,\Omega} = \{\|v\|_{m,p,\Omega}^p + \sum_{|k|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^k v(\boldsymbol{x}) - \partial^k v(\boldsymbol{y})|^p}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{d+\sigma p}} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}\}^{1/p}\,. \tag{1.6}$$

On a une définition analogue si $p = \infty$.

L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dont la norme est définie par (1.2) correspond à $m = 0$ et $\sigma = 1/2$ sur $\partial\Omega$ au lieu de Ω, donc avec $d-1$ au lieu de d. On montre que pour ces valeurs, les normes définies par (1.2) et (1.6) sont équivalentes, avec des constantes qui dépendent du domaine.

II. Quelques problèmes variationnels

•Problème variationnel abstrait. Soit V un espace de Hilbert sur $I\!R$, de norme $\|\cdot\|$, de dual V' et de norme duale $\|\cdot\|_*$:

$$\forall f \in V' \ , \ \|f\|_* = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|} \, .$$

Soit a une forme bilinéaire sur $V \times V$ et ℓ un élément de V'. On pose le problème:

Pour ℓ donné dans V', chercher $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V \ , \ a(u,v) = \ell(v) \, . \tag{2.1}$$

Lemme 2.1 de Lax-Milgram. *On suppose que a est continue sur $V \times V$ et V-elliptique: il existe une constante M et une constante $\alpha > 0$ telles que*

$$\forall u \in V \ , \ \forall v \in V \ , \ a(u,v) \leq M\|u\|\|v\| \, , \tag{2.2}$$

$$\forall v \in V \ , \ a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \, . \tag{2.3}$$

Alors le problème (2.1) a une solution unique u et

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_* \, ,$$

i.e. l'application $u \mapsto \ell$ est un isomorphisme de V sur V'.

Démonstration:

Unicité et majoration. Grâce à l'ellipticité, le problème (2.1) admet au plus une solution et si une solution existe, elle vérifie la majoration ci-dessus. En effet, s'il y a deux solutions, leur différence, disons w, est solution de (2.1) avec un second membre nul et (2.3) entraine que $w = 0$. De même, s'il existe une solution, disons u, alors en particulier $a(u,u) = \ell(u)$ et (2.3) entraine que

$$\alpha\|u\|^2 \leq \ell(u) \leq \|\ell\|_*\|u\| \, .$$

Existence dans le cas symétrique. Si l'application a est bilinéaire, symétrique, continue et elliptique, elle est un produit scalaire sur V et la norme associée $[v]_a = a(v,v)^{1/2}$ est une norme sur V équivalente à la norme de V. Alors, d'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe un unique élément $f_\ell \in V$ tel que

$$\forall v \in V \ , \ \ell(v) = a(f_\ell, v) \, .$$

Donc, f_ℓ est la solution cherchée et l'application $f_\ell \mapsto \ell$ est une bijection de V sur V', continue ainsi que son inverse; c'est donc un isomorphisme. La démonstration dans le cas non symétrique est admise. $\diamondsuit$

Remarque. Comme V et V' sont deux Banach, il suffit qu'une des applications soit continue; l'inverse l'est automatiquement.

Cas symétrique: relation avec un problème de minimisation. On définit la fonctionnelle

$$\forall v \in V \ , \ J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$$

et le problème de minimisation

$$\text{Chercher } u \in V \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in V} J(v) \, . \tag{2.4}$$

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses (2.2), (2.3) et si la forme a est symétrique, le problème (2.4) admet une solution unique qui est la solution de (2.1).*

Démonstration : La fonctionnelle J est deux fois dérivable:

$$J'(v).w = \frac{1}{2}[a(w,v) + a(v,w)] - \ell(w) = a(w,v) - \ell(w) \, ,$$

$$J''(v).(w,s) = a(w,s)$$

donc $J''(v).(w,w) = a(w,w)$, constante positive (si $w \neq 0$) qui ne dépend pas de v; donc J est strictement convexe sur V. De plus, J est coercive sur V car

$$J(v) \geq [\frac{1}{2}\alpha\|v\| - \|\ell\|_*]\|v\| \to \infty \ \text{ quand } \|v\| \to \infty \, .$$

Ces deux propriétés font que J a un minimum unique sur V qui est atteint au point où la dérivée de J s'annule

$$\forall w \in V \ , \ J'(u).w = 0 \ , \ \text{ i.e. } a(u,w) - \ell(w) = 0 \, ,$$

et u est bien la solution de (2.1). $\diamondsuit$

- **Exemples.** Problème de Dirichlet homogène pour le Laplacien.

Pour f *donné dans* $H^{-1}(\Omega)$, *chercher* u *tel que*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et } u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{2.5}$$

Essayons de trouver une formulation variationnelle pour ce problème. Comme le second membre n'est pas régulier, on ne cherche pas une solution classique (*i.e.* de classe $\mathcal{C}^2$), mais dans un espace où les dérivées sont définies au sens des distributions. Puisque Δu est dans $H^{-1}(\Omega)$, on peut essayer de chercher u dans $H^1(\Omega)$ et donc dans $H_0^1(\Omega)$ puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Prenons v dans $H_0^1(\Omega)$. La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ entraine que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \forall w \in H^1(\Omega)\ ,\ \langle -\Delta w, v\rangle = (\nabla w, \nabla v)\,.$$

Donc, si u est une solution de (2.5) dans $H^1(\Omega)$, alors u est aussi une solution de la formulation variationnelle:

Chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\ ,\ (\nabla u, \nabla v) = \langle f, v\rangle\,. \tag{2.6}$$

Réciproquement, soit u une solution de (2.6) et prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle f, \varphi\rangle\ = (\nabla u, \nabla\varphi) = -\langle \Delta u, \varphi\rangle\,,$$

donc au sens des distributions,

$$-\Delta u = f\,,$$

et comme $f \in H^{-1}(\Omega)$, cette égalité a lieu dans $H^{-1}(\Omega)$. On a donc montré que la formulation variationnelle (2.6) est équivalente à chercher u dans $H^1(\Omega)$, solution de (2.5). Pour résoudre ce problème, il faut montrer que la formulation variationnelle (2.6) a une solution unique. Vérifions les hypothèses du Lemme de Lax-Milgram avec $V = H_0^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$, $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$ et $\ell(v) = \langle f, v\rangle$. $H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ (équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ grâce à l'inégalité de Poincaré) et $(\nabla u, \nabla v)$ est le produit scalaire associé à cette norme. Donc les hypothèses (2.2) et (2.3) ont lieu avec $M = 1$ et $\alpha = 1$ et le problème (2.6) a une solution unique u et

$$|u|_{1,\Omega} \le \|f\|_{-1,\Omega}\,. \tag{2.7}$$

Conclusion: L'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Quand f est plus régulière, la solution u a aussi plus de régularité, mais ce sont des résultats difficiles. En voici quelques-uns.

Théorème 2.3 admis.

1) On suppose que Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ou que Ω est un polygone ou un polyèdre convexe. Alors l'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$.

2) On suppose que Ω est un polygone quelconque en dimension deux. Pour chaque t tel que $1 < t \leq 4/3$, l'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $W^{2,t}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^t(\Omega)$.

3) On suppose que Ω est un polyèdre Lipschitz en dimension trois. L'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^{3/2}(\Omega)$.

Conséquence: Sous les hypothèses du Théorème 2.3, 1) il existe une constante C telle que

$$\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ ,\ \|u\|_{2,\Omega} \leq C\|\Delta\, u\|_{0,\Omega}\,.$$

Ce résultat est faux si Ω est un polygone ou un polyèdre avec un coin rentrant, *i.e.* il existe des seconds membres f pour lesquels la solution de (2.5) n'est pas dans $H^2(\Omega)$. De plus, ce résultat est optimal en ce sens que si Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ou un polygone ou un polyèdre convexe, il existe des solutions u qui ne sont pas plus régulières que $H^2(\Omega)$ même si f est plus régulière. Enfin, on a des estimations analogues correpondant aux parties 2) et 3) du Théorème 2.3.

En plus on est dans le cas symétrique et on peut interpréter (2.5) comme un problème de minimisation. Soit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\ ,\ J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 - \langle f, v\rangle\,.$$

La solution u de (2.5) est l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ qui réalise le minimum de $J(v)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Enfin, on considère le problème non-homogène:

Pour f donné dans $H^{-1}(\Omega)$ et g donné dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, chercher $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega \ \text{ et } u = g \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{2.8}$$

Remarquons d'abord que ce problème a au plus une solution. On veut se ramener au problème homogène. Puisque $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$, il existe $u_g \in H^1(\Omega)$ tel que $u_g = g$ sur $\partial\Omega$, (u_g s'appelle un relèvement de g dans Ω). Posons $u_0 = u - u_g$; alors (2.8) équivaut au problème homogène:

Chercher $u_0 \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$-\Delta u_0 = f + \Delta u_g \ \text{ dans } \Omega \ \text{ et } u_0 = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{2.8'}$$

Comme $\Delta u_g \in H^{-1}(\Omega)$, ce problème a une solution unique u_0. Donc $u = u_0 + u_g$ est solution de (2.8) et comme (2.8) a au plus une solution, cette solution est unique et ne dépend pas du choix du relèvement u_g. Puisque

$$\|\Delta u_g\|_{-1,\Omega} \le \|\nabla u_g\|_{0,\Omega} = |u_g|_{1,\Omega}\,,$$

l'inégalité (2.7) donne:

$$|u_0|_{1,\Omega} \le \|f\|_{-1,\Omega} + \|\Delta u_g\|_{-1,\Omega} \le \|f\|_{-1,\Omega} + |u_g|_{1,\Omega}\,.$$

Donc pour tout relèvement u_g de g,

$$\|u\|_{1,\Omega} \le \|u_0\|_{1,\Omega} + \|u_g\|_{1,\Omega} \le (\mathcal{P}^2+1)^{1/2}\|f\|_{-1,\Omega} + ((\mathcal{P}^2+1)^{1/2}+1)\|u_g\|_{1,\Omega}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,\Omega} &\le (\mathcal{P}^2+1)^{1/2}\|f\|_{-1,\Omega} + ((\mathcal{P}^2+1)^{1/2}+1)\inf_{\gamma_0 v = g}\|v\|_{1,\Omega}\\ &\le (\mathcal{P}^2+1)^{1/2}\|f\|_{-1,\Omega} + ((\mathcal{P}^2+1)^{1/2}+1)\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Conclusion: L'application $u \mapsto (-\Delta u, \gamma_0 u)$ est un isomorphisme de $H^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$.

- Problème de Neumann homogène pour le Laplacien:

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$ *chercher* u *tel que*

$$-\Delta u = f \;\text{ dans } \Omega \;\text{ et }\; \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

Il faut d'abord donner un sens à la dérivée normale. On a vu que $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ n'est pas défini si u est seulement dans $H^1(\Omega)$, mais ici on a en plus que $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Théorème 2.4 admis. *Soit* $v \in H^1(\Omega)$ *tel que* $\Delta v \in L^2(\Omega)$. *Alors on peut définir* $\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ *sur* $\partial\Omega$ *et* $\gamma_1 v \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, *le dual de* $H^{1/2}(\partial\Omega)$. *De plus, la formule de Green pour le Laplacien est valable.*

Maintenant, on remarque que ce problème n'a pas toujours de solution. En effet, supposons qu'une solution u existe et intégrons (2.9) sur Ω (ce qui est possible car f et donc $-\Delta u$ sont dans $L^2(\Omega)$):

$$-\int_\Omega \Delta u\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Puisque la formule de Green est valable pour Δu:

$$-\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, 1\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega f\, d\boldsymbol{x}\,,$$

et (2.9) entraine que $\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = 0$. Donc, pour qu'une solution existe, il faut ajouter la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{2.10}$$

Ensuite, on remarque que même si une solution existe, elle n'est jamais unique, car (2.9) ne varie pas si on remplace u par $u+c$. Donc, au lieu de chercher u dans $H^1(\Omega)$, on cherche u dans $H^1(\Omega)/I\!R$ et on peut donc préciser (2.9):

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$ *vérifiant*

$$\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = 0\,, \tag{2.10}$$

chercher $u \in H^1(\Omega)/I\!R$ *tel que*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et } \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

Pour trouver une formulation variationnelle, on prend le produit scalaire de (2.9) par une fonction v de $H^1(\Omega)$ et on applique la formule de Green pour le Laplacien. En tenant compte de la condition sur la frontière, on trouve la formulation variationnelle

Chercher $u \in H^1(\Omega)/I\!R$ *tel que*

$$\forall v \in H^1(\Omega)/I\!R\ ,\ (\nabla u, \nabla v) = (f, v)\,. \tag{2.11}$$

Remarquons que cette équation a aussi lieu pour tout $v \in H^1(\Omega)$ car le premier membre ne change pas si on ajoute une constante à v et grâce à (2.10), le second membre ne change pas non plus. Réciproquement, soit u une solution de (2.11). Prenons d'abord $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ -\langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle\,.$$

Donc, au sens des distributions

$$-\Delta u = f\,,$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et cette égalité a lieu pp dans Ω. Il reste à retrouver la condition sur la frontière. On prend le produit scalaire de cette dernière équation avec $v \in H^1(\Omega)$ et on applique la formule de Green:

$$\forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ (\nabla u, \nabla v) - \langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, v\rangle_{\partial\Omega} = (f, v)\,.$$

En comparant avec (2.11), il reste

$$\forall v \in H^1(\Omega)\ , \langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, v\rangle_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Puisque $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et que v parcourt tout l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$, ceci entraine que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc, le problème aux limites (2.9), (2.10) est équivalent à la formulation variationnelle (2.11).

Appliquons le Lemme de Lax-Milgram à (2.11). On a $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$ et $\ell(v) = (f,v)$. D'une part V est un espace de Hilbert pour la norme quotient $\inf_{c\in\mathbb{R}} \|v+c\|_{1,\Omega}$. D'autre part, le Théorème de Deny-Lions, appliqué avec $k=0$, entraine que la semi-norme $|v|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ équivalente à la norme quotient $\inf_{c\in\mathbb{R}} \|v+c\|_{1,\Omega}$. On prend donc la semi-norme $|v|_{1,\Omega}$ comme norme sur V. Alors la forme a est le produit scalaire associé à cette norme et elle est continue et elliptique sur V avec $M=1$ et $\alpha=1$. Enfin, grâce à la condition (2.10), la forme $\ell(v)$ est bien définie sur V et

$$\begin{aligned}\forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ |(f,v)| = |(f,v+c)| &\le \|f\|_{0,\Omega}\|v+c\|_{0,\Omega}\ ,\ \forall c \in \mathbb{R}\\ &\le \|f\|_{0,\Omega} \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v+c\|_{0,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}|v|_{1,\Omega}\,.\end{aligned}$$

Donc ℓ appartient au dual: $(H^1(\Omega)/\mathbb{R})'$ et

$$\|\ell\|_* \le C\|f\|_{0,\Omega}\,,$$

où C est la constante du Théorème de Deny-Lions.

Conclusion: Le problème de Neumann homogène (2.9), (2.10) a une solution unique u et $|u|_{1,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}$.

Contrairement au problème de Dirichlet, le problème de Neumann ne peut pas être posé avec un second membre arbitraire dans $H^{-1}(\Omega)$ car dans ce cas, la dérivée normale n'a pas de sens. De plus la formulation variationnelle (2.11) n'est pas valable, car on ne peut prendre que la dualité avec les éléments de $H_0^1(\Omega)$ et en appliquant la formule de Green, on perd le terme de bord. Cependant, il peut être posé avec un second membre dans $L^p(\Omega)$ pour $p > 1$ en dimension deux et $p \ge 6/5$ en dimension trois; ceci est une conséquence des injections de Sobolev du Théorème 1.17. Enfin, on a en particulier les résultats de régularité suivants.

Théorème 2.5 admis.

1) On suppose que Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ou que Ω est un polygone ou un polyèdre convexe. Alors la solution u de (2.9), (2.10) appartient à $H^2(\Omega)$, avec dépendance continue sur la donnée.

2) On suppose que Ω est un polygone quelconque en dimension deux. Pour chaque t tel que $1 < t \le 4/3$, si $f \in L^t(\Omega)$ alors $u \in W^{2,t}(\Omega)$, avec dépendance continue sur la donnée.

Conclusion: Sous les hypothèses du Théorème 2.5 1) il existe une constante C, qui ne dépend pas de u telle que $|u|_{2,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}$.

Les remarques faites plus haut concernant l'influence des coins sur la régularité de la solution sont aussi valables pour le problème de Neumann homogène.

• Problème de Neumann non-homogène pour le Laplacien:

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$ *et* g *donné dans* $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, *chercher* $u \in H^1(\Omega)/I\!R$ *tel que*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{2.12}$$

Ici aussi il faut une condition de compatibilité pour que la solution existe. Supposons qu'une solution u existe, intégrons (2.12) sur Ω et appliquons la formule de Green:

$$-\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, 1\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega f\, d\boldsymbol{x}\,.$$

La condition au bord dans (2.12) entraine que $\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = -\langle g, 1\rangle_{\partial\Omega}$. Donc, pour qu'une solution existe, il faut ajouter la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = -\langle g, 1\rangle_{\partial\Omega}\,. \tag{2.13}$$

De même, il faut chercher u dans l'espace quotient $H^1(\Omega)/I\!R$ pour assurer l'unicité de la solution et la formulation variationnelle s'obtient comme pour le problème homogène. On prend le produit scalaire de (2.12) par $v \in H^1(\Omega)$ et on applique la formule de Green:

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}\,.$$

D'où la formulation variationnelle:

Chercher $u \in H^1(\Omega)/I\!R$ *tel que:*

$$\forall v \in H^1(\Omega)/I\!R\,,\ (\nabla u, \nabla v) = (f, v) + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}\,. \tag{2.14}$$

De même que pour (2.11), cette égalité vaut pour tout $v \in H^1(\Omega)$. La réciproque se démontre comme pour le problème homogène. D'où l'équivalence du problème aux limites (2.12), (2.13) avec la formulation variationnelle (2.14). Appliquons le Lemme de Lax-Milgram à (2.14). Ici, $\ell(v) = (f, v) + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}$. Grâce à la condition (2.13), la forme $\ell(v)$ est bien définie sur $V = H^1(\Omega)/I\!R$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|(f, v) + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}| &= |(f, v+c) + \langle g, v+c\rangle_{\partial\Omega}| \\
&\le \|f\|_{0,\Omega}\|v+c\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\|v+c\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
&\le \|f\|_{0,\Omega}\|v+c\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\|v+c\|_{1,\Omega}\,,\ \forall c \in I\!R \\
&\le (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}) \inf_{c\in I\!R} \|v+c\|_{1,\Omega} \\
&\le C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)})|v|_{1,\Omega}\,,
\end{aligned}$$

où C est la constante du Théorème de Deny-Lions avec $k = 0$. Donc ℓ appartient au dual: $(H^1(\Omega)/\mathbb{R})'$ et

$$\|\ell\|_* \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)})\,.$$

Conclusion: Le problème de Neumann non-homogène (2.12), (2.13) a une solution unique u et $|u|_{1,\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)})$. Comme la forme a est symétrique, le problème (2.14) (de même que le problème (2.11)) est aussi un problème de minimisation. On prend

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 - (f, v) - \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}\,,$$

et la solution u de (2.14) est l'unique élément de $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ qui réalise le minimum de $J(v)$ sur $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Enfin, on a en particulier le résultat de régularité suivant.

Théorème 2.6 admis. *On suppose que Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ et que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors la solution u de (2.12), (2.13) appartient à $H^2(\Omega)$.*

Conclusion: Si Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, il existe une constante C, indépendante de u telle que

$$|u|_{2,\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})\,.$$

Remarques. 1. La condition au bord du problème de Dirichlet s'appelle "condition essentielle" parce qu'elle est imposée aux fonctions de l'espace. La condition au bord du problème de Neumann s'appelle "condition naturelle", parce qu'elle découle implicitement de la formulation variationnelle et n'est pas imposée aux fonctions de l'espace. De ce fait, le problème non-homogène de Neumann a une formulation variationnelle directe obtenue en rajoutant la contribution du terme de bord au second membre. Par contre, le problème non-homogène de Dirichlet n'a pas de formulation variationnelle directe, car on ne peut pas imposer la condition $\gamma_0 v = g$ au fonctions de l'espace (ce n'est plus un espace vectoriel): il faut relever la condition au bord et se ramener au problème homogène.

2. On peut toujours résoudre le problème variationnel:

Pour ℓ donné dans $(H^1(\Omega)/\mathbb{R})'$, chercher u dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}\ ,\ (\nabla u, \nabla v) = \ell(v)\,.$$

Par exemple, on peut avoir $\ell(v) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \nabla\, v\, d\boldsymbol{x}$ où $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$. Il est facile de vérifier par le Lemme de Lax-Milgram que ce problème a une solution unique u et que u satisfait l'estimation

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|\ell\|_*\,,$$

où on a munit $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$. Mais la difficulté est l'interprétation de ce problème.

• Problème mêlé de Dirichlet-Neumann homogène pour le Laplacien. On suppose que $\partial\Omega$ est la réunion de deux parties disjointes: Γ_1 et Γ_2, chacune de mesure non-nulle.

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$, *chercher* $u \in H^1(\Omega)$ *tel que:*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad , \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \,. \tag{2.15}$$

On introduit l'espace

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\,;\, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}\,.$$

Théorème 2.7 admis (Extension de l'inégalité de Poincaré). *Si la mesure de* Γ_1 *est non-nulle, la semi-norme* $|v|_{1,\Omega}$ *est une norme sur* $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ *équivalente à la norme de* $H^1(\Omega)$*: il existe une constante* $\mathcal{P}_1$ *telle que*

$$\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \ , \ \|v\|_{0,\Omega} \le \mathcal{P}_1 \|\nabla v\|_{0,\Omega}\,.$$

Pour mettre (2.15) sous forme variationnelle, on prend le produit scalaire de (2.15) avec $v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ et on applique la formule de Green. En tenant compte des deux conditions au bord, il reste

$$\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \ , \ (\nabla u, \nabla v) = (f, v)\,. \tag{2.16}$$

Réciproquement, soit $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ une solution de (2.16). En choisissant d'abord $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on trouve

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega\,,$$

d'abord au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et ensuite pp dans Ω puisque $f \in L^2(\Omega)$. Ensuite, en prenant le produit scalaire de cette équation avec $v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ (ce qui est valable puisque $\Delta u \in L^2(\Omega)$), en appliquant la formule de Green et en comparant avec (2.16), il reste

$$\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \ , \ -\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, v\rangle_{\Gamma_2} = 0\,.$$

On admet (ce qui est vrai) que ceci entraine que $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ sur Γ_2. D'où l'équivalence entre le problème aux limites (2.15) et la formulation variationnelle:

Chercher $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$, *tel que:*

$$\forall v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \ , \ (\nabla u, \nabla v) = (f, v)\,. \tag{2.16}$$

Appliquons le Lemme de Lax-Milgram à (2.16). On prend $V = H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$, muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$. C'est un espace de Hilbert grâce à l'extension de l'inégalité de Poincaré. On prend $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$ et $\ell(v) = (f,v)$. Alors les hypothèses du Lemme de Lax-Milgram sont satisfaites avec $M = 1$, $\alpha = 1$ et $\|\ell\|_* \le \mathcal{P}_1 \|f\|_{0,\Omega}$.

Conséquence. Le problème (2.16) a une solution unique u et on a la majoration

$$|u|_{1,\Omega} \leq \mathcal{P}_1 \|f\|_{0,\Omega} .$$

De plus, comme la forme a est symétrique, on peut interpréter (2.16) comme un problème de minimisation. Soit

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 - (f, v) .$$

Alors u est l'unique élément de $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ qui minimise $J(v)$ sur $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$.

Exercice. Enoncer un résultat semblable pour le problème mêlé de Dirichlet-Neumann non-homogène.

Contrairement aux problèmes de Dirichlet et de Neumann, et quelque soit la régularité de la frontière, il existe des seconds membres f dans $L^2(\Omega)$ pour lesquels la solution u du problème mêlé de Dirichlet-Neumann n'est pas dans $H^2(\Omega)$. Il y a une exception lorsque Ω est un rectangle et que la frontière commune entre Γ_1 et Γ_2 se trouve sur un ou plusieurs angles du rectangle. Dans ce cas, toutes les solutions sont dans $H^2(\Omega)$.

• Problème de Dirichlet homogène pour le bi-Laplacien:

Pour f donné dans $H^{-2}(\Omega)$, chercher $u \in H^2(\Omega)$ tel que:

$$\Delta^2 u = f \ \text{ dans } \Omega \ , \ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega . \tag{2.17}$$

Pour le mettre sous forme variationnelle, prenons le produit de dualité de (2.17) avec $v \in H^2_0(\Omega)$. La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2_0(\Omega)$ entraine que

$$\forall v \in H^2_0(\Omega) \ , \ \forall w \in H^2(\Omega) \ , \ \langle \Delta^2 w, v\rangle = (\Delta w, \Delta v) .$$

D'où la formulation variationnelle:

Chercher $u \in H^2_0(\Omega)$ tel que:

$$\forall v \in H^2_0(\Omega) \ , \ (\Delta u, \Delta v) = \langle f, v\rangle . \tag{2.18}$$

L'équivalence de (2.18) avec (2.17) est une conséquence immédiate de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2_0(\Omega)$. Appliquons le Lemme de Lax-Milgram. Prenons $V = H^2_0(\Omega)$, muni de la norme $\|\Delta v\|_{0,\Omega}$, qui est une norme équivalente à la norme $\|v\|_{2,\Omega}$. La forme $a(u, v) = (\Delta u, \Delta v)$ est le produit scalaire associé à cette norme et $\ell(v) = \langle f, v\rangle$. Donc les hypothèses du Lemme de Lax-Milgram sont satisfaites avec $M = 1$, $\alpha = 1$ et $\|\ell\|_* = \|f\|_{H^{-2}(\Omega)}$, où la norme duale correspond à la norme $\|\Delta v\|_{0,\Omega}$ de $H^2_0(\Omega)$. Donc (2.18) a une solution unique $u \in H^2_0(\Omega)$ et $\|\Delta u\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{H^{-2}(\Omega)}$. De plus, comme la forme a est symétrique, u est l'unique fonction de $H^2_0(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}\|\Delta v\|^2_{0,\Omega} - \langle f, v\rangle$ dans $H^2_0(\Omega)$.

Non-unicité de la formulation variationnelle. La formulation variationnelle n'est jamais unique. Reprenons par exemple le problème de Neumann pour le Laplacien:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,, \tag{2.9}$$

où f est donné dans $L^2(\Omega)$ avec $\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = 0$. On aura besoin de l'espace des fonctions à valeurs vectorielles

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d\,;\, \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\}\,.$$

On peut démontrer que la trace normale $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ sur $\partial\Omega$ a un sens pour les fonctions de $H(\mathrm{div};\Omega)$, elle appartient à $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et la formule de Green suivante est valable:

$$\forall \boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,,\, \forall w \in H^1(\Omega)\ ,\ \int_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\, w\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\nabla w\, d\boldsymbol{x} + \langle(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}), w\rangle_{\partial\Omega}\,.$$

Ceci permet de définir l'espace

$$H_0(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,;\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}\,.$$

Maintenant, soit u la solution de (2.9) et posons $\boldsymbol{z} = \nabla u$. Alors $\boldsymbol{z} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)$ avec $\mathrm{div}\,\boldsymbol{z} = \Delta u$ et la formule de Green donne

$$\forall \boldsymbol{w} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)\ ,\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = -(u, \mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\,.$$

Remarquons que dans cette égalité, le fait que u soit dans $H^1(\Omega)$ n'intervient pas et qu'elle a un sens pour u seulement dans $L^2(\Omega)$. On prend le couple $(\boldsymbol{z}, u)$ pour inconnue et on considère la formulation variationnelle:

Chercher un couple $(\boldsymbol{z}, u)$ *dans* $H_0(\mathrm{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\forall v \in L^2(\Omega)\ ,\ -(\mathrm{div}\,\boldsymbol{z}, v) = (f, v)\,,\\ &\forall \boldsymbol{w} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)\ ,\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = -(u, \mathrm{div}\,\boldsymbol{w})\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

On vient de voir que si u est la solution de (2.9), alors le couple $(\nabla u, u)$ est solution de (2.19). Réciproquement, soit $(\boldsymbol{z}, u)$ une solution de (2.19). Prenons dans la deuxième équation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{t} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$. Alors

$$(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = -(u, \mathrm{div}\,\boldsymbol{t}) = \langle\nabla u, \boldsymbol{t}\rangle\,,$$

donc au sens des distributions

$$\boldsymbol{z} = \nabla u\,.$$

Comme $\boldsymbol{z} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)$, ceci entraine que $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta\, u \in L^2(\Omega)$ et que $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$. Alors la première égalité donne

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{z} = f = -\Delta u\,,$$

et u est la solution de (2.9).
Remarquons que la condition au bord $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ se traduit ici par $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ et qu'elle est devenue une condition essentielle. C'est possible car on utilise ici le fait que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors qu'on ne l'utilise pas dans la formulation variationnelle (2.11).

Non-existence de la formulation variationnelle. Il y a des problèmes qui n'ont pas de formulation variationnelle. Par exemple, soit Ω le carré $]-1,1[\times]-1,1[$ et considérons le problème

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$ *chercher* u *tel que:*

$$-\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega\,,$$

$$u = 0 \ \text{ sur les trois côtés } x=-1, x=+1, y=-1 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \ \text{ sur le côté } y=-1\,.$$

Noter qu'il y a deux conditions sur le côté $y = -1$ et aucune condition sur le côté $y = +1$. Si on essayait de le mettre sous forme variationnelle, pour imposer la condition $u = 0$ on chercherait u dans l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\,;\, v = 0 \ \text{ sur } x=-1, x=+1, y=-1\}\,,$$

et pour éliminer le terme de bord sur le côté $y = +1$, on prendrait le produit scalaire de $-\Delta u = f$ par $v \in H_0^1(\Omega)$. Mais cette formulation ne permettrait pas de retrouver la condition $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ sur le côté $y = -1$.

Sur l'importance du choix de l'espace. Le choix de l'espace joue un rôle primordial dans l'énoncé d'un problème aux limites dans ce sens qu'un changement d'espace, parfois d'apparence anodine, peut modifier considérablement l'ensemble des solutions. Voici un exemple. 0n considère le problème

$$-\Delta u = 0 \ \text{ dans } \Omega\ , \ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\,,$$

où Ω est la boule unité privée du premier quadrant, dans le plan :

$$\Omega = B(0;1) \setminus (x > 0 \cap y > 0)\,.$$

Si on pose ce problème dans $H^1(\Omega)$, sa seule solution est $u = 0$. Mais si on pose ce problème dans $L^2(\Omega)$, alors il a un espace vectoriel de solutions (non-nulles) de dimension un, qui évidemment ne sont pas dans $H^1(\Omega)$. L'existence de ces solutions singulières est due au coin rentrant (donc non-convexe) à l'origine.

III. Théorie abstraite de l'approximation variationnelle interne

On veut approcher le problème (2.1):

Pour ℓ donné dans V' chercher u dans V tel que:

$$\forall v \in V \ , \ a(u,v) = \ell(v) \, ,$$

en faisant les hypothèses du Lemme de Lax-Milgram: V est un Hilbert, la forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$ et elliptique sur V:

$$\begin{aligned} \forall u \in V \, , \forall v \in V \ , \ a(u,v) &\leq M\|u\|\|v\| \, , \\ \forall v \in V \ , \ a(v,v) &\geq \alpha \|v\|^2 \, . \end{aligned}$$

• Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers 0 et pour chaque h soit V_h un sous-espace de V de dimension finie. Le problème approché est

Chercher $u_h \in V_h$ tel que:

$$\forall v_h \in V_h \ , \ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \, . \tag{3.1}$$

Remarque. Il y a deux mots clés: sous-espace et dimension finie. La dimension finie est une manière de discrétiser le problème. Et cette discrétisation est interne parce que l'espace discret est un sous-espace de V. Lorsque V_h n'est pas un sous-espace de V, la discrétisation est externe.

Soit $N(h)$ la dimension de V_h et $(\theta_i)_{i=1}^{N(h)}$ une base de V_h ; (3.1) est un système linéaire carré de dimension $N(h)$, dont les inconnues sont les composantes de u_h dans la base des (θ_i). On le développe: $u_h = \sum_{j=1}^{N(h)} u_j \, \theta_j$ et (3.1) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{N(h)} u_j a(\theta_j, \theta_i) = \ell(\theta_i) \ , \ 1 \leq i \leq N(h) \, . \tag{3.2}$$

Soit A la matrice et b le second membre de ce système linéaire; alors $A_{i,j} = a(\theta_j, \theta_i)$ et $b_i = \ell(\theta_i)$.

L'hypothèse d'ellipticité entraine l'existence et l'unicité de la solution de (3.2). Mais c'est une hypothèse beaucoup trop forte, car comme on est en dimension finie, il suffit par exemple que pour tout v_h de V_h, $a(v_h, v_h) = 0$ entraine $v_h = 0$.

Remarque. Si la forme a est symétrique, la matrice A l'est aussi:

$$A_{i,j} = a(\theta_j, \theta_i) = a(\theta_i, \theta_j) = A_{j,i} \, .$$

Comme de plus a est elliptique, alors A est définie positive:

$$\forall \boldsymbol{u} \in I\!R^{N(h)}\ , \forall \boldsymbol{v} \in I\!R^{N(h)}\ ,\ (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} A_{i,j} u_j v_i = \sum_{i=1}^{N(h)} a(\sum_{j=1}^{N(h)} \theta_j u_j, \theta_i) v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N(h)} a(u, \theta_i) v_i = a(u, v)\,.$$

Donc $(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = a(v, v) > 0$ pour tout $v \neq 0$, donc pour tout $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Lemme 3.1 de Céa. *Sous les hypothèses du Lemme de Lax-Milgram, on a la majoration d'erreur:*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|\,, \tag{3.3}$$

i.e. l'erreur de discrétisation du problème (2.1) est du même ordre que l'erreur d'approximation de V par V_h.

Démonstration: Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre $v = v_h \in V_h$ dans (2.1):

$$\forall v_h \in V_h\ ,\ a(u, v_h) = \ell(v_h)\,.$$

La soustraction avec (3.1) donne

$$\forall v_h \in V_h\ ,\ a(u - u_h, v_h) = 0\,.$$

Donc

$$\forall v_h \in V_h\,,\ a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)\,.$$

La continuité et l'ellipticité de a donnent

$$\forall v_h \in V_h\,,\ \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|\,. \qquad \diamondsuit$$

• **Propriétés souhaitables des espaces discrets.** La discrétisation provient uniquement du choix de l'espace V_h, puisque c'est la seule chose qui différencie le problème discret du problème continu.

1. L'espace V_h doit approcher l'espace V avec une bonne précision. Comme V est un espace de dimension infinie, ceci entraine obligatoirement que $N(h) \to \infty$ quand $h \to 0$. Donc on a en général affaire à des systèmes de grande dimension.

2. L'espace V_h doit avoir une base $(\theta_i)_{i=1}^{N(h)}$ facile à employer et telle que les coefficients $a(\theta_j, \theta_i)$ de la matrice et $\ell(\theta_i)$ du second membre soient faciles à calculer. Puisqu'elle est de grande taille, il est souhaitable que la matrice soit creuse et bien conditionnée pour résoudre le système linéaire efficacement.

IV. Eléments finis de Lagrange "triangulaires" de $\mathbb{R}^d$

• **Description de la méthode des éléments finis.** Les méthodes les plus utilisées en pratique pour résoudre les équations aux dérivées partielles sont les méthodes de différences finies, les méthodes d'éléments finis et les méthodes de volumes finis. Ces trois méthodes sont étroitement liées.

Dans les exemples concrets, V est un espace de fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et la forme a ainsi que le second membre ℓ font intervenir des intégrales des fonctions et de leurs dérivées. La méthode des éléments finis consiste à partitionner Ω en un "grand" nombre de "petits" morceaux de forme simple, appelés éléments. L'ensemble de ces éléments s'appelle un maillage. Par "petit" on veut dire que leur taille, qui est liée au paramètre h, n'est pas bornée inférieurement et par "grand" on veut dire que leur nombre, qui est lié à $N(h)$ n'est pas borné supérieurement. La restriction des fonctions de V_h à chaque élément est un polynôme ou une transformée d'un polynôme de degré borné et même généralement assez petit. Le degré des polynômes est englobé dans les constantes et toute l'analyse numérique se fait par rapport au paramètre h tendant vers 0. Noter que la méthode des éléments finis passe obligatoirement par une formulation variationnelle.

Le principe de la discrétisation par les méthodes de différences finies et les méthodes de volumes finis est semblable, en ce sens qu'elles retiennent la partition du domaine en un "grand" nombre de "petits" morceaux, mais ni l'une ni l'autre ne demande que le problème à résoudre se mette nécessairement sous forme variationnelle. Pour les comparer, considérons le problème modèle de Dirichlet pour le Laplacien en dimension deux:

$$-\Delta\, u = f \quad \text{dans } \Omega \;,\;\; u = 0 \;\; \text{sur } \partial\Omega \,.$$

Dans la méthode de différences finies, la partition de Ω en "petits" morceaux s'obtient en recouvrant Ω par une grille parallèle aux axes. Les "petits" morceaux sont les carrés ou les rectangles, à l'intérieur de Ω, formés par cette grille. On dit que le maillage est rectangulaire. La méthode est évidemment plus facile à appliquer si les côtés de Ω sont aussi parallèles aux axes, sinon, il faut approcher la frontière par des segments du maillage, ou bien faire une discrétisation spéciale au voisinage de la frontière. Ensuite en chaque noeud intérieur du maillage, on approche le Laplacien par un schéma aux différences finis, tel que le schéma à cinq points; c'est à dire, on cherche un ensemble de valeurs discrètes, $u_h(a)$ en tout noeud a numéroté par le couple d'entiers (i, j), du maillage telles que

$$-\Delta_h\, u_h(a) = f(a) \;\text{ en chaque noeud } a \text{ du maillage intérieur à } \Omega \,,$$
$$u_h(a) = 0 \;\text{ en chaque noeud } a \text{ du maillage sur le bord } \partial\Omega \,,$$

où (en supposant pour simplifier que le maillage est carré)

$$\Delta_h\, u_h(a) = \frac{1}{h^2}[u_h(i+1, j) + u_h(i-1, j) + u_h(i, j+1) + u_h(i, j-1) - 4\, u_h(i, j)] \,.$$

Dans la méthode de volumes finis, la partition du domaine en "petits" morceaux est quelconque. Désignons ces morceaux ou mailles par Ω_h. La discrétisation s'obtient en intégrant l'équation dans chaque Ω_h, en appliquant la formule de Green:

$$-\int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma = \int_{\Omega_h} f\, d\boldsymbol{x}$$

et en discrétisant $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ au moyen d'une inconnue discrète par maille Ω_h, disons $u_h(c)$, où c désigne par exemple le centre de Ω_h. En plus, il faut ajouter des noeuds sur le bord $\partial\Omega$ où on impose la condition essentielle $u = 0$.

Lorsque le problème à résoudre a une formulation variationnelle, on peut montrer que la grande majorité des méthodes de différences finies se déduisent de méthodes d'éléments finis où les intégrales sont calculées par une formule de quadrature convenable. C'est moins évident en ce qui concerne les méthodes de volumes finis, mais on pense aussi que c'est vrai pour nombre d'entre elles. Compte tenu de ces remarques, on privilégie dans ce cours les méthodes d'éléments finis car on dispose de beaucoup plus d'outils mathématiques pour en faire l'étude théorique que pour étudier des deux autres méthodes.

Dans la méthode des éléments finis la plus simple, les éléments sont des d-simplexes et les fonctions sont des polynômes.

• **L'espace $I\!P_k$.** Rappelons que c'est l'espace des polynômes à d variables de degré total inférieur ou égal à k.

Exemple. $I\!P_3$ quand $d = 2$ est engendré par:

$$1\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_1^2\,,\ x_2^2\,,\ x_1x_2\,,\ x_1^3\,,\ x_1^2x_2\,,\ x_1x_2^2\,,\ x_2^3\,,$$

$$\dim(I\!P_k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\,.$$

Exemple. $I\!P_2$ quand $d = 3$ est engendré par:

$$1\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_1^2\,,\ x_2^2\,,\ x_3^2\,,\ x_1x_2\,,\ x_1x_3\,,\ x_2x_3\,,$$

$$\dim(I\!P_k) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)\,.$$

• **Le d-simplexe T.** C'est la généralisation d'un triangle. En dimension $d = 2$, soit $\boldsymbol{a}^1 = (a_1^1, a_2^1)$, $\boldsymbol{a}^2 = (a_1^2, a_2^2)$, $\boldsymbol{a}^3 = (a_1^3, a_2^3)$ trois points non-alignés; T est le triangle passant par ces trois sommets. Dire qu'ils sont non-alignés veut dire que le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est non-nul. En le développant on trouve que

$$\det(M) = (a_1^2 - a_1^1)(a_2^3 - a_2^1) - (a_1^3 - a_1^1)(a_2^2 - a_2^1) = \pm 2|T|\,.$$

De même en dimension $d = 3$, soit $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ et $\boldsymbol{a}^4$ quatre points qui ne sont pas dans un même plan; T est le tétraèdre passant par ces quatre sommets. Dans le cas général, soient $\boldsymbol{a}^1 = (a_j^1)_{j=1}^d$,$\ldots$, $\boldsymbol{a}^d = (a_j^d)_{j=1}^d$, $\boldsymbol{a}^{d+1} = (a_j^{d+1})_{j=1}^d$, $d+1$ points de $I\!R^d$ qui ne sont pas dans un même hyperplan. Le d-simplexe T est l'enveloppe convexe de ces points, *i.e.* le plus petit convexe passant par ces points. Dire que ces points ne sont pas dans un même hyperplan veut dire que le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{d+1} \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_d^1 & a_d^2 & \ldots & a_d^{d+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

est non-nul. On dit que dans ce cas, le d-simplexe T est non-dégénéré.

Coordonnées barycentriques. Le d-simplexe T peut être aussi représenté par les coordonnées barycentriques $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ de ses sommets.

Définition. Pour chaque i, $1 \leq i \leq d+1$, λ_i est le polynôme de degré 1:

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_d x_d + c_{d+1}\,,$$

qui vérifie

$$\forall 1 \leq j \leq d+1\ ,\ \lambda_i(\boldsymbol{a}^j) = \delta_{i,j}\,.$$

Pour chaque i, les $d+1$ coefficients de λ_i sont les inconnues d'un système linéaire de $d+1$ équations. Ces $d+1$ systèmes ont la même matrice: M^t et donc ont une solution unique si le d-simplexe T est non-dégénéré.

Définition équivalente. Pour tout point $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^d$ de $I\!R^d$, les nombres $(\lambda_i(\boldsymbol{x}))_{i=1}^{d+1}$ vérifient les identités:

$$\forall 1 \leq i \leq d\ ,\ \sum_{j=1}^{d+1} a_i^j \lambda_j(\boldsymbol{x}) = x_i\,,$$

$$\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(\boldsymbol{x}) = 1\,.$$

Pour chaque point $\boldsymbol{x}$, c'est un système linéaire de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues, les nombres $(\lambda_i(\boldsymbol{x}))_{i=1}^{d+1}$, dont la matrice est M. Il a donc une solution unique si le d-simplexe T est non-dégénéré. Il est clair que chaque fonction λ_i est affine et on vérifie facilement que quand on prend $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^j$, alors $\lambda_i(\boldsymbol{a}^j) = \delta_{i,j}$ est une solution de ce système. Comme il n'y a qu'une seule fonction affine qui vérifie ceci, c'est bien la coordonnée barycentrique et les deux définitions sont équivalentes.

• Deux propriétés importantes. Une caractérisation de T:

$$T = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^d \,;\, 0 \leq \lambda_i(\boldsymbol{x}) \leq 1 \ \text{ pour } 1 \leq i \leq d+1\}\,.$$

Une caractérisation de $I\!P_1$:

$$\forall p \in I\!P_1\,,\, \forall \boldsymbol{x} \in I\!R^d\ ,\ p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{d+1} p(\boldsymbol{a}^i)\lambda_i(\boldsymbol{x})\,.$$

• Paramètres géométriques:

$$h_T = \text{ diamètre de } T = \text{ longueur du plus grand côté,}$$

$$\rho_T = \text{ rondeur de } T = \text{ diamètre de la boule inscrite dans } T\,,$$

$$\sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T} \text{ mesure de la non degénérescence de } T\,.$$

• **La transformation affine.** Le d-simplexe de référence $\hat{T}$ a pour sommets les points

$$\hat{\boldsymbol{a}}^1 = (1,0,\ldots,0)\,,\, \hat{\boldsymbol{a}}^2 = (0,1,0,\ldots,0)\,,\, \ldots,\, \hat{\boldsymbol{a}}^d = (0,0,\ldots,0,1)\,,\, \hat{\boldsymbol{a}}^{d+1} = (0,0,\ldots,0)\,.$$

Soit T un d-simplexe non-dégénéré de sommets $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^d, \boldsymbol{a}^{d+1}$. Il existe une et une seule matrice inversible B_T de $I\!R^{d,d}$ et un seul vecteur $\boldsymbol{b}_T$ de $I\!R^d$ tels que

$$\forall 1 \leq i \leq d+1\ ,\ \boldsymbol{a}^i = B_T\hat{\boldsymbol{a}}^i + \boldsymbol{b}_T\,.$$

En effet, $i = d+1$ donne $\boldsymbol{b}_T = \boldsymbol{a}^{d+1}$ et $i=1$, $i=2$, …, $i=d$ donnent la colonne i de B_T: $B_T^i = \boldsymbol{a}^i - \boldsymbol{a}^{d+1}$. On vérifie que $\det(B_T)$=$\det(M)$. Donc B_T est inversible ssi T n'est pas dégénéré. On note $\mathcal{F}_T$ l'application affine de $I\!R^d$ dans $I\!R^d$

$$\forall \hat{\boldsymbol{x}} \in I\!R^d\ ,\ \boldsymbol{x} = \mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}}) = B_T\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}_T\,.$$

$\mathcal{F}_T$ est inversible, car B_T l'est et

$$\forall \boldsymbol{x} \in I\!R^d\ ,\ \hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{F}_T^{-1}(\boldsymbol{x}) = B_T^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_T)\,.$$

De plus

$$T = \mathcal{F}_T(\hat{T})\,.$$

• **Notation.** Tout ce qui se rapporte à l'espace de référence est noté avec un chapeau. En particulier, la composition avec $\mathcal{F}_T$ est notée avec un chapeau: pour toute fonction v définie sur T, on écrit

$$\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) = v \circ \mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}}) = v(\mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}}))$$

et on supprime le chapeau quand on compose avec $\mathcal{F}_T^{-1}$: pour toute fonction $\hat{v}$ définie sur $\hat{T}$, on écrit

$$v(\boldsymbol{x}) = \hat{v} \circ \mathcal{F}_T^{-1}(\boldsymbol{x}) = \hat{v}(\mathcal{F}_T^{-1}(\boldsymbol{x}))\,.$$

Remarque. Les coordonnées barycentriques sont conservées par la transformation affine $\mathcal{F}_T$, *i.e.* si on note exceptionnellement $\lambda_{i,T}$ (resp. $\lambda_{i,\hat{T}}$) la ième coordonnée barycentrique de T (resp. de $\hat{T}$) alors

$$\widehat{\lambda_{i,T}} = \lambda_{i,\hat{T}}\,.$$

En effet, posons $\mu_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = \widehat{\lambda_{i,T}(\boldsymbol{x})}$. Alors μ_i appartient à $I\!\!P_1$ et

$$\mu_i(\hat{\boldsymbol{a}}^j) = \delta_{i,j}\,.$$

L'unicité des coordonnées barycentriques entraine bien que $\mu_i = \lambda_{i,\hat{T}}$.

Proposition 4.1. *On désigne par $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne de $I\!\!R^d$ et aussi la norme matricielle subordonnée. On a les relations:*

$$\|B_T\| \le \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}}\ ,\ \|B_T^{-1}\| \le \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}\ ,\ |\det(B_T)| = \frac{|T|}{|\hat{T}|}\,.$$

Démonstration : Par définition,

$$\|B_T\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in I\!\!R^d} \frac{\|B_T\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{v}\|=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|B_T\boldsymbol{v}\|}{\rho_{\hat{T}}}\,,$$

et le sup est atteint. Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $I\!\!R^d$ de norme $\rho_{\hat{T}}$ et qui réalise ce sup. Alors il existe deux points $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$ sur le bord de la boule inscrite dans $\hat{T}$ tels que $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}}$. Donc

$$B_T\boldsymbol{v} = B_T(\hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}}) = \mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{y}}) - \mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\,,$$

où $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ sont deux points de T. Alors

$$\|B_T\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \le h_T\,.$$

La deuxième inégalité se déduit de la première en interchangeant les roles de T et $\hat{T}$ car $\mathcal{F}_T^{-1}(\boldsymbol{x}) = B_T^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_T)$ a la même structure que $\mathcal{F}_T$ avec pour matrice B_T^{-1}.

La troisième égalité vient de ce que $|\det(B_T)|$ est le Jacobien de $\mathcal{F}_T$. Donc

$$|T| = \int_T d\boldsymbol{x} = \int_{\hat{T}} |\det(B_T)| d\hat{\boldsymbol{x}} = |\det(B_T)||\hat{T}| . \qquad \diamondsuit$$

Conséquence. Il existe des constantes C_1 et C_2, indépendantes de T, telles que

$$C_2 \rho_T^d \leq |\det(B_T)| \leq C_1 h_T^d .$$

• **Transformation des dérivés.** On a les formules suivantes:

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) = (B_T^t \nabla_{\boldsymbol{x}} v) \circ \mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}}) \ , \ \nabla_x v(\boldsymbol{x}) = [(B_T^t)^{-1} \nabla_{\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{v}] \circ \mathcal{F}_T^{-1}(\boldsymbol{x}) .$$

Théorème 4.2 admis. *Si $v \in H^m(T)$, alors $\hat{v} \in H^m(\hat{T})$ et il existe une constante C_1, indépendante de T, telle que*

$$\forall v \in H^m(T) \ , \ |\hat{v}|_{m,\hat{T}} \leq C_1 \|B_T\|^m |\det(B_T)|^{-1/2} |v|_{m,T} .$$

Si $\hat{v} \in H^m(\hat{T})$, alors $v \in H^m(T)$ et il existe une constante C_2, indépendante de T, telle que

$$\forall \hat{v} \in H^m(\hat{T}) \ , \ |v|_{m,T} \leq C_2 \|B_T^{-1}\|^m |\det(B_T)|^{1/2} |\hat{v}|_{m,\hat{T}} .$$

• **Le triplet** (T, P_T, Σ_T)**.** On se donne

(i) une partie compacte et connexe T de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non-vide;

(ii) un espace vectoriel P_T de dimension finie M, de fonctions définies sur T, à valeurs réelles;

(iii) un ensemble Σ_T de M formes linéaires indépendantes, φ_i, définies en particulier sur P_T.

Définition. On dit que Σ_T est unisolvent sur P_T (P_T-unisolvent) si pour tout ensemble de M scalaires α_i, $1 \leq i \leq M$, il existe un unique $p \in P_T$ tel que

$$\forall 1 \leq i \leq M \ , \ \varphi_i(p) = \alpha_i .$$

Si Σ_T est unisolvent sur P_T, on dit que le triplet est un **élément fini de Lagrange**.

Quand Σ_T est P_T-unisolvent, on peut munir P_T de la base $\{p_i\}_{i=1}^M$ définie par

$$\forall 1 \leq j \leq M \ , \ \varphi_j(p_i) = \delta_{i,j} ,$$

et tout $p \in P_T$ s'écrit

$$p = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i(p) \, p_i .$$

On appelle Σ_T l'ensemble des **degrés de liberté** de l'élément fini (T, P_T, Σ_T) et on peut lui associer l'opérateur d'interpolation Π_T: si v appartient à l'ensemble de définition des formes linéaires de Σ_T,

$$\Pi_T(v) = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i(v) p_i \,.$$

De manière équivalente, $\Pi_T(v)$ est l'unique élément de P_T tel que

$$\forall 1 \le i \le M \ , \ \varphi_i(\Pi_T(v)) = \varphi_i(v) \,.$$

Conséquence. On dit que $\Pi_T(v)$ interpole v sur P_T et on a

$$\forall p \in P_T \ , \ \Pi_T(p) = p \,.$$

• **Vérification de l'unisolvence.**

(i) on peut vérifier que pour tout $p \in P_T$:

$$\forall 1 \le j \le M \ , \ \varphi_j(p) = 0 \text{ implique } p = 0 \,;$$

(ii) on peut calculer les fonctions de base de P_T. C'est plus dur, mais plus utile pour l'approximation.

• **Exemples classiques.**

(i) Triangle T de type (1) dans $\mathbb{R}^2$:

$$P_T = \mathbb{P}_1 \ , \ \Sigma_T = \{ f \mapsto f(\boldsymbol{a}^i) \, ; \, 1 \le i \le 3 \} \,.$$

Σ_T est défini sur $\mathcal{C}^0(T)$. Fonctions de base

$$p_i \in \mathbb{P}_1 \ \text{ et } \ p_i(\boldsymbol{a}^j) = \delta_{i,j} \,.$$

Donc

$$p_i = \lambda_i \ \text{ et } \Pi_T(v) = \sum_{i=1}^{3} v(\boldsymbol{a}^i) \lambda_i \,.$$

(ii) Triangle T de type (2) dans $\mathbb{R}^2$:

$$P_T = \mathbb{P}_2 \ , \ \Sigma_T = \{ f \mapsto f(\boldsymbol{a}^i) \, ; \, 1 \le i \le 3 \} \cup \{ f \mapsto f(\boldsymbol{a}^{ij}) \, ; \, 1 \le i < j \le 3 \} \,.$$

Σ_T est défini sur $\mathcal{C}^0(T)$. $\mathrm{Card}(\Sigma_T) = 6$ et $\dim(\mathbb{P}_2) = 6$. Fonctions de base

$$p_1 = 2\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2}) \,, \, p_2 = 2\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{2}) \,, \, p_3 = 2\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{2}) \,,$$

$$p_{12} = 4\lambda_1\lambda_2 \,,\; p_{23} = 4\lambda_2\lambda_3 \,,\; p_{13} = 4\lambda_1\lambda_3 \,.$$

Opérateur d'interpolation

$$\Pi_T(v) = 2\sum_{i=1}^{3} v(\boldsymbol{a}^i)\lambda_i(\lambda_i - \frac{1}{2}) + 4 \sum_{1\le i<j\le 3} v(\boldsymbol{a}^{ij})\lambda_i\lambda_j \,.$$

(iii) Triangle T de type (3) dans $I\!R^2$:

$$P_T = I\!P_3 \;,$$

$$\begin{aligned}\Sigma_T = \{f \mapsto f(\boldsymbol{a}^i)\,;\, 1 \le i \le 3\} \cup \{f \mapsto f(\boldsymbol{a}^{iij})\,;\, 1 \le i < j \le 3\} \\ \cup \{f \mapsto f(\boldsymbol{a}^{ijj})\,;\, 1 \le i < j \le 3\} \cup \{f \mapsto f(\boldsymbol{a}^{123})\} \,.\end{aligned}$$

Σ_T est défini sur $\mathcal{C}^0(T)$. $\mathrm{Card}(\Sigma_T) = 10$ et $\dim(I\!P_3) = 10$. Fonctions de base

$$p_1 = \frac{9}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})(\lambda_1 - \frac{2}{3}) \,,\; p_2 = \frac{9}{2}\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{3})(\lambda_2 - \frac{2}{3}) \,,\; p_3 = \frac{9}{2}\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{3})(\lambda_3 - \frac{2}{3}) \,,$$

$$\begin{gathered}p_{112} = \frac{27}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})\lambda_2 \,,\; p_{223} = \frac{27}{2}\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{3})\lambda_3 \,,\; p_{113} = \frac{27}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})\lambda_3 \,, \\ p_{122} = \frac{27}{2}\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{3})\lambda_1 \,,\; p_{233} = \frac{27}{2}\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{3})\lambda_2 \,,\; p_{133} = \frac{27}{2}\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{3})\lambda_1 \,, \\ p_{123} = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \;\text{ appelée fonction “bulle”.}\end{gathered}$$

Opérateur d'interpolation

$$\begin{aligned}\Pi_T(v) = \frac{9}{2}\sum_{i=1}^{3} v(\boldsymbol{a}^i)\lambda_i(\lambda_i - \frac{1}{3})(\lambda_i - \frac{2}{3}) + \frac{27}{2}\sum_{1\le i<j\le 3} v(\boldsymbol{a}^{iij})\lambda_i(\lambda_i - \frac{1}{3})\lambda_j \\ + \frac{27}{2}\sum_{1\le i<j\le 3} v(\boldsymbol{a}^{ijj})\lambda_j(\lambda_j - \frac{1}{3})\lambda_i + 27v(\boldsymbol{a}^{123})\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \,.\end{aligned}$$

(iv) Généralisation: d-simplexe T de type (k) dans $I\!R^d$

$$T = d\text{-simplexe non dégénéré} \;,\; P_T = I\!P_k \,,$$

$$\begin{aligned}\Sigma_k = &\;\text{treillis principal d'ordre } k \\ = &\;\{\boldsymbol{x} \in I\!R^d\,;\, 1 \le i \le d+1 \,,\, \lambda_i(\boldsymbol{x}) \in \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\}\} \,.\end{aligned}$$

Remarquons que tous les $\lambda_i(\boldsymbol{x}) \in [0,1]$ et donc tous les $\boldsymbol{x} \in T$.

$$\Sigma_T = \{f \mapsto f(\boldsymbol{a})\,;\, \forall \boldsymbol{a} \in \Sigma_k\} \,.$$

Σ_T est défini sur $\mathcal{C}^0(T)$. L'unisolvence est admise.

Exercice. Extension aux tétraèdres de type (1), (2) et (3).

• **Exemples moins courants.**

(v) Triangle T de Thomas de type (k) dans $\mathbb{R}^2$

$$P_T = \mathbb{P}_k\,,$$

pour $k \geq 3$

$$\Sigma_T = \{f \mapsto f(\boldsymbol{a}^i)\,;\, 1 \leq i \leq 3\} \cup \{f \mapsto \int_{T'_i} f\,p\,d\sigma\,,\, \forall p \in \mathbb{P}_{k-2}(T'_i)\,;\, 1 \leq i \leq 3\}$$
$$\cup\, \{f \mapsto \int_T f\,p\,d\boldsymbol{x}\,,\, \forall p \in \mathbb{P}_{k-3}\}\,,$$

où $\mathbb{P}_{k-2}(T'_i)$ désigne la restriction des polynômes de $\mathbb{P}_{k-2}$ au côté T'_i, donc à une variable; pour $k = 2$, on supprime la réunion avec $\{f \mapsto \int_T f\,p\,d\boldsymbol{x}\,,\, \forall p \in \mathbb{P}_{k-3}\}$ et pour $k = 1$, Σ_T est l'ensemble de l'exemple (i).

Remarque. Pour $k \geq 3$:

$$\dim(\mathbb{P}_k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$
$$\mathrm{Card}(\Sigma_T) = 3 + 3(k-1) + \frac{1}{2}(k-1)(k-2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\,.$$

Pour $k = 1$ et 2, l'égalité est évidente.

Lemme 4.3. *Σ_T est unisolvent sur $\mathbb{P}_k$.*

Démonstration. Prenons d'abord $k \geq 3$. Il suffit de montrer que s'il existe $p \in \mathbb{P}_k$ tel que

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 3\ ,\ p(\boldsymbol{a}^i) = 0\,,$$
$$\text{pour } 1 \leq i \leq 3\ ,\ \int_{T'_i} p\,q\,d\sigma = 0\ ,\ \forall q \in \mathbb{P}_{k-2}(T'_i)\,,$$
$$\int_T p\,q\,d\boldsymbol{x} = 0\ ,\ \forall q \in \mathbb{P}_{k-3}\,,$$

alors $p = 0$.

1. Montrons que p s'annule sur chaque côté T'_i. On choisit $q = p'' \in \mathbb{P}_{k-2}(T'_i)$:

$$0 = \int_{T'_i} p\,p''\,d\sigma = -\int_{T'_i} (p')^2\,d\sigma\,.$$

Donc $p' = 0$ sur T'_i, donc p est constant sur T'_i et comme $p = 0$ aux deux extrémités de T'_i, alors $p = 0$ sur T'_i.

2. Puisque p s'annule sur le bord ∂T de T, on peut factoriser P sous la forme

$$p = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \, q \ , \quad \text{où } q \in I\!P_{k-3} \, .$$

Alors

$$\int_T \lambda_1\lambda_2\lambda_3(q^2) d\boldsymbol{x} = 0 \ \text{ donc } \ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(q^2) = 0 \ \text{ dans } T \ \text{ car } \lambda_1\lambda_2\lambda_3(q^2) \geq 0 \ \text{ dans } T \, .$$

Mais $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ à l'intérieur de T. Donc $q = 0$ dans T et donc $p = 0$ dans T.

3. Si $k = 1$, l'unisolvence est déjà démontrée. Si $k = 2$, on trouve de même que $p = 0$ sur ∂T. Donc $p = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\, q$, mais comme le degré de p est 2, alors $q = 0$. ♢

(vi) Triangle T de Crouzeix-Raviart dans $I\!R^2$.

On note f^i le côté de T opposé à $\boldsymbol{a}^i$ et $\boldsymbol{b}_i$ le milieu de ce côté.

$$P_T = I\!P_1 \ , \ \Sigma_T = \{f \mapsto f(\boldsymbol{b}^i) \, ; \, 1 \leq i \leq 3\} \, .$$

Σ_T est défini sur $\mathcal{C}^0(T)$. Fonctions de base

$$p_1 = 1 - 2\lambda_1 \, , \, p_2 = 1 - 2\lambda_2 \, , \, p_3 = 1 - 2\lambda_3 \, .$$

Opérateur d'interpolation

$$\Pi_T(v) = v(\boldsymbol{b}^1)(1 - 2\lambda_1) + v(\boldsymbol{b}^2)(1 - 2\lambda_2) + v(\boldsymbol{b}^3)(1 - 2\lambda_3) \, .$$

(vii) Une variante du triangle T de Crouzeix-Raviart.

$$P_T = I\!P_1 \ , \ \Sigma_T = \{f \mapsto \int_{f^i} f \, d\sigma \, ; \, 1 \leq i \leq 3\} \, .$$

Σ_T est défini sur $H^1(T)$.

Lemme 4.4. *Σ_T est unisolvent sur $I\!P_1$.*

Démonstration. C'est un système linéaire de 3 équations à trois inconnues. Il suffit de montrer que si $p \in I\!P_1$ vérifie

$$\int_{f^i} p \, d\sigma = 0 \ , \quad \text{sur chaque côté } f^i \text{ de } T \, ,$$

alors, $p = 0$. Comme $\boldsymbol{b}^i$ est le milieu de f^i, alors tout $q \in I\!P_1$ vérifie

$$\int_{f^i} q \, d\sigma = \text{mes}(f^i) \, q(\boldsymbol{b}^i) \, .$$

Donc ici $p(\boldsymbol{b}^i) = 0$ et on retrouve l'exemple précédent. ♢

Par rapport aux éléments finis des exemples précédents, cet élément fini présente l'avantage d'être défini sur $H^1(T)$. On peut se demander s'il ne serait pas possible de trouver une variante du triangle T de Thomas qui soit aussi défini sur $H^1(T)$. C'est possible, mais alors il faut utiliser des valeurs de fonctions en dehors de T, pour définir les degrés de liberté aux sommets de T, car chaque sommet est partagé par plusieurs triangles.

• **Equivalence affine.** On va voir comment on peut engendrer une famille d'éléments finis de Lagrange à partir d'un seul élément (en général l'élément de référence).

Théorème 4.5. *Soit* $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma} = \{\hat{\varphi}_i \,;\, 1 \leq i \leq M\})$ *un élément fini de Lagrange dans* $\mathbb{R}^d$ *et soit* F *une application bijective et bicontinue de* $\mathbb{R}^d$ *sur* $\mathbb{R}^d$*. Alors le triplet* $(T, P, \Sigma = \{\varphi_i \,;\, 1 \leq i \leq M\})$ *défini par*

$$T = F(\hat{T})\,, \tag{4.1}$$

$$P = \{\hat{p} \circ F^{-1} \,;\, \hat{p} \in \hat{P}\}\,, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{dom}(\Sigma) = \{v = \hat{v} \circ F^{-1} \,;\, \hat{v} \in \mathrm{dom}(\hat{\Sigma})\}\,, \tag{4.3}$$

$$\forall v \in \mathrm{dom}(\Sigma)\,,\ \varphi_i(v) = \hat{\varphi}_i(\hat{v})\,,\ 1 \leq i \leq M\,, \tag{4.4}$$

est aussi un élément fini de Lagrange.

Démonstration. Si $\hat{T}$ est un compact connexe et d'intérieur non-vide, alors F bijective et bicontinue conserve ces propriétés. On vérifie facilement que si $(\hat{p}_i)_{i=1}^M$ est une base de $\hat{P}$, alors $(p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1})_{i=1}^M$ est une base de P, qui est donc aussi de dimension M. De même, le fait que $\hat{\Sigma}$ soit $\hat{P}$-unisolvent entraine facilement que Σ est aussi P-unisolvent. $\diamondsuit$

Définition. Deux éléments finis de Lagrange $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma} = \{\hat{\varphi}_i \,;\, 1 \leq i \leq M\})$ et $(T, P, \Sigma = \{\varphi_i \,;\, 1 \leq i \leq M\})$ sont équivalents s'il existe une bijection bicontinue F de $\hat{T}$ sur T telle que (T, P, Σ) vérifie (4.1), (4.2), (4.3), (4.4). Si de plus, F est affine, on dit qu'ils sont affine-équivalents.

Théorème 4.6. *Soient* $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ *et* (T, P, Σ) *deux éléments finis de Lagrange équivalents et soit* F *une application bijective et bicontinue qui les relie. Si* $\Pi_{\hat{T}}$ *est l'opérateur de* $\hat{\Sigma}$*-interpolation sur* $\hat{P}$*, alors l'opérateur* Π_T *de* Σ*-interpolation sur* P *est caractérisé par*

$$\Pi_T(v) \circ F = \Pi_{\hat{T}}(v \circ F) \ \text{ pour toute fonction } v \text{ dans le domaine de } \Sigma\,. \tag{4.5}$$

Démonstration. Soit $\hat{\Sigma} = \{\hat{\varphi}_i \,;\, 1 \leq i \leq M\}$ et soit $\Sigma = \{\varphi_i \,;\, 1 \leq i \leq M\}$. Soit $(\hat{p}_i)_{i=1}^M$ une base de $\hat{P}$ associée à $\hat{\Sigma}$, i.e.

$$\hat{\varphi}_j(\hat{p}_i) = \delta_{i,j}\,,\ \text{ pour } 1 \leq j \leq M\,.$$

Alors $(p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1})_{i=1}^M$ est une base de P associée à Σ car

$$\varphi_j(p_i) = \hat{\varphi}_j(\hat{p}_i) = \delta_{i,j}\,,\ \text{ pour } 1 \leq j \leq M\,.$$

Donc pour tout v dans le domaine de Σ on a

$$\Pi_T(v) \circ F = (\sum_{i=1}^M \varphi_i(v)\, p_i) \circ F = \sum_{i=1}^M \hat{\varphi}_i(\hat{v})\hat{p}_i = \Pi_{\hat{T}}(\hat{v}) = \Pi_{\hat{T}}(v \circ F)\,. \qquad \diamondsuit$$

Notation. On écrit souvent (4.5) sous la forme

$$\widehat{\Pi_T(v)} = \Pi_{\hat{T}}(\hat{v})\,.$$

Lorsque l'application F est affine, on dit que Π_T est invariant par transformation affine.

Notation. Soit T un d-simplexe non-dégénéré et soit Σ_k le treillis principal d'ordre k. Par abus de langage, on note $(T, \mathbb{P}_k, \Sigma_k)$ l'élément fini de Lagrange de l'exemple (iv). Rappelons qu'on l'appelle d-simplexe de type (k).

Théorème 4.7 (exercice). *Pour tout entier $k \geq 1$, deux éléments finis d-simplexes de type (k) sont affines-équivalents.*

Remarque. Dans tous les exemples que nous avons vus, l'opérateur d'interpolation Π_T est invariant par transformation affine. C'est facile à vérifier, sauf pour l'élément de Thomas, dont les formes linéaires sont définies par des intégrales. Or, pour calculer les formes φ définies par les intégrales $\int_{T_i'} f\, q\, d\sigma$, on choisit une base de $I\!P_{k-2}(T_i')$, et pour calculer celles définies par $\int_T f\, q\, d\boldsymbol{x}$, on choisit une base de $I\!P_{k-3}$ et on calcule les formes avec ces polynômes de base. Noter que l'opérateur d'interpolation Π_T est indépendant du choix de la base. En effet, si par exemple

$$\int_{T_i'} \Pi_T(v)\, q\, d\sigma = \int_{T_i'} v\, q\, d\sigma\,,$$

pour tout polynôme q d'une base de $I\!P_{k-2}(T_i')$, alors

$$\int_{T_i'} \Pi_T(v)\, q\, d\sigma = \int_{T_i'} v\, q\, d\sigma\,,$$

pour tout polynôme q de $I\!P_{k-2}(T_i')$. Grâce à cette remarque, on montre que l'élément de Thomas vérifie bien (4.5) et donc est invariant par transformation affine. En effet, si par exemple $\{q_\ell\}_{\ell=1}^{\ell=k-1}$ est la base canonique de $I\!P_{k-2}(T_i')$, alors

$$\int_{T_i'} v\, q_\ell\, d\sigma = \frac{\mathrm{mes}(T_i')}{\mathrm{mes}(\hat{T}_i')} \int_{\hat{T}_i'} \hat{v}\,(q_\ell \circ F_T)\, d\hat{\sigma}\,.$$

Comme

$$\{\frac{\mathrm{mes}(T_i')}{\mathrm{mes}(\hat{T}_i')} q_\ell \circ F_T\}_{\ell=1}^{\ell=k-1}\,,$$

est aussi une base de $I\!P_{k-2}(\hat{T}_i')$, on déduit que ceci définit le même opérateur d'interpolation que si on avait pris directement la forme

$$\int_{\hat{T}_i'} \hat{v}\, \hat{q}_\ell\, d\hat{\sigma}\,,$$

où $\{\hat{q}_\ell\}$ est la base canonique de $I\!P_{k-2}(\hat{T}_i')$.

• Résultats d'approximation.

Théorème 4.8 (Bramble-Hilbert). *Soit $\hat{T}$ un élément (de référence) connexe et de frontière Lipschitzienne, et soit $k \geq 0$ et $m \geq 0$ deux entiers tels que $m \leq k+1$. Soit $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T}); H^m(\hat{T}))$ tel que*

$$\forall p \in I\!P_k\,,\; \hat{\Pi}(p) = p\,.$$

Alors, il existe une constante $\hat{C}$ qui ne dépend que de $\hat{\Pi}$, k, m et $\hat{T}$, telle que

$$\forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T}) \ , \|\hat{v} - \hat{\Pi}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} \leq \hat{C} |\hat{v}|_{k+1,\hat{T}} \, .$$

Démonstration. Comme $\hat{\Pi}(p) = p$ pour tout p dans $\mathbb{P}_k$, on peut écrire

$$\forall p \in \mathbb{P}_k \, , \ \|\hat{v} - \hat{\Pi}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} = \|(\hat{v} + p) - \hat{\Pi}(\hat{v} + p)\|_{m,\hat{T}} \, .$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{P}_k \, , \ \|\hat{v} - \hat{\Pi}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} &= \|(I - \hat{\Pi})(\hat{v} + p)\|_{m,\hat{T}} \\ &\leq \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T});H^m(\hat{T}))} \|\hat{v} + p\|_{k+1,\hat{T}} \, . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T}) \, , \ \|\hat{v} - \hat{\Pi}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} &\leq \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T});H^m(\hat{T}))} \|\hat{v}\|_{H^{k+1}(\hat{T})/\mathbb{P}_k} \\ &\leq \hat{C}_1 \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T});H^m(\hat{T}))} |\hat{v}|_{k+1,\hat{T}} \, , \end{aligned}$$

où $\hat{C}_1$ est la constante du Théorème de Deny-Lions.
D'où le résultat avec $\hat{C} = \hat{C}_1 \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T});H^m(\hat{T}))}$. ♢

Théorème 4.9. *Soit $\hat{T}$ le d-simplexe de référence, $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange de référence et soit (T, P, Σ) un élément fini de Lagrange qui lui soit affine-équivalent. On suppose que m et k sont comme dans le théorème précédent et que l'opérateur d'interpolation correspondant $\Pi_{\hat{T}}$ appartient à $\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T}); H^m(\hat{T}))$ et vérifie*

$$\forall p \in \mathbb{P}_k \, , \ \Pi_{\hat{T}}(p) = p \, . \tag{4.6}$$

Alors, il existe une constante $\hat{C}$ qui ne dépend que de $\Pi_{\hat{T}}$, k, m et $\hat{T}$ (donc indépendante de la géométrie de T), telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \ , |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C} \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T} \, .$$

Démonstration. On note F_T l'application affine inversible qui applique $\hat{T}$ sur T. En se servant des formules de changements de variables, on a

$$|v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C}_1 \|B_T^{-1}\|^m |\det(B_T)|^{1/2} |(v - \Pi_T(v)) \circ F_T|_{m,\hat{T}} \, .$$

Mais

$$(v - \Pi_T(v)) \circ F_T = v \circ F_T - \Pi_{\hat{T}}(v \circ F_T) = \hat{v} - \Pi_{\hat{T}}(\hat{v}) \, .$$

Donc

$$\begin{aligned} |(v - \Pi_T(v)) \circ F_T|_{m,\hat{T}} &= |\hat{v} - \Pi_{\hat{T}}(\hat{v})|_{m,\hat{T}} \leq \hat{C}_2 |\hat{v}|_{k+1,\hat{T}} \\ &\leq \hat{C}_2 \hat{C}_3 \|B_T\|^{k+1} |\det(B_T)|^{-1/2} |v|_{k+1,T} \, . \end{aligned}$$

D'où

$$\forall v \in H^{k+1}(T)\ , |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \le \hat{C}_1\hat{C}_2\hat{C}_3\|B_T\|^{k+1}\|B_T^{-1}\|^m|v|_{k+1,T} \le \hat{C}_4\frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m}|v|_{k+1,T}\,.$$

Remarques. (i) Comme $0 \le m \le k+1$, on a

$$\forall v \in H^{k+1}(T)\ , |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \le \hat{C}\sigma_T^m h_T^{k+1-m}|v|_{k+1,T}\,,$$

avec $k+1-m \ge 0$.
(ii) Comme Π_T est invariant par transformation affine, (4.6) équivaut à

$$\forall p \in I\!P_k\,,\ \Pi_T(p) = p\,.$$

V. Eléments finis de Lagrange quadrilatéraux de $I\!R^2$

Les éléments finis quadrilatéraux de $I\!R^2$ sont toujours définis d'abord sur le carré unité.

• **Elément de référence.** L'élément de référence $\hat{T}$ est le carré unité $[0,1]\times[0,1]$, de sommets $\hat{\boldsymbol{a}}^1 = (0,0)$, $\hat{\boldsymbol{a}}^2 = (1,0)$, $\hat{\boldsymbol{a}}^3 = (1,1)$ et $\hat{\boldsymbol{a}}^4 = (0,1)$. On voit facilement que, dès que $k \ge 1$, l'espace $I\!P_k$ ne se prête pas aux degrés de liberté définis sur un carré. En fait l'espace de polynômes adéquats, $\hat{Q}_k$, est le produit tensoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k en chacune des variables. Il est donc de dimension $(k+1)^2$ et vérifie

$$I\!P_k \subset \hat{Q}_k \subset I\!P_{2k}\,.$$

Par exemple, $\hat{Q}_2$ est engendré par

$$(1,\hat{x}_1,\hat{x}_1^2)\times(1,\hat{x}_2,\hat{x}_2^2) = \{1,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_1\hat{x}_2,\ \hat{x}_1^2,\ \hat{x}_1^2\hat{x}_2,\ \hat{x}_1\hat{x}_2^2,\ \hat{x}_2^2,\ \hat{x}_1^2\hat{x}_2^2\}\,.$$

Remarque. La restriction des polynômes de $\hat{Q}_k$ à un côté de $\hat{T}$ ou à un segment de droite parallèle à un axe est un polynôme de $I\!P_k$ à une variable.
La définition de l'élément fini de Lagrange quadrilatéral sous la forme du triplet $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ est la même puisqu'elle est donnée dans un cadre abstrait.

• **Exemples.** On a l'analogue des exemples (i) à (v).

(i) Carré $\hat{T}$ de type (1) dans $I\!R^2$:

$$P_{\hat{T}} = \hat{Q}_1\ ,\ \Sigma_{\hat{T}} = \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^i)\,;\,1 \le i \le 4\}\,.$$

$\Sigma_{\hat{T}}$ est défini sur $\mathcal{C}^0(\hat{T})$. Fonctions de base:

$$\hat{q}_1 = (1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)\,,\ \hat{q}_2 = \hat{x}_1(1-\hat{x}_2)\,,\ \hat{q}_3 = \hat{x}_1\hat{x}_2\,,\ \hat{q}_4 = \hat{x}_2(1-\hat{x}_1)\,,$$

$$\Pi_{\hat{T}}(v) = \sum_{i=1}^{4} v(\hat{\boldsymbol{a}}^i)\hat{q}_i \,.$$

(ii) Carré $\hat{T}$ de type (2) dans $I\!R^2$:

$$P_{\hat{T}} = \hat{Q}_2 \;,\; \Sigma_{\hat{T}} = \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^i)\,;\, 1 \le i \le 4\} \cup \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^{ii+1})\,;\, 1 \le i \le 4\} \cup \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^{1234})\} \,,$$

avec la convention que les indices sont numérotés modulo 4. $\Sigma_{\hat{T}}$ est défini sur $\mathcal{C}^0(\hat{T})$. $\mathrm{Card}(\Sigma_{\hat{T}}) = 9$ et $\dim(\hat{Q}_2) = 9$. Fonctions de base

$$\hat{q}_1 = 4(1-\hat{x}_1)(\frac{1}{2}-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)(\frac{1}{2}-\hat{x}_2)\,,\; \hat{q}_2 = 4\hat{x}_1(\hat{x}_1-\frac{1}{2})(1-\hat{x}_2)(\frac{1}{2}-\hat{x}_2)\,,$$

$$\hat{q}_3 = 4\hat{x}_1(\hat{x}_1-\frac{1}{2})\hat{x}_2(\hat{x}_2-\frac{1}{2})\,,\; \hat{q}_4 = 4(1-\hat{x}_1)(\frac{1}{2}-\hat{x}_1)\hat{x}_2(\hat{x}_2-\frac{1}{2})\,,$$

$$\hat{q}_{12} = 8\hat{x}_1(1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)(\frac{1}{2}-\hat{x}_2)\,,\; \hat{q}_{23} = 8\hat{x}_1(\hat{x}_1-\frac{1}{2})\hat{x}_2(1-\hat{x}_2)\,,$$

$$\hat{q}_{34} = 8\hat{x}_1(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(\hat{x}_2-\frac{1}{2})\,,\; \hat{q}_{41} = 8(\frac{1}{2}-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(1-\hat{x}_2)\,,$$

$$\hat{q}_{1234} = 16\hat{x}_1(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(1-\hat{x}_2)\,,$$

est la fonction “bulle”.

(iii) Généralisation. Carré $\hat{T}$ de type (k) dans $I\!R^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_k = &\text{ treillis principal d'ordre } k \\ &= \{\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \in I\!R^2\,;\, 1 \le i \le 2\,,\, \hat{x}_i \in \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\}\}\,. \end{aligned}$$

$$P_{\hat{T}} = \hat{Q}_k \;,\; \Sigma_{\hat{T}} = \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}})\,;\, \forall \hat{\boldsymbol{a}} \in \hat{\Sigma}_k\}\,.$$

$\mathrm{Card}(\Sigma_{\hat{T}}) = (k+1)^2$ et $\dim(\hat{Q}_k) = (k+1)^2$. $\Sigma_{\hat{T}}$ est défini sur $\mathcal{C}^0(\hat{T})$. L'unisolvence est facile (exercice).

(iv) Carré $\hat{T}$ de Thomas de type (k) dans $I\!R^2$

$$P_{\hat{T}} = \hat{Q}_k \,,$$

pour $k \ge 2$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{T}} = \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^i)\,;\, 1 \le i \le 4\} \cup \{f \mapsto \int_{\hat{T}'_i} f\,q\,d\hat{\sigma}\,,\, \forall q \in I\!P_{k-2}(\hat{T}'_i)\,;\, 1 \le i \le 4\} \\ \cup \{f \mapsto \int_{\hat{T}} f\,q\,d\hat{\boldsymbol{x}}\,,\, \forall q \in \hat{Q}_{k-2}\}\,; \end{aligned}$$

pour $k = 1$, $\Sigma_{\hat{T}}$ est l'ensemble de l'exemple (i).

Remarque. Pour $k \geq 2$:

$$\dim(\hat{Q}_k) = (k+1)^2 \ , \ \mathrm{Card}(\Sigma_{\hat{T}}) = 4 + 4(k-1) + (k-1)^2 = (k+1)^2 \, .$$

Lemme 5.1. *$\Sigma_{\hat{T}}$ est unisolvent sur $\hat{Q}_k$.*

Démonstration. Prenons $k \geq 2$. Il suffit de montrer que s'il existe $p \in \hat{Q}_k$ tel que

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 4 \ , \ p(\hat{\boldsymbol{a}}^i) = 0 \, ,$$
$$\text{pour } 1 \leq i \leq 4 \ , \ \int_{\hat{T}_i'} p \, q \, d\hat{\sigma} = 0 \ , \ \forall q \in I\!\!P_{k-2}(\hat{T}_i') \, ,$$
$$\int_{\hat{T}} p \, q \, d\hat{\boldsymbol{x}} = 0 \ , \ \forall q \in \hat{Q}_{k-2} \, ,$$

alors $p = 0$.

1. Comme pour le triangle, on montre que p s'annule sur chaque côté $\hat{T}_i'$, car la restriction de p à chaque côté appartient à $I\!\!P_k$.

2. Puisque p s'annule sur le bord $\partial\hat{T}$ de $\hat{T}$, on peut factoriser p sous la forme

$$p = \hat{x}_1(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(1-\hat{x}_2)q \ , \quad \text{où } q \in \hat{Q}_{k-2} \, .$$

Alors

$$\int_{\hat{T}} \hat{x}_1(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(1-\hat{x}_2)(q^2) d\hat{\boldsymbol{x}} = 0 \ \text{ donc } q = 0 \ \text{ dans l'intérieur de } \hat{T} \, ,$$

car $\hat{x}_1(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2(1-\hat{x}_2) > 0$ dans $\hat{T}$. Donc $p = 0$ dans $\hat{T}$. $\diamondsuit$

Contre-exemple. L'élément de Crouzeix-Raviart.

$$P_{\hat{T}} = \hat{Q}_1 \ , \ \Sigma_{\hat{T}} = \{f \mapsto f(\hat{\boldsymbol{a}}^{ii+1}) \, ; \, 1 \leq i \leq 4\} \, .$$

Mais $\Sigma_{\hat{T}}$ n'est pas unisolvent sur $\hat{Q}_1$ car tout polynôme q de $\hat{Q}_1$ vérifie

$$q(\hat{\boldsymbol{a}}^{1234}) = \frac{1}{2}(q(\hat{\boldsymbol{a}}^{12}) + q(\hat{\boldsymbol{a}}^{34})) = \frac{1}{2}(q(\hat{\boldsymbol{a}}^{41}) + q(\hat{\boldsymbol{a}}^{23})) \, .$$

Donc, si les scalaires α_i ne vérifient pas $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$, il n'existe pas de q dans $\hat{Q}_1$ tel que $q(\hat{\boldsymbol{a}}^{ii+1}) = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq 4$. En fait, on vérifie facilement que le polynôme de $\hat{Q}_1$ suivant s'annule aux quatre points $\hat{\boldsymbol{a}}^{ii+1}$:

$$\hat{b}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} + \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \, ,$$

alors que ce n'est évidemment pas le polynôme nul.

• **Propriétés du quadrilatère et transformation.** Soit T un quadrilatère convexe, qui n'est pas réduit à un triangle, de sommets $\boldsymbol{a}^i = (a_1^i, a_2^i)$, numérotés dans le même ordre que les sommets $\hat{\boldsymbol{a}}^i$ de $\hat{T}$. La convexité et non-réduction à un triangle jouent le role de non-dégénérescence. L'application suivante, désignée par $\mathcal{F}_T$, applique $\hat{\boldsymbol{a}}^i$ sur $\boldsymbol{a}^i$ pour $1 \leq i \leq 4$:

$$\mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}})_1 = x_1 = a_1^1 + \hat{x}_1(a_1^2 - a_1^1) + \hat{x}_2(a_1^4 - a_1^1) + \hat{x}_1\hat{x}_2(a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1)\,,$$

$$\mathcal{F}_T(\hat{\boldsymbol{x}})_2 = x_2 = a_2^1 + \hat{x}_1(a_2^2 - a_2^1) + \hat{x}_2(a_2^4 - a_2^1) + \hat{x}_1\hat{x}_2(a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\,.$$

On voit que chaque composante de $\mathcal{F}_T$ est bilinéaire, *i.e.* appartient à $\hat{Q}_1$. Noter que lorsque T est un parallélogramme, les deux facteurs $a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1$ et $a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1$ sont nuls. Contrairement au triangle, la matrice jacobienne de $\mathcal{F}_T$ n'est pas constante:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_1} = \big(a_1^2 - a_1^1 + \hat{x}_2(a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1), a_2^2 - a_2^1 + \hat{x}_2(a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\big)\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_2} = \big(a_1^4 - a_1^1 + \hat{x}_1(a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1), a_2^4 - a_2^1 + \hat{x}_1(a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\big)\,.$$

Les dérivées partielles secondes sont constantes:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_1^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_2^2} = (0,0)\ ,\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} = (a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1, a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\,,$$

et elles sont toutes nulles si T est un parallélogramme. Et évidemment toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à trois sont nulles. Le Jacobien $J_{\mathcal{F}}$ n'est pas constant, mais appartient à $I\!P_1$

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{F}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = {} & (a_1^2 - a_1^1)(a_2^4 - a_2^1) - (a_2^2 - a_2^1)(a_1^4 - a_1^1) \\ & + \hat{x}_1[(a_1^2 - a_1^1)(a_2^3 - a_2^4) - (a_2^2 - a_2^1)(a_1^3 - a_1^4)] \\ & + \hat{x}_2[(a_2^4 - a_2^1)(a_1^3 - a_1^2) - (a_1^4 - a_1^1)(a_2^3 - a_2^2)]\,. \end{aligned}$$

On désigne par S_i le triangle contenu dans T de sommets $\boldsymbol{a}^{i-1}$, $\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}^{i+1}$; alors on vérifie que

$$J_{\mathcal{F}}(0,0) = 2\,|S_1|\,,\ J_{\mathcal{F}}(1,0) = 2\,|S_2|\,,\ J_{\mathcal{F}}(0,1) = 2\,|S_4|\,,\ J_{\mathcal{F}}(1,1) = 2\,|S_3|\,,$$

$$J_{\mathcal{F}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} J_{\mathcal{F}}(1,0) + \frac{1}{2} J_{\mathcal{F}}(0,1) = |S_2| + |S_4| = |T|\,.$$

Comme $J_{\mathcal{F}} \in I\!P_1$ il atteint son maximum et son minimum sur $\hat{T}$ aux sommets de $\hat{T}$. Donc

$$\mathrm{Max}_{\hat{T}}(J_{\mathcal{F}}) = 2\mathrm{Max}_{1 \leq i \leq 4} |S_i|\,,\ \mathrm{Min}_{\hat{T}}(J_{\mathcal{F}}) = 2\mathrm{Min}_{1 \leq i \leq 4} |S_i|\,.$$

Remarque. Noter qu'on n'a pas pris de valeur absolue pour calculer le Jacobien car il est toujours non-négatif. Ceci vient d'une part du fait que les sommets de T et de $\hat{T}$ sont numérotés selon la même orientation et d'autre part du fait que T est convexe. Comme de plus T n'est pas réduit à un triangle, $\mathrm{Min}_{\hat{T}}(J_{\mathcal{F}})$ est strictement positif et $\mathcal{F}_T$ est inversible.

On prend les paramètres suivants pour mesurer la géométrie de T:

$$\begin{aligned} h_T &= \text{diamètre de } T = \text{ longueur du plus grand côté de tous les } S_i \\ &= \text{ longueur de la plus grande diagonale de } T\,, \end{aligned}$$

$$\rho_T = 2\mathrm{Min}_{1\le i\le 4}\rho_i \quad \text{où } \rho_i = \text{ diamètre du cercle inscrit dans } S_i\,,$$

$$\sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T} > 1\,.$$

L'application inverse $\mathcal{F}_T^{-1}$ est difficile à expliciter, mais on peut calculer les coefficients de sa matrice jacobienne, composés avec $\mathcal{F}_T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{F}_T^{-1})_1}{\partial x_1}\circ\mathcal{F}_T &= \frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\big(a_2^4 - a_2^1 + \hat{x}_1(a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\big)\,,\\ \frac{\partial(\mathcal{F}_T^{-1})_2}{\partial x_1}\circ\mathcal{F}_T &= -\frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\big(a_2^2 - a_2^1 + \hat{x}_2(a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1)\big)\,,\\ \frac{\partial(\mathcal{F}_T^{-1})_1}{\partial x_2}\circ\mathcal{F}_T &= -\frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\big(a_1^4 - a_1^1 + \hat{x}_1(a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1)\big)\,,\\ \frac{\partial(\mathcal{F}_T^{-1})_2}{\partial x_2}\circ\mathcal{F}_T &= \frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\big(a_1^2 - a_1^1 + \hat{x}_2(a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1)\big)\,. \end{aligned}$$

On voit que les dérivées d'ordre supérieur de $\mathcal{F}_T^{-1}$ ne s'annulent pas et on vérifie que son Jacobien est donné par

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}\circ\mathcal{F}_T = \frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\,.$$

De plus, les formules pour transformer les dérivées sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1}\circ\mathcal{F}_T &= \frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\Big(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_1}(a_2^4-a_2^1+\hat{x}_1(a_2^3-a_2^2-a_2^4+a_2^1)) - \frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_2}(a_2^2-a_2^1+\hat{x}_2(a_2^3-a_2^2-a_2^4+a_2^1))\Big)\,,\\ \frac{\partial v}{\partial x_2}\circ\mathcal{F}_T &= \frac{1}{J_{\mathcal{F}}}\Big(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_2}(a_1^2-a_1^1+\hat{x}_2(a_1^3-a_1^2-a_1^4+a_1^1)) - \frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_1}(a_1^4-a_1^1+\hat{x}_1(a_1^3-a_1^2-a_1^4+a_1^1))\Big)\,. \end{aligned}$$

Définition. On pose

$$\mathcal{Q}_k = \{\hat{q}\circ\mathcal{F}_T^{-1}\,;\,\hat{q}\in\hat{Q}_k\}\,,$$

espace de dimension $(k+1)^2$. Sauf si T est un parallélogramme, ce n'est pas un espace de polynômes et en général, on ne peut pas l'expliciter car on ne connait pas $\mathcal{F}_T^{-1}$. Mais, comme tous les calculs sont faits sur $\hat{T}$, il n'est pas nécessaire de connaitre $\mathcal{F}_T^{-1}$.

Remarque. Au lieu de $\mathcal{Q}_k$, il paraitrait plus simple de prendre directement l'espace Q_k. Mais si on compose les polynômes de Q_k avec $\mathcal{F}_T$, on ne retrouve pas l'espace $\hat{Q}_k$. Par exemple, la composition d'un polynôme de Q_1 avec $\mathcal{F}_T$ (qui est aussi un polynôme de $\hat{Q}_1$) donne, à cause du terme x_1x_2, un polynôme qui a en plus une combinaison linéaire des termes $\hat{x}_1^2$, $\hat{x}_2^2$, $\hat{x}_1^2\hat{x}_2$, $\hat{x}_1\hat{x}_2^2$ et $\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2$, *i.e.* une combinaison linéaire des termes de $\hat{Q}_2$. On ne retrouve pas $\hat{Q}_1$. C'est en particulier pour cette raison que lorsqu'on définit des éléments équivalents, les fonctions de P_T sont définies en composant celles de $\hat{P}$ avec l'application F^{-1}.

La définition et les propriétés de l'élément fini de Lagrange (T, P_T, Σ_T) s'adaptent au cas des quadrilatères, puisqu'elles sont générales, la notion d'équivalence aussi puisque $\mathcal{F}_T$ est régulière et bijective. On peut remplacer l'équivalence affine par l'équivalence bilinéaire. En particulier, la formule (4.5) est valable pour des éléments finis de Lagrange équivalents:

$$(\Pi_T\, v) \circ \mathcal{F}_T = \Pi_{\hat{T}}(v \circ \mathcal{F}_T)\,.$$

Par contre les résultats d'approximation sont différents.

• **Résultats d'approximation.** Il sera commode d'introduire la semi-norme

$$\forall v \in H^m(\Omega)\,,\ [v]_{m,\Omega} = (\|\frac{\partial^m v}{\partial x_1^m}\|_{0,\Omega}^2 + \|\frac{\partial^m v}{\partial x_2^m}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}\,.$$

Noter que pour $m = 0$ ou 1, $[v]_{m,\Omega} = |v|_{m,\Omega}$.

Théorème 5.2 de Aronszajn-Smith (admis). *Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $I\!R^2$ et $m \geq 1$ un entier. Il existe une constante C telle que*

$$\forall v \in H^m(\Omega)\,,\ \|v\|_{m,\Omega} \leq C(\|v\|_{0,\Omega}^2 + [v]_{m,\Omega}^2)^{1/2}\,,$$

i.e. l'application $v \mapsto (\|v\|_{0,\Omega}^2 + [v]_{m,\Omega}^2)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

Alors on a une extension du Théorème de Deny-Lions.

Théorème 5.3 (exercice). *Soit $\hat{T}$ le carré de référence dans $I\!R^2$ (donc Lipschitzien et connexe). Pour chaque entier $k \geq 0$, il existe une constante $\hat{C}$ telle que*

$$\forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T})/\hat{Q}_k\,,\ \|\hat{v}\|_{H^{k+1}(\hat{T})/\hat{Q}_k} \leq C[\hat{v}]_{k+1,\hat{T}}\,,$$

i.e. l'application $\hat{v} \mapsto [\hat{v}]_{k+1,\hat{T}}$ est une norme sur $H^{k+1}(\hat{T})/\hat{Q}_k$ équivalente à la norme quotient.

•**Notation.** Soient $1 \leq j \leq m$ deux entiers. On note $I(j,m)$ l'ensemble des multi-entiers $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ qui vérifient

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = j\ ,\ i_1 + 2i_2 + \ldots + m\, i_m = m\,.$$

Par exemple, si $m = 3$,

$$I(1,3) = (0,0,1)\ ,\ I(2,3) = (1,1,0)\ ,\ I(3,3) = (3,0,0)\,.$$

Théorème 5.4 (admis). *Soit $\hat{T}$ le carré de référence et T un quadrilatère convexe, non réduit à un triangle. Si $\hat{v}$ appartient à $H^m(\hat{T})$, la fonction $v = \hat{v} \circ \mathcal{F}_T^{-1}$ appartient à $H^m(T)$ et pour chaque $m \geq 1$, il existe une constante C_m, indépendante de T, telle que pour tout $\hat{v} \in H^m(\hat{T})$,*

$$|v|_{m,T} \leq C_m \|J_{\mathcal{F}}\|_{\infty,\hat{T}}^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\hat{v}|_{j,\hat{T}}^2 \sum_{i \in I(j,m)} \|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}^{2i_1} \cdots \|D^m \mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}^{2i_m}\Big)^{1/2}. \tag{5.1}$$

Quand $m = 0$, on a

$$\|v\|_{0,T} \leq \|J_{\mathcal{F}}\|_{\infty,\hat{T}}^{1/2} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}} .$$

Théorème 5.5 (admis). *Soit $\hat{T}$ le carré de référence et T un quadrilatère convexe, non réduit à un triangle. Si v appartient à $H^m(T)$, la fonction $\hat{v} = v \circ \mathcal{F}_T$ appartient à $H^m(\hat{T})$ et pour chaque $m \geq 1$, il existe une constante C_m, indépendante de T, telle que pour tout $v \in H^m(T)$,*

$$[\hat{v}]_{m,\hat{T}} \leq C_m \|J_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{\infty,T}^{1/2} |v|_{m,T} \|D\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}}^{m} . \tag{5.2}$$

Quand $m = 0$, on a

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{T}} \leq \|J_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{\infty,T}^{1/2} \|v\|_{0,T} .$$

Remarque. La majoration (5.1) ne dépend pas du fait que $\mathcal{F}_T$ est bilinéaire. Elle est valable pour n'importe quelle transformation $\mathcal{F}_T$ bijective, de classe $\mathcal{C}^m$. Par contre, la majoration (5.2) utilise le fait que $\mathcal{F}_T$ est bilinéaire. Si $\mathcal{F}_T$ était une transformation générale, à la place de (5.2) on aurait une majoration de la même forme que (5.1), avec les facteurs d'ordre supérieurs $[D^2\mathcal{F}_T]_{\infty,\hat{T}}^{2i_2}, \ldots, [D^m\mathcal{F}_T]_{\infty,\hat{T}}^{2i_m}$, où

$$[D^k \mathcal{F}_T]_{\infty,\hat{T}} = (\|\frac{\partial^k \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_1^k}\|_{\infty,\hat{T}}^2 + \|\frac{\partial^k \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_2^k}\|_{\infty,\hat{T}}^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

au lieu des semi-normes complètes. (Noter que $[D\mathcal{F}_T]_{\infty,\hat{T}} = \|D\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}}$). Dans le cas présent, où $\mathcal{F}_T$ est bilinéaire, ces facteurs sont nuls car $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_1^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_T}{\partial \hat{x}_2^2} = (0,0)$ et la somme se réduit à un seul terme qui correspond à $j = m$. Par contre, si on applique l'analogue de la formule (5.1) à $|\hat{v}|_{m,\hat{T}}$ on trouve bien le facteur $\|D^2\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}}^{2i_2}$ car il n'est pas nul. C'est pourquoi la majoration (5.2) donne de meilleures estimations d'erreur que si on majore directement $|\hat{v}|_{m,\hat{T}}$ par l'analogue de (5.1) et ceci explique pourquoi on introduit la semi-norme $[\cdot]_k$.

Pour utiliser ces deux théorèmes, il faut estimer les normes de $\|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}, \ldots, \|D^m\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}$, $\|J_{\mathcal{F}}\|_{\infty,\hat{T}}$, $\|J_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{\infty,T}$ et $\|D\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}}$. D'après les formules précédentes,

$$\|J_{\mathcal{F}}\|_{\infty,\hat{T}} \leq C_1 h_T^2 \ , \ \|J_{\mathcal{F}^{-1}}\|_{\infty,T} \leq C_2 \frac{1}{\rho_T^2} ,$$

$$\|D\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}} \le C_3 h_T \ , \ \|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T} \le C_4 \frac{h_T}{\rho_T^2} \le C_4 \frac{\sigma_T}{\rho_T} \ ,$$

$$\|D^2\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}} = (|a_1^3 - a_1^2 - a_1^4 + a_1^1|^2 + |a_2^3 - a_2^2 - a_2^4 + a_2^1|^2)^{1/2} \le h_T \ .$$

•**Notation.** Soit $m \ge 2$ un entier. On note $I'(2,m)$ l'ensemble des multi-entiers $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_{m-1})$ tels que

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_{m-1} = 2 \ , \ i_1 + 2i_2 + \ldots + (m-1)i_{m-1} = m \, .$$

Le résultat suivant permet de majorer $\|D^m\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}$.

Théorème 5.6 (admis). *Soit $\hat{T}$ et T comme dans le Théorème 5.4. Pour chaque entier $m \ge 2$, il existe une constante C_m, indépendante de la géométrie de T, telle que*

$$\|D^m\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T} \le C_m \|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T} \|D^2\mathcal{F}_T\|_{\infty,\hat{T}} \sum_{\boldsymbol{i} \in I'(2,m)} \|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}^{i_1} \cdots \|D^{m-1}\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}^{i_{m-1}} \ . \tag{5.3}$$

Par récurrence, ce théorème entraine la majoration:

Corollaire 5.7 (exercice). *Soit $\hat{T}$ et T comme dans le Théorème 5.4. Pour chaque entier $m \ge 2$, il existe une constante C_m, indépendante de la géométrie de T, telle que*

$$\|D^m\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T} \le C_m h_T^{m-1} \|D\mathcal{F}_T^{-1}\|_{\infty,T}^{2m-1} \le C'_m \frac{h_T^{3m-2}}{\rho_T^{2(2m-1)}} \le C'_m \frac{\sigma_T^{3m-2}}{\rho_T^m} \ . \tag{5.4}$$

Corollaire 5.8 (exercice). *Soit $\hat{T}$ et T comme dans le Théorème 5.4. Pour chaque entier $m \ge 1$, il existe une constante C_m, indépendante de la géométrie de T, telle que*

$$\forall \hat{v} \in H^m(\hat{T}) \ , \ |v|_{m,T} \le C_m \frac{\sigma_T^{3m-1}}{\rho_T^{m-1}} \Big(\sum_{j=1}^m |\hat{v}|_{j,\hat{T}}^2 \Big)^{1/2} \ . \tag{5.5}$$

Corollaire 5.9 (exercice). *Soit $\hat{T}$ et T comme dans le Théorème 5.4. Pour chaque entier $m \ge 1$, il existe une constante C_m, indépendante de la géométrie de T, telle que*

$$\forall v \in H^m(T) \ , \ [\hat{v}]_{m,\hat{T}} \le C_m \sigma_T h_T^{m-1} |v|_{m,T} \ . \tag{5.6}$$

Remarque. Quand $m = 0$, on a

$$\begin{aligned} &\forall \hat{v} \in L^2(\hat{T}) \ , \ \|v\|_{0,T} \le C_0 h_T \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}} \\ &\forall v \in L^2(T) \ , \ \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}} \le C'_0 \frac{1}{\rho_T} \|v\|_{0,T} \end{aligned} \ .$$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du Théorème 4.8 de Bramble-Hilbert et du Théorème 5.3, extension du Théorème de Deny-Lions.

Théorème 5.10 (exercice). *Soit $\hat{T}$ le carré de référence dans $\mathbb{R}^2$ et soit $k \geq 0$ et $m \geq 0$ deux entiers tels que $m \leq k+1$. Soit $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T}); H^m(\hat{T}))$ tel que*

$$\forall p \in \hat{Q}_k \, , \, \hat{\Pi}(p) = p \, .$$

Alors, il existe une constante $\hat{C}$, qui ne dépend que de $\hat{\Pi}$, k, m et $\hat{T}$, telle que

$$\forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T}) \ , \ \|\hat{v} - \hat{\Pi}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} \leq \hat{C}[\hat{v}]_{k+1,\hat{T}} \, .$$

Théorème 5.11. *Soit $\hat{T}$ le carré de référence et soit m et k deux entiers comme dans le Théorème 5.10. On suppose qu'il existe un opérateur $\Pi_{\hat{T}} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{T}); H^m(\hat{T}))$ qui vérifie*

$$\forall p \in \hat{Q}_k \, , \, \Pi_{\hat{T}}(p) = p \, . \tag{5.7}$$

Soit T un quadrilatère convexe qui n'est pas réduit à un triangle, $\mathcal{F}_T$ une application bilinéaire qui applique $\hat{T}$ sur T. On définit Π_T par

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \, , \, \Pi_T(v) \circ \mathcal{F}_T = \Pi_{\hat{T}}(v \circ \mathcal{F}_T) \, .$$

Alors, il existe une constante $\hat{C}$ qui ne dépend que de $\Pi_{\hat{T}}$, k, m et $\hat{T}$ (donc indépendante de la géométrie de T) telle que pour $m \geq 1$

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \ , |v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C} \sigma_T^{4m-1} h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,T} \, ,$$

et pour $m = 0$

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \ , \|v - \Pi_T(v)\|_{0,T} \leq \hat{C} \sigma_T h_T^{k+1} |v|_{k+1,T} \, .$$

Démonstration. On considère le cas $m \geq 1$; le cas $m = 0$ est laissé en exercice. En appliquant les formules de changements de variables, on a

$$|v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq C_m \frac{\sigma_T^{3m-1}}{\rho_T^{m-1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |(v - \Pi_T(v)) \circ \mathcal{F}_T|_{j,\hat{T}}^2 \Big)^{1/2} \, .$$

Mais

$$(v - \Pi_T(v)) \circ F_T = v \circ F_T - \Pi_{\hat{T}}(v \circ F_T) = \hat{v} - \Pi_{\hat{T}}(\hat{v}) \, .$$

De plus

$$\|\hat{v} - \Pi_{\hat{T}}(\hat{v})\|_{m,\hat{T}} \leq \hat{C}[\hat{v}]_{k+1,\hat{T}} \, ,$$

et

$$[\hat{v}]_{k+1,\hat{T}} \leq C_{k+1} \sigma_T h_T^k |v|_{k+1,T} \, .$$

D'où
$$\forall v \in H^{k+1}(T)\ ,|v-\Pi_T(v)|_{m,T} \leq C_m\hat{C}C_{k+1}\sigma_T^{4m-1}h_T^{k+1-m}|v|_{k+1,T}\,.$$

VI. Approximation conforme de problèmes d'ordre 2, domaines polygonaux ou polyédriques

Dans ce chapitre, on suppose que Ω est un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, de frontière polygonale ou polyédrique. On restreint la définition de triangulation au cas des triangles, tétraèdres ou quadrilatères.

• **Triangulation $\mathcal{T}_h$.**

Définition 1. Une triangulation de $\overline{\Omega}$ est une décomposition de $\overline{\Omega}$ en un nombre **fini** de triangles ou quadrilatères (si $d=2$) ou tétraèdres (si $d=3$) fermés, appelés éléments, telle que
$$\overline{\Omega} = \bigcup T\,,$$
si T_1 et T_2 sont deux éléments distincts, on a soit $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, soit $T_1 \cap T_2 =$ un sommet ou un côté entier ou une arête entière ou une face entière.

Notation. On désigne la triangulation par $\mathcal{T}_h$, où le paramètre de discrétisation est
$$h = \mathrm{Max}_{T\in\mathcal{T}_h} h_T\,.$$

Définition 2. On dit que $\mathcal{T}_h$ est une famille régulière de triangulations s'il existe une constante σ, indépendante de h, telle que
$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \sigma_T \leq \sigma\,.$$

Définition 3. On dit que $\mathcal{T}_h$ est une famille uniformément régulière de triangulations si elle est régulière et si en plus il existe une constante $\tau > 0$, indépendante de h, telle que
$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \tau\, h \leq h_T \leq \sigma\rho_T\,.$$

Noter que $\tau \leq 1$.

• **Construction d'espaces d'éléments finis conformes dans** $H^1(\Omega)$. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$. Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, soit (T, P_T, Σ_T) un élément fini de Lagrange. A partir de maintenant, on fait l'hypothèse que
$$P_T \subset H^1(\Omega)\,.$$

On définit les espaces d'éléments finis:
$$X_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, v_h|_T \in P_T\}\,,$$
$$X_{0h} = \{v_h \in X_h\,;\, v_h = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\}\,.$$

Théorème 6.1. *Si v est une fonction de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $v|_T$ appartient à $H^1(T)$, alors v appartient à $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Evidemment, $v \in L^2(\Omega)$, car Ω est borné. Il faut montrer que la dérivée au sens des distributions $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \rangle &= -\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_\Omega v\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} \\ &= -\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T v\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \big(\int_T \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \varphi\, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial T} v\, \varphi\, n_i\, d\sigma \big) \,.\end{aligned}$$

Soit T' un côté commun (ou une face commune) à deux éléments adjacents T_1 et T_2. Comme v et φ sont continues dans Ω et que le vecteur normal à T' extérieur à T_1 est le même que celui extérieur à T_2, mais avec la direction opposée, il suit que la contribution de T' à la somme $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v\, \varphi\, n_i\, d\sigma$ est nulle. De plus, si T' est un côté (ou une face) de T sur $\partial\Omega$, la contribution de T' à $\int_{\partial T} v\, \varphi\, n_i\, d\sigma$ est aussi nulle, car φ s'annule sur $\partial\Omega$. Donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ \langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \varphi\, d\boldsymbol{x} \,.$$

Soit f la fonction définie par

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ f|_T = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_T \,.$$

Alors $f \in L^2(\Omega)$ et au sens des distributions,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = f \,.$$

Donc $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. $\diamondsuit$

Conséquence. $X_h \subset H^1(\Omega)$ et $X_{0h} \subset H^1_0(\Omega)$.

On dit que X_h est un espace d'éléments finis conformes dans $H^1(\Omega)$. Pour que ses fonctions approchent bien les fonctions de $H^1(\Omega)$, il faut qu'il contienne "assez de fonctions", c'est-à-dire il faut qu'en assemblant côte à côte les éléments finis, on obtienne "facilement" des fonctions continues. Pour assembler côte à côte les éléments finis d'une triangulation et obtenir des fonctions continues, on fait deux hypothèses.

• Une hypothèse de régularité dans chaque élément T:

Définition. Un élément fini de Lagrange (T, P_T, Σ_T) est de classe $\mathcal{C}^0$ si d'une part le domaine de définition de Σ_T contient $\mathcal{C}^0(T)$, c'est-à-dire les éléments de Σ_T sont des formes linéaires et continues sur $\mathcal{C}^0(T)$, si d'autre part

$$P_T \subset \mathcal{C}^0(T) \,,$$

et si pour tout côté T' de T, l'ensemble $\Sigma_{T'}$ des formes de Σ_T qui ont leur support sur T' est $P_{T'}$-unisolvent, où

$$P_{T'} = \{p|_{T'} \,;\, p \in P_T\}\,.$$

Noter que dans ce cas, la restriction $(T', P_{T'}, \Sigma_{T'})$ est aussi un élément fini de Lagrange.

• Une hypothèse de compatibilité aux interfaces entre deux éléments adjacents:

Hypothèse H. Soit T_1 et T_2 une paire quelconque d'éléments adjacents de $\mathcal{T}_h$ et soit T' leur côté commun (ou face commune). On suppose que

$$P_{T_1'} = P_{T_2'} \quad \text{et} \quad \Sigma_{T_1'} = \Sigma_{T_2'}\,.$$

Remarque. Les exemples simpliciaux numérotés de (i) à (v) et les exemples quadrilatéraux numérotés de (i) à (iv) vérifient ces deux hypothèses.

Théorème 6.2 (exercice). *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ et pour chaque T de $\mathcal{T}_h$, soit (T, P_T, Σ_T) un élément fini de Lagrange de classe $\mathcal{C}^0$. On suppose que l'ensemble,*

$$\{(T, P_T, \Sigma_T)\,;\, T \in \mathcal{T}_h\}\,,$$

satisfait l'hypothèse H. On définit l'opérateur d'interpolation global $\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); L^2(\Omega))$ par

$$\forall v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \Pi_h(v)|_T = \Pi_T(v|_T)\,.$$

Alors $\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}))$ et les espaces X_h et X_{0h} définis plus haut sont caractérisés par

$$X_h = \{\Pi_h(v)\,;\, v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\} \quad \textit{et} \quad X_{0h} = \{\Pi_h(v)\,;\, v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,,\, v|_{\partial\Omega} = 0\}\,.$$

• **Degrés de liberté et fonctions de base.** Soient X_h et X_{0h} comme dans le Théorème 6.2. On note Σ_h l'ensemble de toutes les formes linéaires indépendantes distinctes

$$\Sigma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T\,,$$

où dans la réunion, on supprime les formes qui sont répétées ou ne sont pas linéairement indépendantes. Soit $N_h = \text{card}(\Sigma_h)$; on numérote de 1 à N_h les formes linéaires, en numérotant en premier (disons de 1 à N_{0h}) les formes dont le support n'intersecte pas $\partial\Omega$ et en dernier celles dont le support se trouve sur une portion de $\partial\Omega$. On note

$$\Sigma_h = \{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h} \quad \text{et} \quad \Sigma_{0h} = \{\varphi_i\}_{i=1}^{N_{0h}}\,.$$

Pour chaque i soit p_i la fonction de base de X_h telle que

$$\forall j\ ,\ 1 \le j \le N_h\ ,\ \varphi_j(p_i) = \delta_{ij}\,.$$

L'ensemble Σ_h (resp. Σ_{0h}) est appelé l'ensemble des degrés de liberté de X_h (resp. X_{0h}) et l'ensemble $\{p_i\}_{i=1}^{N_h}$ (resp. $\{p_i\}_{i=1}^{N_{0h}}$) est l'ensemble des fonctions de base de X_h (resp. X_{0h}). Toute fonction v_h de X_h (resp. X_{0h}) s'écrit

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i(v_h) p_i \quad (\text{resp.} \quad \sum_{i=1}^{N_{0h}} \varphi_i(v_h) p_i \ ) \,.$$

• **Erreur d'interpolation dans $H^1(\Omega)$**

Théorème 6.3. *Soit $\hat{T}$ le triangle ou tétraèdre ou carré de référence et soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangulations de $\overline{\Omega}$ composées de triangles, tétraèdres ou quadrilatères selon le choix de $\hat{T}$. Soit $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange de référence de classe $\mathcal{C}^0$ tel que ses restrictions aux côtés (ou faces) de $\hat{T}$ soient affines équivalentes entre elles et tel que pour un entier $k \geq 1$, l'opérateur $\hat{\Pi}$ préserve les polynômes de $I\!P_k$ ou $\hat{Q}_k$ si $\hat{T}$ est un carré:*

$$\forall p \in I\!P_k \ (\text{ou } \hat{Q}_k \text{ si } \hat{T} \text{ est un carré }) \ , \ \hat{\Pi}(p) = p \,.$$

Pour chaque T de $\mathcal{T}_h$, soit (T, P_T, Σ_T) un élément fini de Lagrange affine équivalent (ou bilinéaire équivalent si $\hat{T}$ est un carré) à $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Alors d'une part, (T, P_T, Σ_T) est aussi de classe $\mathcal{C}^0$ et d'autre part l'ensemble,

$$\{(T, P_T, \Sigma_T) \, ; \, T \in \mathcal{T}_h\} \,,$$

vérifie l'hypothèse H. Soit X_h l'espace correspondant et Π_h son opérateur d'interpolation. Alors pour $\ell = 0$ ou 1, il existe une constante C, indépendante de h, telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega) \ , \ |v - \Pi_h(v)|_{\ell,\Omega} \leq C h^{k+1-\ell} |v|_{k+1,\Omega} \,.$$

Démonstration. On vérifie facilement que par construction, chaque élément (T, P_T, Σ_T) est de classe $\mathcal{C}^0$ et que l'ensemble,

$$\{(T, P_T, \Sigma_T) \, ; \, T \in \mathcal{T}_h\} \,,$$

satisfait l'hypothèse H. Donc Π_h appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); X_h)$ et donc aussi à $\mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega); X_h)$ pour $k \geq 1$. Comme, $\Pi_h(v) \in X_h \subset H^1(\Omega)$, on a

$$|v - \Pi_h(v)|^2_{\ell,\Omega} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h(v)|^2_{\ell,T} \,.$$

Dans chaque T, $\Pi_T \in \mathcal{L}(H^{k+1}(T); H^\ell(T))$, est invariant par transformation affine (ou bilinéaire si T est un quadrilatère) et préserve les polynômes de $I\!P_k$ (ou les fonctions de

$\mathcal{Q}_k$ si T est un quadrilatère). Enfin $k+1 > \ell$. Donc l'erreur d'interpolation dans chaque T est

$$|v - \Pi_T(v)|_{\ell,T} \leq \hat{C}\sigma_T^s h_T^{k+1-\ell}|v|_{k+1,T}\,,$$

où $s = \ell$ si T est un triangle ou tétraèdre et $s = 1$ si $\ell = 0$ et $s = 3$ si $\ell = 1$ lorsque T est un quadrilatère. D'où le résultat avec $C = \hat{C}\sigma^s$. $\diamondsuit$

Corollaire 6.4. *On suppose que X_h est comme dans le Théorème 6.3. Alors pour $\ell = 0$ ou 1,*

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)\ ,\ \inf_{v_h \in X_h} |v - v_h|_{\ell,\Omega} \leq Ch^{k+1-\ell}|v|_{k+1,\Omega}\,.$$

Corollaire 6.5. *On suppose que X_h est comme dans le Théorème 6.3. Alors pour $\ell = 0$ ou 1,*

$$\forall v \in H^{\ell}(\Omega)\ ,\ \lim_{h\to 0}\inf_{v_h \in X_h} |v - v_h|_{\ell,\Omega} = 0\,.$$

• **Une inégalité inverse**

Proposition 6.6. *En plus des hypothèses du Théorème 6.3, on suppose que $\mathcal{T}_h$ est uniformément régulière. Alors, il existe une constante C, indépendante de h, telle que*

$$\forall v_h \in X_h\ ,\ |v_h|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{h}\|v_h\|_{0,\Omega}\,.$$

Démonstration. On considère le cas simpliciel; le cas quadrilatéral est laissé en exercice.

$$|v_h|_{1,\Omega}^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} |v_h|_{1,T}^2 \leq C_1^2 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} |\det(B_T)|\|B_T^{-1}\|^2|\hat{v}_h|_{1,\hat{T}}^2\,.$$

Mais $\hat{v}_h|_{\hat{T}}$ appartient à $\hat{P}$, espace de dimension finie et fixe sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Donc

$$|\hat{v}_h|_{1,\hat{T}} \leq \|\hat{v}_h\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{v}_h\|_{0,\hat{T}}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}|v_h|_{1,\Omega}^2 &\leq \hat{C}^2C_1^2\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|\det(B_T)||\det(B_T)|^{-1}\|B_T^{-1}\|^2\|v_h\|_{0,T}^2\\ &\leq \hat{C}^2C_1^2h_{\hat{T}}^2\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{\rho_T^2}\|v_h\|_{0,T}^2\,.\end{aligned}$$

Comme la triangulation est uniformément régulière,

$$\rho_T \geq \frac{\tau}{\sigma}h\,,$$

donc

$$|v_h|_{1,\Omega}^2 \leq \hat{C}^2C_1^2h_{\hat{T}}^2(\frac{\sigma}{\tau})^2\frac{1}{h^2}\|v_h\|_{0,\Omega}^2\,,$$

d'où le résultat avec $C = \hat{C}C_1 h_{\hat{T}} \frac{\sigma}{\tau}$. $\diamondsuit$

Remarques. L'énoncé de la proposition est indépendant de la dimension en ce sens que seule la constante C dépend de la dimension. De plus, la proposition est valable pour des espaces plus généraux. Ici on utilise seulement le fait que P_T est un espace dont la dimension est finie et indépendante de T.

Noter que le facteur C/h tend vers l'infini quand h tend vers zéro, ce qui correspond bien au fait que l'inégalité de la Proposition 6.6 est fausse dans $H^1(\Omega)$.

• **Application à l'approximation d'un problème de Dirichlet et d'un prolème de Neumann pour le Laplacien.** On veut discrétiser le problème de Dirichlet pour le Laplacien:

Pour f *donné dans* $H^{-1}(\Omega)$ *chercher* $u \in H^1(\Omega)$ *tel que:*

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,.$$

Ce problème a la formulation variationnelle équivalente

Chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\ ,\ (\nabla u, \nabla v) = \langle f, v\rangle\,. \tag{6.1}$$

Soient X_h et X_{0h} les espaces définis dans l'énoncé du Théorème 6.3 pour un entier $k \geq 1$ et une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$; noter que $X_{0h} = X_h \cap H_0^1(\Omega)$. Avec ces espaces, on discrétise (6.1) par la méthode d'éléments finis conformes:

Chercher $u_h \in X_{0h}$ *tel que:*

$$\forall v_h \in X_{0h}\ ,\ (\nabla u_h, \nabla v_h) = \langle f, v_h\rangle\,. \tag{6.2}$$

Le Lemme de Céa donne

$$|u - u_h|_{1,\Omega} = \inf_{v_h \in X_{0h}} |u - v_h|_{1,\Omega}\,.$$

Donc le Corollaire 6.4 entraine que si la solution u de (6.1) appartient à $H^{k+1}(\Omega)$, alors il existe une constante C, indépendante de h et u, telle que

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}\,.$$

De même, on veut discrétiser le problème de Neumann pour le Laplacien:

Pour f *donné dans* $L^2(\Omega)$ *vérifiant la condition de compatibilité*

$$\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} = 0\,,$$

chercher $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ *tel que:*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,.$$

Ce problème a la formulation variationnelle équivalente

Chercher $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ *tel que:*

$$\forall v \in H^1(\Omega)\ ,\ (\nabla u, \nabla v) = (f, v)\,. \tag{6.3}$$

On discrétise (6.3) par la méthode d'éléments finis conformes:

Chercher $u_h \in X_h/\mathbb{R}$ *tel que:*

$$\forall v_h \in X_h\ ,\ (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h)\,, \tag{6.4}$$

où X_h est le même espace que ci-dessus. Le Lemme de Céa donne donc

$$|u - u_h|_{1,\Omega} = \inf_{v_h \in X_h} |u - v_h|_{1,\Omega}\,.$$

Donc le Corollaire 6.4 entraine que si la solution u de (6.3) appartient à $H^{k+1}(\Omega)$, alors il existe une constante C, indépendante de h et u, telle que

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \le C h^k |u|_{k+1,\Omega}\,.$$

• **L'argument de dualité d'Aubin-Nitsche.** Reprenons le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Avec les mêmes hypothèses de régularité sur u, l'inégalité de Poincaré entraine que

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le C h^k |u|_{k+1,\Omega}\,.$$

Mais si on compare avec l'erreur d'interpolation $\|u - \Pi_h(u)\|_{0,\Omega}$, on constate qu'on perd un facteur h. Le théorème suivant permet de retrouver ce facteur.

Théorème 6.7 (Aubin-Nitsche). *On garde les hypothèses du Théorème 6.3 et on suppose en plus que* Ω *est convexe. Alors, si la solution* u *de (6.1) appartient à* $H^{k+1}(\Omega)$*, il existe une constante* C*, indépendante de* h *et de* u*, telle que*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le C h^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}\,.$$

Démonstration. On écrit

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{(u - u_h, g)}{\|g\|_{0,\Omega}}\,.$$

Puis, pour chaque $g \in L^2(\Omega)$, on cherche φ dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta\varphi = g \ \text{ dans } \Omega \ \text{ et } \ \varphi = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\,.$$

Ce problème admet une solution unique et comme Ω est convexe, $\varphi \in H^2(\Omega)$ et il existe une constante C_1, qui ne dépend ni de φ, ni de g, telle que

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \le C_1\|g\|_{0,\Omega}\,.$$

Alors

$$(u-u_h,g) = (u-u_h,-\Delta\varphi) = (\nabla(u-u_h),\nabla\varphi) = (\nabla(u-u_h),\nabla(\varphi-\varphi_h))\,,\ \forall\varphi_h \in X_{0h}\,.$$

Donc

$$|(u-u_h,g)| \le |u-u_h|_{1,\Omega} \inf_{\varphi_h\in X_{0h}} |\varphi-\varphi_h|_{1,\Omega}\,.$$

D'après le Corollaire 6.4, appliqué avec $k=1$ et $\ell=1$

$$\inf_{\varphi_h\in X_{0h}} |\varphi-\varphi_h|_{1,\Omega} \le C_2 h|\varphi|_{2,\Omega} \le C_1C_2h\|g\|_{0,\Omega}\,.$$

Donc

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le C_1C_2h|u-u_h|_{1,\Omega}\,, \tag{6.5}$$

d'où le résultat. ♢

Exercice. Démontrer le Théorème d'Aubin-Nitsche pour le problème de Neumann. Peut-on le démontrer pour un problème avec conditions mêlées?

• Résultats d'approximation dans $W^{1,p}$.

Jusqu'à présent, nous avons étudié l'approximation dans $H^1(\Omega)$, qui est l'espace naturel associé au laplacien, et par dualité dans $L^2(\Omega)$. Mais on peut se poser la question de l'approximation dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $p \neq 2$. Pour simplifier, on ne le fera que dans le cas de triangles en dimension deux. Avant d'estimer l'erreur $u-u_h$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ (ce qui est difficile), il faut déjà savoir majorer l'erreur d'interpolation dans $W^{1,p}(\Omega)$. Le résultat de base, qui est le Théorème 1.18 de Deny-Lions, est valable dans $W^{k+1,p}(\Omega)$ pour tout nombre $p \in [1,\infty]$; il suffit de modifier un peu la démonstration dans le cas $p=\infty$.

Théorème 6.8 (admis). *On suppose que Ω est lipschitzien et connexe. Pour tout entier $k \ge 0$ et tout nombre $p \in [1,\infty]$, il existe une constante C, qui ne dépend que de Ω, k et p, telle que*

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k\ ,\ \|v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \le C|v|_{k+1,p,\Omega}\,. \tag{6.6}$$

Ensuite, on a besoin d'un théorème de changement de variables, analogue au Théorème 4.2.

Théorème 6.9 (admis). *Pour chaque entier $m \geq 0$ et pour tout nombre p avec $1 \leq p \leq \infty$, l'application $v \mapsto \hat{v} = v \circ F_T$ est un isomorphisme de $W^{m,p}(T)$ sur $W^{m,p}(\hat{T})$ et il existe des constantes C_1 et C_2, qui dépendent de m et p mais ni de T, ni de v, telles que*

$$\forall v \in W^{m,p}(T)\ ,\ |\hat{v}|_{m,p,\hat{T}} \leq C_1 \|B_T\|^m\, |\det(B_T)|^{-1/p} |v|_{m,p,T}\,, \tag{6.7}$$

$$\forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{T})\ ,\ |v|_{m,p,T} \leq C_2 \|B_T^{-1}\|^m\, |\det(B_T)|^{1/p} |\hat{v}|_{m,p,\hat{T}}\,. \tag{6.8}$$

Avec ces deux résultats, on déduit facilement la généralisation suivante du Théorème 6.3.

Théorème 6.10 (exercice). *On se place sous les hypothèses du Théorème 6.3. Soit un entier $k \geq 1$, $\ell = 0$ ou 1 et un nombre $p \in [2, \infty]$. Il existe une contante C, indépendante de T et de h, telle que*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \forall v \in W^{k+1,p}(T)\ ,\ |v - \Pi_h(v)|_{\ell,p,T} \leq C\, \sigma_T^\ell\, h_T^{k+1-\ell} |v|_{k+1,p,T}\,. \tag{6.9}$$

Noter que l'exposant p est le même de chaque côté de (6.9). Cette restriction n'est pas indispensable: on peut estimer $|v - \Pi_h(v)|_{\ell,q,T}$ pour une fonction v appartenant à $W^{k+1,p}(T)$, pourvu que k, p, ℓ, q soient tels que $W^{k+1,p}(T) \subset W^{\ell,q}(T)$:

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \forall v \in W^{k+1,p}(T)\ ,\ |v - \Pi_h(v)|_{\ell,q,T} \leq C\, \sigma_T^\ell |\det(B_T)|^{1/q-1/p}\, h_T^{k+1-\ell} |v|_{k+1,p,T}\,. \tag{6.10}$$

Lorsque la triangulation est régulière, on peut englober le facteur σ_T dans la constante C et comme nous nous sommes restreints à la dimension deux, on trouve facilement que (6.10) entraine, avec une autre constante C, indépendante de T et de h, telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \forall v \in W^{k+1,p}(T)\ ,\ |v - \Pi_h(v)|_{\ell,q,T} \leq C\, h_T^{k+1-\ell+2(1/q-1/p)} |v|_{k+1,p,T}\,. \tag{6.11}$$

Une extension du Théorème 1.17 entraine que $W^{k+1,p}(T) \subset W^{\ell,q}(T)$, pourvu que

$$k + 1 - \ell + 2(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) \geq 0\,;$$

par conséquent, le facteur $h_T^{k+1-\ell+2(1/q-1/p)}$ peut être majoré par $h^{k+1-\ell+2(1/q-1/p)}$.

En fait, la restriction $p \geq 2$ ci-dessus, n'est pas non plus indispensable. Le Théorème 6.10 a lieu aussi pour tout $p \geq 1$.

En ce qui concerne l'inégalité inverse de la Proposition 6.6, on peut aussi l'étendre facilement.

Lemme 6.11 (exercice). *Soit p et q deux nombres tels que $1 \leq p, q \leq \infty$. Il existe une constante C, indépendante de h et de T, telle que*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\,, \forall v_h \in X_h\ ,\ |v_h|_{1,p,T} \leq C\, h_T^{2/p} \rho_T^{-(1+2/q)} \|v_h\|_{0,q,T}\,. \tag{6.12}$$

Remarque. On montre facilement que, si $p = q$, alors

$$|v_h|_{1,p,T} \leq C \frac{1}{\rho_T} \|v_h\|_{0,p,T} ,$$

et donc, si la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est uniformément régulière, on a

$$\forall v_h \in X_h \ , \ |v_h|_{1,p,\Omega} \leq C_p \frac{1}{h} \|v_h\|_{0,p,\Omega} , \tag{6.13}$$

avec une constante C_p qui dépend de p, mais pas de h.

L'inégalité locale (6.12) peut faire croire que si $p < q$, alors on a l'inégalité globale (6.13) avec une puissance de h moins défavorable. Ce n'est pas vrai. Par exemple, prenons $p = 2$ et $q = 4$. Alors, (6.12) donne bien

$$|v_h|_{1,T} \leq C\, \sigma_T \frac{1}{\rho_T^{1/2}} \|v_h\|_{0,4,T} \leq C \frac{1}{h^{1/2}} \|v_h\|_{0,4,T} ,$$

mais si on somme sur tous les éléments de $\mathcal{T}_h$, on trouve seulement

$$|v_h|_{1,\Omega} \leq C \frac{1}{h^{1/2}} (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{0,4,T}^2)^{1/2} .$$

La seule manière de retrouver la norme de $L^4(\Omega)$ au second membre est d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète:

$$(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{0,4,T}^2)^{1/2} \leq (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1)^{1/4} \|v_h\|_{0,4,\Omega} .$$

Or, si la famille $\mathcal{T}_h$ est uniformément régulière, on a

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1 \leq \frac{C}{h^2} \quad \text{soit} \quad (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1)^{1/4} \leq \frac{C}{h^{1/2}} ,$$

et on trouve

$$\forall v_h \in X_h \ , \ |v_h|_{1,\Omega} \leq C \frac{1}{h} \|v_h\|_{0,4,\Omega} .$$

Ce raisonnement est général et s'étend à tout $p \leq q$:

$$\forall v_h \in X_h \ , \ |v_h|_{1,p,\Omega} \leq C \frac{1}{h} \|v_h\|_{0,q,\Omega} , \tag{6.14}$$

avec une constante C indépendante de h. $\diamondsuit$

Enfin, le résultat suivant dû en particulier à Rannacher et Scott, dont la démonstration est difficile, donne l'erreur d'approximation des problèmes (6.1) et (6.3).

Théorème 6.12 (admis). *On suppose que Ω est un polygone convexe et que $\mathcal{T}_h$ est une famille de triangulations uniformément régulières de $\overline{\Omega}$. Soit u la solution de (6.1) (resp. (6.3)) et u_h la solution de (6.2) (resp. (6.4)). Soit un nombre $p \in [2, \infty]$, un entier $k \geq 1$ et un entier ℓ avec $0 \leq \ell \leq k$. On suppose que $u \in W^{\ell+1,p}(\Omega)$. Alors, il existe une constante C, indépendante de h, telle que*

$$|u - u_h|_{1,p,\Omega} \leq C\, h^{\ell} \|u\|_{\ell+1,p,\Omega}\,. \tag{6.13}$$

• **Estimations d'erreur a posteriori.** Les résultats précédents sont des estimations *a priori* car elles sont exprimées en fonction de la solution, qui en général n'est pas connue. Par contre les estimations *a posteriori* s'écrivent en fonction de la solution discrète qu'on a calculée. Pour simplifier, nous illustrons cette notion avec le problème (6.2). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de (6.1) et $u_h \in X_{0h}$ la solution de (6.2). Alors, puisque $u - u_h$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}|u - u_h|_{1,\Omega} &= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\nabla(u - u_h), \nabla\varphi)}{|\varphi|_{1,\Omega}} = \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle -\Delta u + \Delta u_h, \varphi\rangle}{|\varphi|_{1,\Omega}} \\ &= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f + \Delta u_h, \varphi\rangle}{|\varphi|_{1,\Omega}} = \|f + \Delta u_h\|_{-1,\Omega}\,.\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que $f \in L^2(\Omega)$; alors, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi_h \in X_{0h}$, en utilisant (6.2), on a

$$\begin{aligned}\forall \varphi_h \in X_{0h}\,,\ \langle f + \Delta u_h, \varphi\rangle &= \int_\Omega f\,\varphi\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u_h \nabla \varphi\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega f\,(\varphi - \varphi_h)\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(\varphi - \varphi_h)\, d\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big(\int_T f\,(\varphi - \varphi_h)\, d\boldsymbol{x} - \int_T \nabla u_h \cdot \nabla(\varphi - \varphi_h)\, d\boldsymbol{x}\Big)\,.\end{aligned}$$

Notons Γ_h l'ensemble de tous les segments T' de $\mathcal{T}_h$ intérieurs à Ω, fixons une orientation de la normale unité $\boldsymbol{n}$ à chacun de ces segments T' et notons $[g]_{T'}$ le saut d'une fonction discontinue g à travers T' le long de la normale $\boldsymbol{n}$. Comme les fonctions u et u_h sont dans $H^1(T)$, la formule de Green dans chaque T donne pour tout $\varphi_h \in X_{0h}$:

$$\begin{aligned}\langle f + \Delta u_h, \varphi\rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta u_h)(\varphi - \varphi_h)\, d\boldsymbol{x} - \sum_{T' \in \Gamma_h} \int_{T'} [\frac{\partial u_h}{\partial \boldsymbol{n}}]_{T'} (\varphi - \varphi_h)\, d\sigma \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|\varphi - \varphi_h\|_{0,T} + \sum_{T' \in \Gamma_h} \|[\frac{\partial u_h}{\partial \boldsymbol{n}}]\|_{0,T'} \|\varphi - \varphi_h\|_{0,T'}\,.\end{aligned}$$

On désigne par $S(T)$ les côtés de T qui sont intérieurs à Ω, on fixe un entier m, on choisit une approximation f_{mh} de f dans l'espace

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega)\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, q_h|_T \in I\!P_m\}\,,$$

et on définit la quantité

$$\eta(T) = h_T \|f_{mh} + \Delta\, u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{T' \in S(T)} |T'|^{1/2} \|[\frac{\partial u_h}{\partial \boldsymbol{n}}]\|_{0,T'}\,. \tag{6.14}$$

Alors on a les estimations d'erreur *a posteriori* suivantes.

Théorème 6.13 (admis). *On suppose que la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière. Alors, il existe deux constantes C_1 et C_2, indépendantes de h, telles que*

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \le C_1 \big(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{\eta(T)^2 + h_T^2 \|f - f_{mh}\|_{0,T}^2\} \big)^{1/2}\,, \tag{6.15}$$

$$\eta(T) \le C_2 (|u - u_h|_{1,\omega_T} + h_T \|f - f_{mh}\|_{0,\omega_T})\,, \tag{6.16}$$

où ω_T désigne le macro-élément composé des triangles de $\mathcal{T}_h$ adjacents à T.

VII. Le problème de Stokes, analyse théorique

• **Le problème homogène.** *Etant donné un vecteur $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$ et une constante $\nu > 0$, chercher un vecteur $\boldsymbol{u}$ et un scalaire p tels que:*

$$-\nu \Delta\, \boldsymbol{u} + \nabla\, p = \boldsymbol{f}\ ,\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ dans } \Omega\,, \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{7.2}$$

Fixons les espaces où chercher $\boldsymbol{u}$ et p. D'après la première équation de (7.1), il est raisonnable de chercher $\boldsymbol{u}$ dans $H_0^1(\Omega)^d$, muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$, et p dans $L^2(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. Mais p n'est défini que par son gradient, donc à une constante additive près, lorsque le domaine est connexe (ce qu'on supposera). En théorie, on fixe la constante en cherchant p à moyenne nulle, i.e. dans l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega)\,;\, \int_\Omega q\, d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

Avec ces espaces, on a une première formulation variationnelle

Chercher $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que:

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d\,,\ \nu(\nabla\, \boldsymbol{u}, \nabla\, \boldsymbol{v}) - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle\,, \tag{7.3}$$

$$\forall q \in L^2_0(\Omega)\,,\ (q, \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = 0\,, \tag{7.4}$$

où l'équation $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ est mise sous la forme (7.4) pour faire pendant au terme $(p, \operatorname{div} \boldsymbol{v})$ de (7.3). Remarquons que ce problème admet toujours au plus une solution. En effet, si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, alors en prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, on trouve $\nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, donc $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Alors $\nabla p = \boldsymbol{0}$ et $p = 0$.

On peut éliminer l'inconnue p dans (7.3) en prenant les fonctions tests dans l'espace des fonctions à divergence nulle

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d\,;\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ dans } \Omega\}\,. \tag{7.5}$$

Alors on a une deuxième formulation variationnelle

Chercher $\boldsymbol{u} \in V$ *tel que:*

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\,,\ \nu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle\,. \tag{7.6}$$

Il est facile de résoudre (7.6) grâce au Lemme de Lax-Milgram.

Proposition 7.1 (exercice). *Le problème (7.6) a une solution et une seule* $\boldsymbol{u} \in V$ *et*

$$|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega} \le \frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}\,. \tag{7.7}$$

Remarque. La dificulté consiste maintenant à faire le lien entre les deux formulations variationnelles, car rien ne dit que la solution de (7.6) est encore solution de (7.3). Pour cela, il faudrait retrouver une fonction p. Or pour tout v dans $H^1(\Omega)$, $\Delta v \in H^{-1}(\Omega)$; donc la solution $\boldsymbol{u}$ de (7.6) vérifie $-\nu\Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$ et $-\nu\Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ s'annule sur V. Peut-on conclure que c'est un gradient? (Noter que la réciproque est vraie: si c'est un gradient, alors $-\nu\Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ s'annule sur V). La réponse est donnée par une conséquence du théorème suivant, dont la démonstration est difficile.

Théorème 7.2 (admis). *On suppose que Ω est Lipschitzien et connexe. Il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(L^2_0(\Omega); H^1_0(\Omega)^d)$ tel que*

$$\forall f \in L^2_0(\Omega)\,, \operatorname{div} T(f) = f\,,$$

et il existe une constante $\mathcal{K}$ tell que

$$\forall f \in L^2_0(\Omega)\,,\ |T(f)|_{1,\Omega} \le \frac{1}{\mathcal{K}}\|f\|_{0,\Omega}\,.$$

Autrement dit, pour chaque pression $q \in L^2_0(\Omega)$, il existe une vitesse $\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^d$ telle que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = q \ \text{ dans } \Omega \ \text{ et } |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \le \frac{1}{\mathcal{K}}\|q\|_{0,\Omega}\,.$$

Maintenant, si $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ est n'importe quelle fonction qui vérifie $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = q$ dans Ω, d'après le Lemme de Lax-Milgram, il existe une unique fonction $\boldsymbol{v}_0 \in V$ solution de

$$\forall \boldsymbol{w} \in V\,,\ (\nabla\, \boldsymbol{v}_0, \nabla\, \boldsymbol{w}) = (\nabla\, \boldsymbol{v}, \nabla\, \boldsymbol{w})\,.$$

Alors $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ appartient à l'orthogonal de V dans $H_0^1(\Omega)^d$:

$$V^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d\,;\, \forall \boldsymbol{w} \in V\,,\ (\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{w}) = 0\}\,,$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = q\,,$$

$$|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0|_{1,\Omega} \le |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\,.$$

Ceci entraine que l'opérateur divergence est un isomorphisme de $V^{\perp}$ sur $L_0^2(\Omega)$ et avec la même constante $\mathcal{K}$,

$$\forall \boldsymbol{v} \in V^{\perp}\,,\ \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} \ge \mathcal{K} |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\,. \tag{7.8}$$

Enfin, en procédant par dualité et en notant V^0 le polaire de V:

$$V^0 = \{\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d\,;\, \forall \boldsymbol{w} \in V\,,\ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}\rangle = 0\}\,,$$

on déduit que l'opérateur gradient est un isomorphisme de $L_0^2(\Omega)$ sur V^0 et

$$\forall p \in L_0^2(\Omega)\,,\ \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \ge \mathcal{K} \|p\|_{0,\Omega}\,. \tag{7.9}$$

Il ne faut pas confondre V^0 et $V^{\perp}$. Noter que d'une part, l'orthogonalité du polaire est prise par rapport au produit de dualité, qui est une extension du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et que d'autre part, si $\boldsymbol{v} \in V^{\perp}$, alors $\Delta \boldsymbol{v} \in V^0$. Avec l'isomorphisme du gradient, on peut montrer l'équivalence des deux formulations variationnelles, c'est-à-dire retrouver p tel que $(\boldsymbol{u}, p)$ vérifie (7.3). En effet, on a précisément que $-\nu \Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ appartient à V^0, donc il existe un unique p dans $L_0^2(\Omega)$ tel que

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \nabla p\,.$$

Et donc $(\boldsymbol{u}, p)$ est l'unique solution de (7.3). On peut majorer $\|p\|_{0,\Omega}$ avec (7.9), mais on obtient une majoration plus fine en appliquant (7.8). En effet, en appliquant (7.3) (au signe près), on a

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d\,,\ -(p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = \nu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle\,,$$

et en choisissant $\boldsymbol{v} \in V^{\perp}$ tel que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = p$, on trouve

$$\|p\|_{0,\Omega} \le \frac{1}{\mathcal{K}} \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}\,. \tag{7.10}$$

• **Conclusion.** Si Ω est Lipschitzien et connexe, le problème de Stokes homogène (7.1), (7.2) admet une solution unique $(\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ qui satisfait les estimations (7.7), (7.10).

Lorsque $\boldsymbol{f}$ est plus régulière, la solution est aussi plus régulière, mais c'est un résultat très difficile.

Théorème 7.3 (admis). *On suppose que Ω est connexe et soit de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, soit polygonal en dimension $d = 2$ ou polyédrique en dimension $d = 3$ et convexe. Alors si $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$, le couple $(\boldsymbol{u}, p)$ solution de (7.1), (7.2) appartient à $H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ avec dépendance continue en $\boldsymbol{f}$.*

En dimension deux, si Ω est un polygone quelconque connexe et $\boldsymbol{f} \in L^{4/3}(\Omega)^d$, le couple $(\boldsymbol{u}, p)$ solution de (7.1), (7.2) appartient à $W^{2,4/3}(\Omega)^d \times W^{1,4/3}(\Omega)$ avec dépendance continue en $\boldsymbol{f}$.

• **Le problème non-homogène.** La version non-homogène de (7.1), (7.2) est:

Etant donnés $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$, $h \in L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^d$ et une constante $\nu > 0$, chercher $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d$ et *$p \in L^2_0(\Omega)$ tels que:*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}\ ,\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = h \ \text{ dans } \Omega\,, \tag{7.11}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{7.12}$$

D'abord, comme pour le problème de Neumann pour le Laplacien, il faut une condition de compatibilité entre les données obtenue en intégrant $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ dans Ω:

$$\int_\Omega h\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma\,. \tag{7.13}$$

Ensuite, on remarque facilement que ce problème admet au plus une solution. Enfin, pour se ramener au problème homogène, on construit un relèvement $\boldsymbol{w}$ dans $H^1(\Omega)^d$ satisfaisant:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w} = h \ \text{ dans } \Omega \quad , \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} \ \text{ sur } \partial\Omega\,.$$

Pour construire $\boldsymbol{w}$, on relève d'abord la trace de $\boldsymbol{u}$, i.e. on fixe une fonction $\boldsymbol{u}_g \in H^1(\Omega)^d$ telle que $\boldsymbol{u}_g|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{g}$. Puis, on pose $\lambda = h - \operatorname{div}\boldsymbol{u}_g$. Alors $\lambda \in L^2(\Omega)$, et on vérifie facilement que $\int_\Omega \lambda\,d\boldsymbol{x} = 0$; i.e. $\lambda \in L^2_0(\Omega)$. Donc il découle du Théorème 7.2, qu'il existe $\boldsymbol{u}_\lambda$ dans $H^1_0(\Omega)^d$ tel que $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\lambda = \lambda$. Alors $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_\lambda + \boldsymbol{u}_g$ est bien le relèvement souhaité. Posons $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_g - \boldsymbol{u}_\lambda$, qui est à divergence nulle et appartient à $H^1_0(\Omega)^d$. Alors le problème (7.11), (7.12) équivaut à

Chercher $\boldsymbol{u}_0 \in H^1(\Omega)^d$ et *$p \in L^2_0(\Omega)$ tels que:*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}_0 + \nabla p = \boldsymbol{f} + \nu\Delta(\boldsymbol{u}_g + \boldsymbol{u}_\lambda)\ ,\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}_0 = 0 \ \text{ dans } \Omega\,, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \ \text{ sur } \partial\Omega\,. \tag{7.15}$$

Et ce problème admet une solution unique. Donc, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_g + \boldsymbol{u}_\lambda$ est l'unique solution de (7.11), (7.12) et comme elle est unique, elle ne dépend pas du choix des relèvements.

• **Problème abstrait avec contrainte.** Ceci généralise la théorie des problèmes variationnels abstraits au cas de problèmes avec contraintes. Soit X et M deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$, de produits scalaires associés $(\cdot,\cdot)_X$ et $(\cdot,\cdot)_M$ et d'espaces duaux respectifs X' et M'. On se donne deux formes bilinéaires continues

$$a : X \times X \mapsto I\!R \ \text{ et } \ b : X \times M \mapsto I\!R .$$

On leur associe les opérateurs $A : X \mapsto X'$ et $B : X \mapsto M'$ ainsi que son opérateur dual $B' : M \mapsto X'$ définis par

$$\forall v \in X \, , \, \forall w \in X \ , \ \langle Av, w \rangle = a(v,w) \, ,$$

$$\forall v \in X \, , \, \forall q \in M \ , \ \langle Bv, q \rangle = \langle v, B'q \rangle = b(v,q) \, .$$

La correspondance avec le problème de Stokes homogène (en ce qui concerne la valeur au bord) est

$$X = H_0^1(\Omega)^d \, , \, X' = H^{-1}(\Omega)^d \, , \, M = M' = L_0^2(\Omega) \, , \, A = -\nu\Delta \, , \, B = -\mathrm{div} \, , \, B' = \nabla \, .$$

Le problème abstrait qu'on se propose de résoudre se pose d'abord sous la forme suivante

Pour ℓ et χ *donnés respectivement dans* X' et M', *chercher* un couple (u,p) *dans* $X \times M$ *solution de*

$$\begin{aligned} \forall v \in X \, , \, a(u,v) + b(v,p) &= \langle \ell, v \rangle \\ \forall q \in M \, , \, b(u,q) &= \langle \chi, q \rangle \, . \end{aligned} \tag{Q}$$

La correspondance avec le problème de Stokes est $\ell = \boldsymbol{f}$ et $\chi = h$. Comme pour le problème de Stokes on définit l'espace V

$$V = \{ v \in X \, ; \, \forall q \in M \, , \, b(v,q) = 0 \} = \mathrm{Ker}(B) \, ,$$

son orthogonal dans X

$$V^\perp = \{ v \in X \, ; \, \forall w \in V \, , \, (v,w)_X = 0 \}$$

et son polaire

$$V^0 = \{ \ell \in X' \, ; \, \forall w \in V \, , \, \langle \ell, w \rangle = 0 \} \, .$$

Il est commode d'introduire aussi la variété affine

$$V(\chi) = \{ v \in X \, ; \, \forall q \in M \, , \, b(v,q) = \langle \chi, q \rangle \} \, .$$

Alors le problème (Q) se met sous une deuxième forme (pas forcément équivalente):

Pour ℓ et χ *donnés respectivement dans* X' et M', *chercher* $u \in V(\chi)$ *solution de*

$$\forall v \in V \, , \, a(u,v) = \langle \ell, v \rangle \, . \tag{P}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux problèmes soient équivalents.

Théorème 7.4 de Babuška-Brezzi. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que*

$$\inf_{q\in M} \sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta\,. \tag{LBB}$$

(ii) *B' est un isomorphisme de M sur V^0 et*

$$\forall q \in M\,,\ \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M \quad \textit{avec la même constante } \beta\,. \tag{7.16}$$

(iii) *B est un isomorphisme de $V^\perp$ sur M' et*

$$\forall v \in V^\perp\,,\ \|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X \quad \textit{avec la même constante } \beta\,. \tag{7.17}$$

Démonstration. On montre d'abord l'équivalence entre (i) et (ii) et ensuite l'équivalence entre (ii) et (iii).

1. Par définition,

$$\sup_{x\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} = \|B'q\|_{X'}\,.$$

Donc (LBB) équivaut à la minoration (7.16). Il reste à montrer que (LBB) entraine que B' est un isomorphisme de M sur V^0. D'après (7.16), on sait déjà que B' est une bijection de M sur son image $\mathcal{R}(B')$ et que son inverse est continu. Comme par hypothèse, B' est aussi continu, B' est un isomorphisme de M sur $\mathcal{R}(B')$. Donc $\mathcal{R}(B')$ est un sous-espace fermé de X'. Alors, le théorème de l'Image Fermée de Banach dit que

$$\mathcal{R}(B') = (\mathrm{Ker}(B))^0\,;$$

mais $\mathrm{Ker}(B) = V$, d'où le résultat.

2. De manière équivalente, (7.16) dit que

$$\|(B')^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^0;M)} \leq \frac{1}{\beta}\,.$$

Ecrivons la proposition (ii) sous forme duale (donc équivalente): B est un isomorphisme de $(V^0)'$ sur M' et

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(M';(V^0)')} \leq \frac{1}{\beta}\,.$$

C'est exactement la proposition (iii) si on montre que $(V^0)' = V^\perp$, ou de manière équivalente que $(V^\perp)' = V^0$. Soit donc $v \in X$ et décomposons v en $v = v^\perp + z$ où $v^\perp$ est la projection orthogonale de v sur $V^\perp$. Alors, si $g \in (V^\perp)'$, on note $\tilde{g}$ son extension à X' définie par

$$\forall v \in X \, , \; \langle \tilde{g}, v \rangle = \langle g, v^\perp \rangle \, .$$

On vérifie facilement que $\tilde{g} \in V^0$ et $\|\tilde{g}\|_{X'} = \|g\|_{(V^\perp)'}$. Donc, la relation $g \mapsto \tilde{g}$ est une isométrie et elle permet d'identifier $(V^\perp)'$ et V^0. ♢

Remarque. La condition (LBB) s'appelle condition "inf-sup" de Babuška-Brezzi.

Pour résoudre le problème (P), il est commode d'introduire l'opérateur de restriction $\Pi \in \mathcal{L}(X'; V')$ défini pour tout $\ell \in X'$ par

$$\forall v \in V \, , \; \langle \Pi(\ell), v \rangle = \langle \ell, v \rangle \, .$$

Théorème 7.5. *Le problème (Q) est bien posé (i.e. a une solution unique qui dépend continûment des données ℓ et χ) si et seulement si*

(i) *l'opérateur ΠA est un isomorphisme de V sur V';*

(ii) *la condition (LBB) est satisfaite.*

Démonstration. On démontre seulement la partie suffisante; la partie nécessaire est laissée en exercice. Supposons que la condition (LBB) soit satisfaite. Alors on peut relever χ: puisque $\chi \in M'$, il existe un unique $u_\chi \in V^\perp$ tel que

$$B u_\chi = \chi \quad \text{et} \quad \|u_\chi\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|\chi\|_{M'} \, .$$

Posons $u_0 = u - u_\chi$; alors le problème (P) équivaut à chercher $u_0 \in V$ tel que

$$\forall v \in V \, , \; a(u_0, v) = \langle \ell, v \rangle - a(u_\chi, v) \, ,$$

i.e. en utilisant Π

$$\Pi(A u_0) = \Pi(\ell - A u_\chi) \, .$$

Puisque l'opérateur ΠA est un isomorphisme de V sur V', il existe un unique $u_0 \in V$ solution de cette équation et

$$\|u_0\|_X \leq C \|\Pi(\ell - A u_\chi)\|_{V'} \leq C \|\ell - A u_\chi\|_{X'} \leq C(\|\ell\|_{X'} + \frac{1}{\beta} \|A\| \|\chi\|_{M'}) \, .$$

Alors $\ell - Au \in V^0$; donc il existe un unique $p \in M$ tel que

$$B' p = \ell - A u \quad \text{et} \quad \|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|\ell - A u\|_{X'} \leq \frac{1}{\beta}(\|\ell\|_{X'} + \|A\| \|u\|_X) \, .$$ ♢

Remarque. Une condition suffisante pour que ΠA soit un isomorphisme de V sur V' est que la forme bilinéaire a soit V-elliptique: il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in V \, , \; a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \, .$$

VIII. Approximation interne du problème de Stokes

• **Problème approché abstrait.** Dans tout ce chapitre, on suppose que la forme a est V-elliptique et que la condition (LBB) est satisfaite.

Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation (destiné à tendre vers 0) et pour chaque h soit $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ deux espaces de dimension finie. On définit les analogues discrets de V et $V(\chi)$:

$$V_h = \{v_h \in X_h \, ; \forall q_h \in M_h \, , \, b(v_h, q_h) = 0\} \, ,$$

$$V_h(\chi) = \{v_h \in X_h \, ; \forall q_h \in M_h \, , \, b(v_h, q_h) = \langle \chi, q_h \rangle\} \, .$$

Noter qu'en général, $V_h \not\subset V$ et $V_h(\chi) \not\subset V(\chi)$. On discrétise directement le problème (Q) par:

Chercher un couple $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que:

$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h \; , \; a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= \langle \ell, v_h \rangle \, , \\ \forall q_h \in M_h \; , \; b(u_h, q_h) &= \langle \chi, q_h \rangle \, . \end{aligned} \tag{Q_h}$$

De même, on discrétise le problème (P) par:

Chercher $u_h \in V_h(\chi)$ tel que:

$$\forall v_h \in V_h \; , \; a(u_h, v_h) = \langle \ell, v_h \rangle \, . \tag{P_h}$$

Noter que le problème (Q_h) est une approximation interne du problème (Q) alors que le problème (P_h) est une approximation externe du problème (P). De plus, comme $V_h \not\subset V$, l'hypothèse de V-ellipticité sur a n'est pas forcément satisfaite sur V_h. De même, la condition (LBB) n'est pas forcément satisfaite sur le couple d'espaces (X_h, M_h) et il faut refaire des hypothèses pour s'assurer que ces deux problèmes sont équivalents et ont une solution.

Théorème 8.1. *On suppose que*

(i) *la variété $V_h(\chi)$ n'est pas vide;*

(ii) *il existe une constante $\alpha^* > 0$ telle que*

$$\forall v_h \in V_h \; , \; a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_X^2 \, . \tag{8.1}$$

Alors, le problème (P_h) a une solution unique u_h et on a l'estimation:

$$\|u-u_h\|_X \le (1+\frac{\|a\|}{\alpha^*}) \inf_{v_h\in V_h(\chi)} \|u-v_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha^*} \inf_{q_h\in M_h} \|p-q_h\|_M \,. \tag{8.2}$$

Démonstration. L'hypothèse (ii) assure l'unicité de la solution et l'hypothèse (i) permet de montrer l'existence. En effet, puisque la variété $V_h(\chi)$ n'est pas vide, on peut relever χ: il existe $w_h \in X_h$ tel que

$$\forall q_h \in M_h \ , \ b(w_h, q_h) = \langle \chi, q_h\rangle \,.$$

On pose $u_{0h} = u_h - w_h$; alors, le problème (P_h) est équivalent au problème homogène

Chercher $u_{0h} \in V_h$ *tel que:*

$$\forall v_h \in V_h \ , \ a(u_{0h}, v_h) = \langle \ell, v_h\rangle - a(w_h, v_h) \,. \tag{8.3}$$

C'est un système linéaire carré en dimension finie et l'unicité de la solution (qui vient de (8.1)) entraine son existence.

En ce qui concerne la majoration d'erreur, on a d'une part

$$\forall v_h \in V_h \ , \ a(u_h, v_h) = \langle \ell, v_h\rangle \,,$$

et d'autre part

$$\forall v_h \in V_h \ , \ a(u, v_h) + b(v_h, p) = \langle \ell, v_h\rangle \,,$$

car $V_h \subset X_h \subset X$. Donc

$$\forall v_h \in V_h \ , \ a(u_h - u, v_h) - b(v_h, p) = 0 \,.$$

Soit w_h un relèvement quelconque de χ (on peut prendre par exemple celui qu'on vient de construire). Alors,

$$\begin{aligned}\forall v_h \in V_h \ , \ a(u_h - w_h, v_h) =& a(u_h - u, v_h) + a(u - w_h, v_h) = b(v_h, p) + a(u - w_h, v_h) \\ =& b(v_h, p - q_h) + a(u - w_h, v_h) \,,\end{aligned}$$

pour tout $q_h \in M_h$ puisque $v_h \in V_h$. Prenons $v_h = u_h - w_h \in V_h$. L'ellipticité (8.1) et la continuité de a et b entrainent que

$$\forall w_h \in V_h(\chi) \,, \forall q_h \in M_h \ , \ \alpha^* \|u_h - w_h\|_X \le \|b\|\|p - q_h\|_M + \|a\|\|u - w_h\|_X \,,$$

et (8.2) s'en déduit grâce à l'inégalité triangulaire. $\diamondsuit$

Remarque. Il est possible que la constante α^* dépende de h; mais pour que le Théorème 8.1 donne une estimation d'erreur optimale (ce qui est le cas intéressant), il faut que α^* ne dépende pas de h.

L'estimation (8.2) n'est pas toujours facilement utilisable, car elle demande de connaitre l'erreur d'approximation de $V(\chi)$ par $V_h(\chi)$. De plus, le Théorème 8.1 ne donne aucune information sur l'existence de p_h. Pour cela, on a besoin d'une condition (LBB) discrète.

Lemme 8.2. *On suppose que la condition (LBB) discrète est satisfaite:*

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X \|q_h\|_M} \geq \beta^* > 0 \,. \tag{8.4}$$

Alors pour tout $u \in V(\chi)$,

$$\inf_{v_h \in V_h(\chi)} \|u - v_h\|_X \leq (1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_X \,. \tag{8.5}$$

Démonstration. Soit $u \in V(\chi)$ et prenons d'abord w_h quelconque dans X_h (ensuite, w_h sera une approximation de u). En général, $w_h \notin V_h(\chi)$ et donc on le corrige en lui ajoutant un élément z_h de X_h, solution de:

Chercher $z_h \in X_h$ *tel que*

$$\forall q_h \in M_h \;,\; b(z_h, q_h) = b(u - w_h, q_h) \,. \tag{8.6}$$

Ce système admet une solution unique grâce à (8.4). En effet, l'application $q_h \mapsto b(u - w_h, q_h)$ est une forme linéaire sur M_h (elle est forcément continue puique on est en dimension finie). Elle définit donc un élément du dual M_h'. Or l'énoncé du Théorème de Babuška-Brezzi et la condition discrète (8.4) entrainent qu'il existe un unique $z_h \in V_h^\perp$ solution de (8.6) et de plus

$$\|z_h\|_X \leq \frac{1}{\beta^*} \sup_{q_h \in M_h} \frac{b(z_h, q_h)}{\|q_h\|_M} \leq \frac{1}{\beta^*} \|b\| \|u - w_h\|_X \,.$$

Prenons $v_h = z_h + w_h$; alors $b(v_h, q_h) = b(u, q_h) = \langle \chi, q_h \rangle$, donc $v_h \in V_h(\chi)$. De plus

$$\|u - v_h\|_X \leq \|u - w_h\|_X + \|z_h\|_X \leq (1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}) \|u - w_h\|_X \,. \tag{8.7}$$

Donc pour chaque $w_h \in X_h$, il existe $v_h \in V_h(\chi)$ vérifiant l'inégalité (8.7). C'est donc aussi vrai pour le w_h de X_h qui réalise le minimum de $\|u - w_h\|_X$, (en ce sens, c'est une approximation de u) d'où (8.5). $\diamondsuit$

Remarque. Ici aussi, il est possible que la constante β^* dépende de h; mais pour que le Lemme 8.2 (et à son tour le Théorème 8.3) donne une majoration optimale (ce qui est le cas intéressant), il faut que β^* ne dépende pas de h.

Théorème 8.3. *Sous les hypothèses de V_h-ellipticité (8.1) et (LBB) discrète (8.4), le problème (Q_h) admet une solution unique (u_h, p_h), où u_h est l'unique solution du problème (P_h) et il existe une constante C qui dépend de α^*, β^*, $\|a\|$ et $\|b\|$, telle que*

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq C(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M) \,. \tag{8.8}$$

Démonstration. La condition (LBB) discrète (8.4) permet de dire que $V_h(\chi)$ n'est pas vide. Donc l'estimation (8.8) pour $u - u_h$ se déduit du Théorème 8.1 et du Lemme 8.2. L'existence de p_h et l'équivalence entre les problèmes (P_h) et (Q_h) découlent aussi de (8.4) et du Théorème de Babuška-Brezzi. Il reste à montrer l'estimation (8.8) pour $p - p_h$. On a

$$\forall v_h \in X_h \ , \ b(v_h, p - p_h) = -a(u - u_h, v_h) \, ,$$

donc pour tout $q_h \in M_h$,

$$\forall v_h \in X_h \ , \ b(v_h, q_h - p_h) = b(v_h, q_h - p) + b(v_h, p - p_h) = b(v_h, q_h - p) - a(u - u_h, v_h) \, .$$

D'où

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h - p_h)}{\|v_h\|_X} \leq \|b\| \|p - q_h\|_M + \|a\| \|u - u_h\|_X \, .$$

Alors la condition (8.4) entraine que

$$\beta^* \|q_h - p_h\|_M \leq \|b\| \|p - q_h\|_M + \|a\| \|u - u_h\|_X \, .$$

Donc

$$\|p - p_h\|_M \leq (1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M + \frac{\|a\|}{\beta^*} \|u - u_h\|_X \, . \qquad \diamondsuit$$

• **Analogue en dimension finie.** En dimension finie, l'analogue du problème (Q) homogène (avec $\chi = 0$) est le double système linéaire

$$Au + Bp = f \ , \ B^t u = 0 \, , \tag{8.9}$$

où A est une matrice carrée de $I\!R^{N,N}$ et B une matrice rectangulaire de $I\!R^{N,M}$, la donnée f est un vecteur de $I\!R^N$ et les inconnues sont les vecteurs u de $I\!R^N$ et p de $I\!R^M$ avec, comme cas intéressant, $N \neq M$. Remarquons qu'on aboutit à un système linéaire qui a la forme (8.9) lorsqu'on discrétise convenablement le problème de Stokes. Comme pour le problème (Q), on introduit l'espace

$$V = \{v \in I\!R^N \, ; \, B^t v = 0\} = \mathrm{Ker}(B^t) \, .$$

On ne munit pas forcément $I\!R^M$ et $I\!R^N$ de la même norme, bien qu'en dimension finie elles soient toutes équivalentes, de manière à calquer la situation du problème abstrait du chapitre 7. On munit $I\!R^M$ de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ et on munit $I\!R^N$ d'une norme notée $[\cdot]$, qui n'est pas forcément la norme euclidienne. On note $[\cdot]_*$ la norme duale correspondante, i.e.

$$\forall f \in I\!R^N \ , \ [f]_* = \sup_{v \in I\!R^N} \frac{(f, v)}{[v]} \, .$$

On désigne encore par B l'application linéaire représentée par la matrice B, qui applique $\mathbb{R}^M$ dans $\mathbb{R}^N$ muni de la norme duale $[\cdot]_*$; donc

$$\|B\| = \sup_{q \in \mathbb{R}^M} \frac{[Bq]_*}{\|q\|} .$$

Alors, l'application représentée par B^t applique $\mathbb{R}^N$ muni de la norme $[\cdot]$ dans $\mathbb{R}^M$, encore muni de la norme $\|\cdot\|$ car pour la norme euclidienne, il est son propre dual; donc

$$\|B^t\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N} \frac{\|B^t v\|}{[v]} .$$

Pour résoudre le système (8.9), on fait les hypothèses suivantes:

(i) la matrice A est symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}^N$;

(ii) la matrice B est injective.

Comme on est en dimension finie, ces deux propriétés peuvent s'écrire

$$\text{il existe une constante } \alpha > 0 \text{ telle que } \forall v \in \mathbb{R}^N \,,\; (Av, v) > \alpha [v]^2 \,, \tag{8.10}$$

$$\text{il existe une constante } \beta > 0 \text{ telle que } \forall q \in \mathbb{R}^M \,,\; [Bq]_* \geq \beta \|q\| \,. \tag{8.11}$$

La deuxième propriété équivaut à dire que B est inversible de $\mathbb{R}^M$ sur son image $\mathcal{R}(B)$, ce qui entraine en particulier que $M \leq N$, et

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{où} \quad \|B^{-1}\| = \sup_{v \in \mathcal{R}(B)} \frac{\|B^{-1} v\|}{[v]_*} .$$

Ceci est équivalent aussi à dire que B^t est inversible de $\mathcal{R}(B)$ sur $\mathbb{R}^M$ et

$$\|(B^t)^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{où} \quad \|(B^t)^{-1}\| = \sup_{q \in \mathbb{R}^M} \frac{[(B^t)^{-1} q]}{\|q\|} .$$

Mais en dimension finie, il est très facile de démontrer que

$$\mathcal{R}(B) = \mathrm{Ker}(B^t)^{\perp} ,$$

où l'orthogonal est pris dans $\mathbb{R}^N$ par rapport à la norme $\|\cdot\|$; donc B^t est inversible de $V^{\perp}$ sur $\mathbb{R}^M$ et

$$\forall v \in V^{\perp} \,,\; \|B^t v\| \geq \beta [v] \,. \tag{8.12}$$

On retrouve ici les deux propriétés équivalente du Théorème de Babuška-Brezzi.

Avec les hypothèses (i) et (ii), on montre facilement que le système (8.9) a une solution unique et on peut découpler le calcul de u et p:

$$u = A^{-1}(f - Bp) \;\text{ et }\; 0 = B^t u = B^t A^{-1}(f - Bp)\,,$$

donc

$$B^t A^{-1} B p = B^t A^{-1} f\,,$$

et on trouve

$$p = (B^t A^{-1} B)^{-1} B^t A^{-1} f \;\text{ et }\; u = A^{-1}(f - Bp)\,. \tag{8.13}$$

Le système (8.9) est donc entièrement résolu, mais il est rare qu'on utilise directement ces formules car leur calcul est coûteux. Plutôt, on remarque que la matrice $B^t A^{-1} B$ est symétrique, définie positive et donc la première équation du système (8.13) se prête bien à une méthode itérative de type gradient. En effet, on sait que résoudre le système linéaire $\mathcal{A}x = b$, avec $\mathcal{A}$ symétrique, définie positive, équivaut à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}v, v) - (b, v)\,.$$

Donc ici, p réalise le seul minimum de la fonctionnelle

$$J(q) = \frac{1}{2}(B^t A^{-1} B q, q) - (B^t A^{-1} f, q) = \frac{1}{2}(A^{-1} B q, Bq) - (A^{-1} f, Bq)\,.$$

On peut fractionner ce calcul, en introduisant, pour q donné dans $I\!R^M$, l'unique solution $v(q) \in I\!R^N$ du système

$$A v(q) = f - Bq\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{1}{2}(A^{-1}(f - Av(q)), f - Av(q)) - (A^{-1} f, f - Av(q)) \\ &= \frac{1}{2}(Av(q), v(q)) - \frac{1}{2}(f, v(q)) - \frac{1}{2}(A^{-1} f, f - Av(q)) \\ &= \frac{1}{2}(Av(q), v(q)) - \frac{1}{2}(A^{-1} f, f)\,. \end{aligned}$$

Posons

$$K(q) = \frac{1}{2}(Av(q), v(q))\,. \tag{8.14}$$

Alors minimiser J revient à minimiser K puisque le terme restant est constant. Comme J a un minimum unique, le minimum de K est aussi unique et p est caractérisé par

$$K(p) = \inf_{q \in I\!R^M} K(q) \;\text{ avec }\; Av(q) = f - Bq\,. \tag{8.15}$$

• **Problème de point-selle.** On peut aussi trouver (8.14) et (8.15) en interprétant le système (8.9) comme étant un problème de point-selle. On introduit le Lagrangien défini sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ par

$$\mathcal{L}(v,q) = \frac{1}{2}(Av,v) + (B^t v, q) - (f,v)\,.$$

Théorème 8.4 (admis). *Résoudre le système (8.9) équivaut à chercher le point-selle (u,p) de $\mathcal{L}$:*

$$\forall v \in \mathbb{R}^N\,,\ \forall q \in \mathbb{R}^M\ ,\ \mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p)\,.$$

Ce point-selle est aussi caractérisé par le problème de Min-Max:

$$\mathrm{Min}_{v\in\mathbb{R}^N}(\sup_{q\in\mathbb{R}^M} \mathcal{L}(v,q)) = \mathcal{L}(u,p) = \mathrm{Max}_{q\in\mathbb{R}^M}(\inf_{v\in\mathbb{R}^N} \mathcal{L}(v,q))\,. \tag{8.16}$$

Interprétons la première égalité de (8.16). Si $v \in \mathrm{Ker}(B^t)$, alors $\mathcal{L}(v,q)$ ne dépend pas de q et

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^M} \mathcal{L}(v,q) = \frac{1}{2}(Av,v) - (f,v)\,.$$

Et si $v \notin \mathrm{Ker}(B^t)$, alors

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^M} \mathcal{L}(v,q) = \infty\,.$$

Donc le minimum ne peut être atteint que si $v \in \mathrm{Ker}(B^t)$ et

$$\mathcal{L}(u,p) = \mathrm{Min}_{v\in\mathrm{Ker}(B^t)}(\frac{1}{2}(Av,v) - (f,v))\,.$$

C'est un problème de minimisation avec contrainte.

En ce qui concerne la deuxième égalité de (8.16), on remarque que pour q fixé dans $\mathbb{R}^M$, l'application $v \mapsto \mathcal{L}(v,q)$ est une forme quadratique coercive:

$$\mathcal{L}(v,q) \geq \frac{1}{2}\alpha[v]^2 - \|B^t\|[v]\|q\| - [f]_*[v] \to \infty \ \text{ quand } [v] \to \infty\,,$$

et strictement convexe:

$$D_v\mathcal{L}(v,q).h = (Av,h) + (B^t h, q) - (f,h) \ \text{ et } \ D^2_{vv}\mathcal{L}(v,q).(h,k) = (Ak,h)\,,$$

d'où

$$D^2_{vv}\mathcal{L}(v,q).(h,h) = (Ah,h) \geq \alpha[h]^2\,.$$

Par conséquent, elle admet un minimum unique $v(q)$ atteint quand la dérivée première s'annule:

$$D_v\mathcal{L}(v(q),q).h = 0 \ \text{ c'est-à-dire } \ Av(q) = f - Bq\,.$$

Alors
$$\mathcal{L}(v(q), q) = -\frac{1}{2}(Av(q), v(q)) .$$
Donc
$$\mathcal{L}(u, p) = \mathrm{Max}_{q \in I\!R^M}(-\frac{1}{2}(Av(q), v(q))) = \mathrm{Min}_{q \in I\!R^M} K(q) ,$$
et on retrouve le problème (8.15), qui est un problème de minimisation sans contrainte.

Remarque. Le Lagrangien $\mathcal{L}$ n'est pas unique. Par exemple, pour $r \geq 0$, on peut le remplacer par
$$\mathcal{L}_r(v, q) = \frac{1}{2}(Av, v) + \frac{r}{2}\|B^t v\|^2 + (B^t v, q) - (f, v) ,$$
qui a le même point-selle, car la première égalité se ramène à
$$\mathcal{L}_r(u, p) = \mathrm{Min}_{v \in \mathrm{Ker}(B^t)}(\frac{1}{2}(Av, v) - (f, v)) .$$
La fonctionnelle $\mathcal{L}_r$ s'appelle Lagrangien augmenté; le paramètre r sert, d'une part, à améliorer le conditionnement de la matrice A et d'autre part, à résoudre le problème de minimisation dans le cas (qu'on n'étudie pas ici) où la matrice A est semi-définie positive sur $I\!R^N$ et inversible seulement sur $\mathrm{Ker}(B^t)$.

• **Algorithme d'Uzawa.** Pour résoudre le problème de minimisation (8.15), on part d'un vecteur donné $p^0 \in I\!R^M$, d'une suite de vecteurs (appelés directions) $w^m \in I\!R^M$ à choisir, et on construit la suite de vecteurs $p^m \in I\!R^M$ par la formule
$$\forall m \geq 0 \ , \ p^{m+1} = p^m - \rho^m w^m , \tag{8.17}$$
où le scalaire $\rho^m \in I\!R$ minimise $K(p^m - \rho w^m)$ par rapport à ρ:
$$K(p^m - \rho^m w^m) = \inf_{\rho \in I\!R} K(p^m - \rho w^m) .$$
On obtient des algorithmes différents selon le choix de la suite w^m. L'algorithme d'Uzawa, aussi appelé algorithme de gradient simple, s'obtient en prenant $w^m = g^m$, où g^m désigne le gradient de $K(p^m)$. Faisons les calculs; on dérive (8.14) et (8.15) par rapport à q
$$Av'(q) \cdot h = -Bh \quad \text{et} \quad K'(q) \cdot h = (Av'(q) \cdot h, v(q)) = -(Bh, v(q)) = -(h, B^t v(q)) ,$$
de sorte que
$$K'(q) = -B^t v(q) \quad \text{et} \quad K''(q) = -B^t v'(q) = B^t A^{-1} B .$$
Posons $u^m = v(p^m)$, alors
$$g^m = K'(p^m) = -B^t u^m .$$

On vérifie facilement que l'application $\rho \mapsto K(p^m - \rho g^m)$ est coercive et strictement convexe et a donc un minimum unique atteint au point ρ^m caractérisé par $\frac{dK}{d\rho} = 0$. Ceci s'écrit

$$K'(p^m - \rho^m g^m) \cdot g^m = 0\,,$$

d'où on tire facilement l'expression de ρ^m avec un développement de Taylor, en utilisant le fait que la dérivée seconde de K est constante:

$$0 = K'(p^m - \rho^m g^m) \cdot g^m = K'(p^m) \cdot g^m - \rho^m K'' \cdot (g^m, g^m)\,,$$

d'où

$$\rho^m = \frac{K'(p^m) \cdot g^m}{K'' \cdot (g^m, g^m)} = \frac{\|g^m\|^2}{(Bg^m, A^{-1}Bg^m)}\,.$$

Pour économiser les calculs, on introduit le vecteur auxiliaire z^m défini par

$$Az^m = Bg^m\,.$$

Alors, à partir du vecteur p^0, l'étape de démarrage de l'algorithme d'Uzawa est

$$Au^0 = f - Bp^0\,.$$

puis, pour chaque $m \geq 0$, connaissant $u^m \in I\!R^N$ et $p^m \in I\!R^M$, l'étape générale est

$$\begin{aligned}
g^m &= -B^t u^m\,,\\
Az^m &= Bg^m\,,\\
\rho^m &= \frac{\|g^m\|^2}{(Bg^m, z^m)}\,,\\
p^{m+1} &= p^m - \rho^m g^m\,,\\
u^{m+1} &= u^m + \rho^m z^m\,.
\end{aligned}$$

Les vecteurs z^m et u^0 sont définis volontairement de manière implicite, pour indiquer qu'on n'inverse pas la matrice A, mais qu'on résout le système linéaire correspondant. Le coût de l'algorithme se mesure au nombre de fois où il faut résoudre ce système et on voit qu'il faut en résoudre un à chaque étape, y compris l'étape initiale. Comme la matrice A est symétrique, définie positive, il y a plusieurs algorithmes pour résoudre ces systèmes, par exemple, Choleski (si N n'est pas trop grand) ou gradient conjugué.

IX. Approximation interne du problème de Stokes

Rappelons que le problème de Stokes homogène est:

Chercher $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$, *tels que*

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \ , \ \nu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \, , \tag{9.1}$$

$$\forall q \in L^2(\Omega) \ , \ (q, \operatorname{div} \boldsymbol{u}) = 0 \, . \tag{9.2}$$

On obtient une discrétisation interne en prenant un sous-espace de dimension finie X_h de $H_0^1(\Omega)^d$ et un sous-espace de dimension finie M_h de $L_0^2(\Omega)$:

Chercher $\boldsymbol{u}_h \in X_h$ et $p_h \in M_h$, *tels que*

$$\forall \boldsymbol{v}_h \in X_h \ , \ \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_h) - (p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h \rangle \, , \tag{9.3}$$

$$\forall q_h \in M_h \ , \ (q_h, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h) = 0 \, . \tag{9.4}$$

La forme bilinéaire est toujours elliptique avec $\alpha^* = \nu$, constante indépendante de h. Mais la condition “inf-sup” discrète, qui est vraiment une condition de compatibilité entre les espaces discrets, n'est pas du tout assurée et il existe des contre-exemples fameux. Les deux paragraphes suivants donnent des techniques pour la vérifier.

• Vérification de la condition “inf-sup” discrète, cas abstrait.

Lemme 9.1. *On suppose que le problème (Q) vérifie la condition (LBB) avec une constante $\beta > 0$:*

$$\forall q \in M \ , \ \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M \, . \tag{LBB}$$

Alors, le problème (Q_h) vérifie une condition “inf-sup” discrète avec une constante $\beta^* > 0$, indépendante de h,

$$\forall q_h \in M_h \ , \ \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h,q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta^* \|q_h\|_M \, , \tag{9.5}$$

si et seulement si il existe un opérateur de restriction $\Pi_h \in \mathcal{L}(X; X_h)$ et une constante C, indépendante de h, tels que

$$\forall v \in X \ , \ \|\Pi_h(v)\|_X \leq C \|v\|_X \, , \tag{9.6}$$

$$\forall q_h \in M_h \ , \ b(\Pi_h(v) - v, q_h) = 0 \, . \tag{9.7}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe Π_h vérifiant (9.6) et (9.7). Alors,

$$\begin{aligned}
\forall q_h \in M_h \ , \ \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h,q_h)}{\|v_h\|_X} &\geq \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h(v),q_h)}{\|\Pi_h(v)\|_X} \\
&\geq \sup_{v \in X} \frac{b(v,q_h)}{\|\Pi_h(v)\|_X} \\
&\geq \frac{1}{C} \sup_{v \in X} \frac{b(v,q_h)}{\|v\|_X} \geq \frac{\beta}{C} \|q_h\|_M \, .
\end{aligned}$$

Donc (9.5) a lieu avec $\beta^* = \frac{\beta}{C}$.

Réciproquement, supposons que la condition (9.5) soit vérifiée. On définit l'opérateur $B_h \in \mathcal{L}(X_h, M'_h)$ par

$$\forall v_h \in X_h \, , \, \forall q_h \in M_h \, , \, \langle B_h v_h, q_h \rangle = b(v_h, q_h) \, .$$

D'après le Théorème de Babuška-Brezzi, on sait que B_h est un isomorphisme de $V_h^\perp$ sur M'_h et avec la même constante β^*:

$$\forall v_h \in V_h^\perp \, , \, \|B_h v_h\|_{M'_h} \geq \beta^* \|v_h\|_X \, .$$

Maintenant, soit $v \in X$ quelconque. Il existe un unique $v_h \in V_h^\perp$ tel que

$$\forall q_h \in M_h \, , \, b(v_h, q_h) = b(v, q_h) \, ,$$

$$\|v_h\|_X \leq \frac{1}{\beta^*} \|B_h v_h\|_{M'_h} \leq \frac{1}{\beta^*} \sup_{q_h \in M_h} \frac{b(v, q_h)}{\|q_h\|_M} \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|v\|_X \, .$$

Comme l'application $v \mapsto v_h$ est linéaire, on pose $\Pi_h(v) = v_h$; alors $\Pi_h \in \mathcal{L}(X; X_h)$ et Π_h vérifie (9.7) et (9.6) avec $C = \frac{\|b\|}{\beta^*}$. $\diamondsuit$

Remarque. Le Lemme 9.1 s'utilise principalement pour montrer que la condition inf-sup discrète uniforme est satisfaite. Pour cela, il faut construire un opérateur Π_h convenable. Cependant, cette construction est souvent difficile. En effet, en ce qui concerne le problème de Stokes, X n'a pas plus que la régularité de H^1. Dans le cas d'espaces d'éléments finis, pour que Π_h soit stable pour la norme de H^1, ce qui se traduit par (9.6), il ne faut pas que l'ensemble des degrés de liberté Σ fasse appel aux valeurs ponctuelles des fonctions de son ensemble de définition, autrement dit, il ne faut pas que dom(Σ)$\subset \mathcal{C}^0(T)$. Donc, Π_h ne peut être aucun des opérateurs d'interpolation des exemples (i) à (v) et il faut définir des opérateurs d'approximation qui régularisent aussi les fonctions. Noter que Π_h ne peut pas non plus correspondre à ceux des exemples (vi) et (vii), car ce sont des éléments finis non-conformes pour lesquels, $X_h \not\subset X$.

Remarque. Bien que ce soit plus rare, le Lemme 9.1 s'utilise aussi pour construire un opérateur Π_h d'approximation qui conserve la propriété (9.7). Dans le cas du problème de Stokes, ceci revient à conserver la divergence discrète nulle. Cependant, l'opérateur construit ainsi a le grave inconvénient de n'être pas local, i.e. le support de $\Pi_h(\boldsymbol{v})$ est en principe tout Ω, même si le support de $\boldsymbol{v}$ est petit. En effet, quand on cherche $\boldsymbol{v}_h \in V_h^\perp$, comme dans la démonstration ci-dessus, on résout un problème de Stokes discret, dont la solution est répartie sur tout le domaine.

Remarque. La condition (9.5) a lieu si et seulement si il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour chaque $q_h \in M_h$, il existe un unique $v_h \in V_h^\perp$ tel que

$$b(v_h, q_h) \geq \gamma \|q_h\|_M^2 \quad \text{et} \quad \|v_h\|_X \leq \frac{\gamma}{\beta^*} \|q_h\|_M \, . \tag{9.8}$$

Il est clair que cette condition entraine (9.5). Réciproquement, rappelons que $(\cdot,\cdot)_M$ désigne le produit scalaire associé à la norme (Hilbertienne) de M et on suppose que (9.5) est vérifiée. Alors, pour chaque $q_h \in M_h$, il existe un unique $v_h \in V_h^\perp$ tel que

$$\forall t_h \in M_h \ , \ b(v_h, t_h) = (q_h, t_h)_M \ ,$$

$$\|v_h\|_X \le \frac{1}{\beta^*}\|B_h v_h\|_{M_h'} \le \frac{1}{\beta^*} \sup_{t_h \in M_h} \frac{(q_h, t_h)_M}{\|t_h\|_M} \le \frac{1}{\beta^*}\|q_h\|_M \, .$$

En prenant $t_h = q_h$, on trouve (9.8) avec $\gamma = 1$.

• **Méthode des macro-éléments pour le problème de Stokes.** On se place dans le cas du problème approché (9.3), (9.4) par des espaces d'éléments finis construits sur une famille régulière $\mathcal{T}_h$ de triangulations. A l'origine, le principe de cette méthode a été de vérifier d'abord la condition “inf-sup” localement sur des “petits” domaines et ensuite de la vérifier globalement sur le domaine entier, mais avec des fonctions plus simples, en l'occurrence, des constantes. Cependant cette deuxième étape n'est pas souhaitable ici, car elle conduit à un opérateur d'approximation Π_h qui, en général, n'est pas local (voir la remarque plus haut). Pour éliminer cette étape, on suppose qu'on a déjà un opérateur intermédiaire, disons $P_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^d; X_h)$ qui vérifie:

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \, , \, \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, \int_T \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))d\boldsymbol{x} = 0 \, , \tag{9.9}$$

ainsi qu'une propriété d'approximation dans H^1:

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \ , \ \forall v \in H^1(\Omega) \ , \ |v - P_h(v)|_{\ell,T} \le C\,\sigma_{\Delta_T}\, h_T^{1-\ell}|v|_{1,\Delta_T} \, , \tag{9.10}$$

où $\ell = 0$ ou 1, Δ_T est la réunion de T et tous ses voisins, i.e. tous les $S \in \mathcal{T}_h$ tels que $\overline{S} \cap \overline{T} \ne \emptyset$ et

$$\sigma_{\Delta_T} = \frac{\sup_{S \in \Delta_T} h_S}{\inf_{S \in \Delta_T} \varrho_S} \, .$$

Pour définir $P_h(\boldsymbol{v})$, on a besoin des valeurs de $\boldsymbol{v}$ dans une région plus grande que T car $\boldsymbol{v}$ n'est pas continue en général, en particulier aux sommets de T. On peut montrer que si la famille de triangulations est régulière, alors chaque Δ_T a au maximum L_1 éléments et un même élément ne peut appartenir au maximum qu'à L_2 réunions Δ_T, où L_1 et L_2 sont des entiers indépendants de h. La condition (9.9) nous permet de nous restreindre à l'espace suivant:

$$\tilde{X}_h = \{\boldsymbol{v}_h \in X_h \, ; \, \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, \int_T \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} = 0\} \, ,$$

et de lui associer l'espace des pressions discrètes à moyenne nulle dans chaque T:

$$\tilde{M}_h = \{\tau(q_h) \, ; \, q_h \in M_h\} \ , \ \text{où } \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, \tau(q_h)|_T = q_h - \frac{1}{|T|}\int_T q_h d\boldsymbol{x} \, .$$

Maintenant, on décompose Ω en un nombre fini R de sous-domaines connexes Ω_i (appelés macro-éléments) composés d'éléments de $\mathcal{T}_h$:

$$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{R} \overline{\Omega}_i\,.$$

Pour simplifier, on supposera qu'ils sont disjoints deux à deux, mais ce n'est pas obligatoire, comme on le verra dans la remarque plus bas. On veut énoncer une condition "inf-sup" sur chaque Ω_i; pour cela, on définit les espaces locaux suivants sur Ω_i:

$$\tilde{X}_h(\Omega_i) = \{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h\,;\, \text{support}(\boldsymbol{v}_h) \subset \Omega_i\} \subset H_0^1(\Omega_i)^d\,,$$

$$\tilde{M}_h(\Omega_i) = \{\tilde{q}_h|_{\Omega_i}\,;\, \tilde{q}_h \in \tilde{M}_h\} \subset L_0^2(\Omega_i)\,,$$

$$\tilde{V}_h(\Omega_i) = \{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h(\Omega_i)\,;\, \forall q_h \in \tilde{M}_h(\Omega_i)\,,\ \int_{\Omega_i} q_h \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} = 0\}\,,$$

$$\tilde{V}_h^{\perp}(\Omega_i) = \{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h(\Omega_i)\,;\, \forall \boldsymbol{w}_h \in \tilde{V}_h(\Omega_i)\,,\ \int_{\Omega_i} \nabla\, \boldsymbol{v}_h : \nabla\, \boldsymbol{w}_h d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

Avec ces espaces locaux, on définit la condition "inf-sup" locale suivante: il existe une constante $\lambda^* > 0$, indépendante de h, telle que pour $1 \le i \le R$,

$$\inf_{q_h \in \tilde{M}_h(\Omega_i)} \sup_{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h(\Omega_i)} \frac{-\int_{\Omega_i} q_h \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,\Omega_i} \|q_h\|_{0,\Omega_i}} \ge \lambda^*\,. \tag{9.11}$$

Si cette condition est vérifiée sur tous les macro-éléments, alors on construit Π_h en corrigeant P_h ainsi:

$$\Pi_h(\boldsymbol{v}) = P_h(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})\,,$$

où

$$\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{R} \boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})\,,$$

et $\boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{V}_h^{\perp}(\Omega_i)$, étendue par zéro hors de Ω_i, est solution de

$$\forall q_h \in \tilde{M}_h(\Omega_i)\,,\ \int_{\Omega_i} q_h \operatorname{div} \boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_i} q_h \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x}\,. \tag{9.12}$$

Grâce au Théorème 7.4, pour $1 \le i \le R$, l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{V}_h^{\perp}(\Omega_i)$ est assurée par (9.11) et on a

$$|\boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega_i} \le \frac{1}{\lambda^*} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))\|_{0,\Omega_i}\,.$$

Il est clair que $\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v}) \in \tilde{X}_h$, et comme on a supposé que les Ω_i sont disjoints deux à deux, on a

$$|\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega} = (\sum_{i=1}^{R} |\boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})|^2_{1,\Omega_i})^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda^*} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))\|_{0,\Omega} \,.$$

Donc (9.10) entraine que

$$|\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\lambda^*} (\sqrt{d} + C)|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \,, \tag{9.13}$$

avec une constante C qui ne dépend pas de h. De plus $\Pi_h(\boldsymbol{v})$ vérifie (9.7); en effet, tout $q_h \in M_h$ s'écrit dans chaque T:

$$q_h = \tilde{q}_h + \frac{1}{|T|} \int_T q_h d\boldsymbol{x} \,,$$

avec $\tilde{q}_h \in \tilde{M}_h$. D'une part, (9.12) entraine que

$$\int_\Omega \tilde{q}_h \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - \Pi_h(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{R} \int_{\Omega_i} \tilde{q}_h \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - \Pi_h(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x} = 0 \,,$$

et d'autre part, d'après le choix de P_h et $\tilde{X}_h$, on a dans chaque T:

$$\int_T \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x} = 0 \;, \quad \int_T \mathrm{div}\, \boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = 0 \,.$$

Pour chaque i, l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})$ définie par (9.12) est linéaire car $\boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})$ est déterminé de manière unique et le second membre de (9.12) dépend linéairement de $\boldsymbol{v}$. Donc, on a bien $\Pi_h \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^d; X_h)$ et d'après (9.10) et (9.13), on a

$$|\Pi_h(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega} \leq |P_h(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega} + |\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})|_{1,\Omega} \leq C|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \,,$$

avec une autre constante C qui dépend de λ^* mais pas de h. En conclusion, Π_h vérifie (9.6) et (9.7) et le Lemme 9.1 implique la condition inf-sup. On vient de démontrer le

Théorème 9.2. *Sous les hypothèses suivantes:*

1) $\mathcal{T}_h$ est une famille régulière de triangulations de $\overline{\Omega}$;

2) il existe un opérateur $P_h \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^d; X_h)$ qui satisfait (9.9) et (9.10);

3) il existe une constante $\lambda^* > 0$, indépendante de h et i, telle que (9.11) soit vérifié pour tout Ω_i.

Alors, il existe une constante $\beta^* > 0$, indépendante de h, telle que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \frac{-\int_\Omega q_h \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega}} \geq \beta^* \,. \tag{9.14}$$

Remarque. L'opérateur Π_h est local à chaque Ω_i en ce sens que si le support de $\boldsymbol{v}$ est contenu dans Ω_i (i.e. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ sur $\partial\Omega_i$), alors, on peut construire $P_h(\boldsymbol{v})$ de telle sorte que $P_h(\boldsymbol{v}) \in H_0^1(\Omega_i)^d$ et dans ce cas, la réunion Δ_T est contenue dans Ω_i. Alors $\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})$ a son support dans Ω_i et donc $\Pi_h(\boldsymbol{v})$ a aussi son support dans Ω_i. De même, si $\mathcal{O}$ est la plus petite réunion de Ω_i contenant le support de $\boldsymbol{v}$ (i.e. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ sur $\partial\mathcal{O}$), alors $\boldsymbol{c}_h(\boldsymbol{v})$ a son support dans $\partial\mathcal{O}$.

Remarque. La propriété (9.9) dans chaque T, ainsi que les définitions de $\tilde{X}_h$ et $\tilde{M}_h$ ne servent que si les Ω_i ont des recouvrements. S'ils n'ont pas de recouvrement, on peut remplacer ces conditions sur T par les mêmes conditions sur chaque Ω_i.

Remarque. Si les Ω_i ont des recouvrements, i.e. ne sont pas disjoints deux-à-deux, ce qui est souvent le cas, on leur associe une partition de Ω, $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^R$ définie par: $\mathcal{O}_1 = \Omega_1$, puis de manière récursive par: $\mathcal{O}_i$ est la réunion des T dans Ω_i qui ne sont pas déjà dans la réunion des $\mathcal{O}_j$ pour $1 \le j \le i-1$. Noter qu'il est possible que certains $\mathcal{O}_i$ soient vides. Puis, on remplace (9.12) par

$$\forall q_h \in \tilde{M}_h(\Omega_i)\,,\ \int_{\Omega_i} q_h \operatorname{div} \boldsymbol{c}_{h,i}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}_i} q_h \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - P_h(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x}\,,$$

avec $\boldsymbol{c}_{h,i} = \boldsymbol{0}$ si $\mathcal{O}_i$ est vide. Alors l'énoncé du Théorème 9.2 reste valable, sous l'hypothèse que chaque Ω_i contient au plus L_3 éléments T et que chaque T peut appartenir à au plus L_4 macro-éléments Ω_i, avec des entiers L_3 et L_4 indépendants de h et i.

• **Exemples, approximation discontinue de la pression.** On se restreint à la dimension $d = 2$, mais les exemples suivants s'étendent facilement à la dimension 3. Dans tout ce qui suit, on suppose que Ω est polygonal, de manière à le trianguler entièrement. On désigne par $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ composée de triangles.

• **1.** Soit

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega)\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, q_h|_T \in I\!P_0\}\,. \tag{9.15}$$

Il existe des contre-exemples qui montrent qu'on ne peut pas lui associer des fonctions continues $\boldsymbol{v}_h$ qui sont seulement des polynômes de degré 1 dans chaque T: elles n'ont pas assez de degrés de liberté. Il est possible de prendre des polynômes de degré 2, mais ce n'est pas indispensable; il suffit de bien choisir un espace incomplet de polynômes de degré 2. L'idée est de choisir $\boldsymbol{w}$ tel que $\boldsymbol{w} \in I\!P_2^2$ à l'intérieur de chaque T et $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{t} \in I\!P_1$ sur chaque côté T' de T. Par exemple, on peut décomposer $\boldsymbol{v}_h|_T$ en une somme

$$\boldsymbol{v}_h|_T = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \ \text{ avec } \ \boldsymbol{w}_1 \in I\!P_1^2\ ,\ \boldsymbol{w}_2 \in I\!P_2^2\ ,\ \boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{t}|_{T'} = 0\ , \ \text{ pour chaque côté } T' \text{ de } T\,,$$

où $\boldsymbol{w}_2$ servira uniquement à assurer la validité de la condition (9.7). Pour cela, on prend

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{n}_1\lambda_2\lambda_3\ ,\ \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{n}_2\lambda_3\lambda_1\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{n}_3\lambda_1\lambda_2\,,$$

et on remarque que $\boldsymbol{p}_1|_{f_2} = \boldsymbol{p}_1|_{f_3} = \boldsymbol{0}$ et $(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1)|_{f_1} = \lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1) = 0$, où f_i désigne le côté de T opposé au sommet a_i; avec des relations semblables pour $\boldsymbol{p}_2$ et $\boldsymbol{p}_3$. On définit

$$\mathcal{P}_1(T) = I\!P_1^2 \oplus \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}\,, \tag{9.16}$$

$$X_h = \{\boldsymbol{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^2\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, \boldsymbol{v}_h|_T \in \mathcal{P}_1(T)\} \cap H_0^1(\Omega)^2\,, \tag{9.17}$$

avec les degrés de liberté dans chaque T

$$\Sigma_T = \{\boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{f}(a_i), 1 \le i \le 3\} \cup \{\boldsymbol{f} \mapsto \int_{f_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma, 1 \le i \le 3\}\,.$$

Remarque. Tout polynôme $\boldsymbol{p}$ de $\mathcal{P}_1(T)$ s'écrit

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{p}_i \quad \text{où } \boldsymbol{p}_0 \in I\!P_1^2\,.$$

Mais les polynômes $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ s'annulent aux trois sommets a_1, a_2, a_3 de T. Donc

$$\boldsymbol{p}_0 = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}(a_i)\lambda_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}(a_i)\lambda_i + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{p}_i\,.$$

Lemme 9.3. *L'ensemble Σ_T est unisolvent sur $\mathcal{P}_1(T)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\mathrm{Card}(\Sigma_T) = \dim(\mathcal{P}_1(T)) = 9$. Calculons les coefficients α_i:

$$\begin{aligned}\int_{f_i} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma &= \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{p}(a_j) \cdot \boldsymbol{n}_i \int_{f_i} \lambda_j \, d\sigma + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \int_{f_i} \boldsymbol{p}_j \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{p}(a_j) \cdot \boldsymbol{n}_i \int_{f_i} \lambda_j \, d\sigma + \alpha_i \int_{f_i} \lambda_j \lambda_k \, d\sigma\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_i = \frac{1}{\int_{f_i} \lambda_j \lambda_k \, d\sigma} \int_{f_i} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}(a_j)\lambda_j - \boldsymbol{p}(a_k)\lambda_k) \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma\,.$$

On déduit facilement de cette égalité que si $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_1(T)$ vérifie $\boldsymbol{p}(a_i) = \boldsymbol{0}$ et $\int_{f_i} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma = 0$ pour $1 \le i \le 3$, alors $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$. ♢

Il s'agit maintenant de construire un opérateur d'interpolation Π_h qui satisfasse les conditions (9.6) et (9.7) du Lemme 9.1. Mais pour vérifier (9.6), il ne faut pas qu'il fasse intervenir les valeurs des fonctions aux sommets des triangles. Le plus simple est d'utiliser sans démonstration un l'opérateur analogue à P_h, qui a servi à démontrer le Théorème 9.2. Pour cela, on introduit l'espace classique d'éléments finis:

$$\Theta_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, v_h|_T \in I\!P_1\} \cap H_0^1(\Omega)\,,$$

et on suppose qu'on a un opérateur $R_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); \Theta_h)$ qui vérifie une extension de (9.10):

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \forall v \in H^k(\Omega)\ ,\ |v - R_h(v)|_{\ell,T} \le C\,\sigma_{\Delta_T}\,h_T^{k-\ell}|v|_{k,\Delta_T}\ , \tag{9.18}$$

pour $k = 1$ ou 2 et $\ell = 0$ ou 1. Evidemment, pour $k = 2$, la fonction $\boldsymbol{v}$ est continue et on peut utiliser l'opérateur d'interpolation de Lagrange standard au lieu de R_h, mais on prend R_h ici pour ne pas faire d'exception. Avec cet opérateur, on définit d'abord $\Pi_T(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{P}_1(T)$ dans chaque T par

$$\Pi_T(\boldsymbol{v}) = R_h(\boldsymbol{v})|_T + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{p}_i \quad \text{où} \quad \alpha_i \text{ est choisi pour que } \quad \int_T \mathrm{div}\,(\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = 0\,.$$

Or

$$\int_T \mathrm{div}\,(\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = \int_{\partial T} (\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,,$$

et on trouve facilement qu'en choisissant

$$\alpha_i = \frac{1}{\int_{f_i} \lambda_j \lambda_k\, d\sigma} \int_{f_i} (\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{n}_i\, d\sigma\,,$$

on a sur chaque côté f_i de T,

$$\int_{f_i} (\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}_i\, d\sigma = 0\,.$$

Puis, on définit l'opérateur global $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_h)$ par

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ \Pi_h(\boldsymbol{v})|_T = \Pi_T(\boldsymbol{v})\,.$$

Théorème 9.4. *On suppose que la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ est régulière. Alors l'opérateur $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_h)$ vérifie:*

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2\,,\, \forall T \in \mathcal{T}_h\ ,\ |\Pi_h(\boldsymbol{v})|_{1,T} \le C|\boldsymbol{v}|_{1,\Delta_T}\,, \tag{9.19}$$

avec une constante C indépendante de h et T. De plus, on a toujours,

$$\forall q_h \in M_h\ ,\ \int_\Omega \mathrm{div}\,(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) q_h\, d\boldsymbol{x} = 0\,.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$. Pour tout $q_h \in M_h$, on a par construction

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) q_h \, d\boldsymbol{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_h \int_T \operatorname{div}(\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} = 0 \, .$$

Ensuite, pour montrer (9.19), calculons $|\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}|_{1,T}$:

$$|\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}|_{1,T} \leq |\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})|_{1,T} + \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i| |\boldsymbol{p}_i|_{1,T} \, .$$

D'une part,

$$|\boldsymbol{p}_i|_{1,T} = |\boldsymbol{n}_i \lambda_j \lambda_k|_{1,T} \leq |\lambda_j \lambda_k|_{1,T} \, ,$$

car $\boldsymbol{n}_i$ est constant et de norme 1. Donc

$$|\boldsymbol{p}_i|_{1,T} \leq \hat{C}_1 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\| |\hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k|_{1,\hat{T}} \, .$$

Mais $|\hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k|_{1,\hat{T}} = \hat{C}_2$, constante qui ne dépend pas de T, donc

$$|\boldsymbol{p}_i|_{1,T} \leq \hat{C}_3 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\| \, . \tag{9.20}$$

D'autre part

$$|\alpha_i| = \frac{1}{\int_{f_i} \lambda_j \lambda_k \, d\sigma} \left| \int_{f_i} (\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma \right| .$$

$$\int_{f_i} \lambda_j \lambda_k \, d\sigma = \frac{\operatorname{mes}(f_i)}{\operatorname{mes}(\hat{f}_i)} \int_{\hat{f}_i} \hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k \, d\hat{\sigma} = \hat{C}_4 \frac{\operatorname{mes}(f_i)}{\operatorname{mes}(\hat{f}_i)} \, ,$$

$$\left| \int_{f_i} (\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma \right| \leq \frac{\operatorname{mes}(f_i)}{\operatorname{mes}(\hat{f}_i)} \int_{\hat{f}_i} \|\hat{\boldsymbol{v}} - \widehat{R_h(\boldsymbol{v})}\| \, d\hat{\sigma} \leq \hat{C}_5 \frac{\operatorname{mes}(f_i)}{\operatorname{mes}(\hat{f}_i)} \|\hat{\boldsymbol{v}} - \widehat{R_h(\boldsymbol{v})}\|_{1,\hat{T}} \, ,$$

grâce au théorème de trace. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{f_i} (\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma \right| \leq \hat{C}_6 \frac{\operatorname{mes}(f_i)}{\operatorname{mes}(\hat{f}_i)} |\det(B_T)|^{-1/2} (&\|\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}^2 \\ &+ \|B_T\|^2 |\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})|_{1,T}^2)^{1/2} \end{aligned} .$$

Par conséquent,

$$|\alpha_i| \leq \hat{C}_7 |\det(B_T)|^{-1/2} (\|\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}^2 + h_T^2 |\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})|_{1,T}^2)^{1/2} \, . \tag{9.21}$$

De (9.20) et (9.21), on tire

$$|\alpha_i| |\boldsymbol{p}_i|_{1,T} \leq \hat{C}_3 \hat{C}_7 \|B_T^{-1}\| (\|\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}^2 + h_T^2 |\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})|_{1,T}^2)^{1/2} \, , \tag{9.22}$$

d'où

$$|\alpha_i||\boldsymbol{p}_i|_{1,T} \leq \hat{C}_8 \sigma_{\Delta_T}(1+\sigma_{\Delta_T}^2)^{1/2}|\boldsymbol{v}|_{1,\Delta_T}\,,$$

grâce à la propriété d'approximation (9.18). Donc

$$(\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|^2|\boldsymbol{p}_i|_{1,T}^2)^{1/2} \leq 3\hat{C}_8 \sigma_{\Delta_T}(1+\sigma_{\Delta_T}^2)^{1/2}|\boldsymbol{v}|_{1,\Delta_T}\,.$$

Ceci entraine (9.19) et en sommant sur tous les T, on trouve

$$|\Pi_h(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \leq C_9|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\,,$$

avec une constant C_9 indépendante de h, car la régularité de la triangulation fait qu'un même élément ne peut appartenir qu'à au plus L_2 réunions Δ_T. ♢

Conséquence La paire d'espaces M_h et X_h définis par (9.15) et (9.17) vérifie la condition (9.5) avec une constante $\beta^* > 0$ indépendante de h.

Corollaire 9.5. *Si la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière, l'opérateur Π_h vérifie la propriété d'approximation, pour $\ell = 0$ ou 1 et $k = 1$ ou 2:*

$$\forall \boldsymbol{v} \in [H^k(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]^2\ ,\ |\Pi_h(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}|_{\ell,\Omega} \leq Ch^{k-\ell}|\boldsymbol{v}|_{k,\Omega}\,.$$

Démonstration. A partir de (9.18) et (9.22), on montre facilement le résultat pour $\ell = 1$. Si $\ell = 0$, on remplace (9.20) par:

$$\|\boldsymbol{p}_i\|_{0,T} \leq \|\lambda_j\lambda_k\|_{0,T} \leq \hat{C}|\det B_T|^{1/2}\,.$$

Donc, à la place de (9.22), on a

$$|\alpha_i|\|\boldsymbol{p}_i\|_{0,T} \leq \hat{C}(\|\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}^2 + h_T^2|\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v})|_{1,T}^2)^{1/2}\,, \tag{9.23}$$

et le résultat découle encore de (9.18). ♢

Remarque. Il découle de (9.22) et (9.23) que l'erreur d'approximation de Π_h est la même que celle de R_h. Donc on peut améliorer l'énoncé du Corollaire 9.5, en prenant un opérateur R_h plus précis. Ceci servira dans l'exemple plus loin.

Remarque. On peut étendre l'argument de dualité à l'approximation du problème de Stokes.

Pour compléter l'analyse d'erreur du schéma (9.3), (9.4) avec les espaces (9.15) et (9.17), il reste à estimer l'erreur de l'espace M_h. C'est facile parce que les fonctions de

M_h n'ont pas de condition de raccord aux interfaces des éléments. Il suffit d'approcher la fonction q dans chaque triangle T par sa projection orthogonale π_T sur $I\!\!P_0$ dans $L^2(T)$:

$$\forall q \in L^2(T) \ , \ \pi_T(q) \in I\!\!P_0 \ , \ \int_T \pi_T(q)\, d\boldsymbol{x} = \int_T q\, d\boldsymbol{x} \, .$$

On définit $\pi_h(q)$ par $\pi_h(q)|_T = \pi_T(q|_T)$ et on a bien $\pi_h(q) \in M_h$ car si $\int_\Omega q\, d\boldsymbol{x} = 0$, on a $\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \pi_T(q)\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega q\, d\boldsymbol{x} = 0$ et de plus, comme π_T conserve les constantes et est invariant par transformation affine, on montre par passage à l'élément de référence que

$$\forall q \in H^1(\Omega) \ , \ \|q - \pi_h(q)\|_{0,\Omega} \le Ch|q|_{1,\Omega} \, .$$

Corollaire 9.6. *On suppose que la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière. Si la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ du problème de Stokes appartient à $H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$, le schéma (9.3), (9.4) avec les espaces M_h et X_h définis par (9.15) et (9.17) vérifie l'estimation d'erreur*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \le Ch(|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}) \, .$$

• **2.** Soit

$$M_h = \{q_h \in L^2_0(\Omega) \, ; \, \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, q_h|_T \in I\!\!P_1\} \, . \tag{9.24}$$

Comme pour l'exemple précédent, on doit choisir $\boldsymbol{v}$ dans un espace convenable incomplet de polynômes de degré 3. L'idée est encore de choisir $\boldsymbol{w}$ tel que $\boldsymbol{w} \in I\!\!P_3^2$ à l'intérieur de chaque T et $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{t} \in I\!\!P_2$ sur chaque côté T' de T. Par exemple, on peut prendre

$$\boldsymbol{v}_h|_T = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \ \text{ avec } \ \boldsymbol{w}_1 \in I\!\!P_2^2 \ , \ \boldsymbol{w}_2 \in I\!\!P_3^2 \ , \ \boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{t}|_{T'} = 0 \, ,$$

où $\boldsymbol{w}_2$ sert uniquement à assurer la validité de la condition (9.5). Mais dans le cas présent, c'est plus facile que pour l'exemple précédent, car le degré des polynômes permet de prendre pour chaque composante de $\boldsymbol{w}_2$ une fonction "bulle": $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. On définit

$$\mathcal{P}_2(T) = (I\!\!P_2 \oplus \mathrm{Vect}\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\})^2 \, , \tag{9.25}$$

$$X_h = \{\boldsymbol{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^2 \, ; \, \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \, \boldsymbol{v}_h|_T \in \mathcal{P}_2(T)\} \cap H^1_0(\Omega)^2 \, , \tag{9.26}$$

avec les degrés de liberté

$$\Sigma_T = \{f \mapsto f(a_i), 1 \le i \le 3\}^2 \cup \{f \mapsto \int_{f_i} f\, d\sigma, 1 \le i \le 3\}^2 \cup \{f \mapsto \int_T f\, d\boldsymbol{x}\}^2 \, .$$

Lemme 9.7. *L'ensemble Σ_T est $\mathcal{P}_2(T)$ unisolvent.*

Démonstration. On a, $\mathrm{card}(\Sigma_T) = (6+1) \times 2 = 14 = \dim(\mathcal{P}_2(T))$; donc il suffit de montrer que si un polynôme $\boldsymbol{p}$ de $\mathcal{P}_2(T)$ a tous ses degrés de liberté nuls, alors il est nul. D'une part, comme $\boldsymbol{p}|_{T'} \in \mathbb{P}_2^2$, alors $\boldsymbol{p}|_{T'} = \mathbf{0}$, car chaque composante de $\boldsymbol{p}$ a trois racines sur T'. Donc $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Mais d'autre part, $\int_T \boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; donc $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. $\diamondsuit$

L'opérateur d'interpolation correspondant Π_T préserve les polynômes de $\mathcal{P}_2(T)$, donc en particulier les polynômes de $\mathbb{P}_2^2$. De plus, il est invariant par transformation affine. Il est donc facile de démontrer que

$$\forall \boldsymbol{v} \in [H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \ , \ \inf_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h|_{1,\Omega} \le Ch^2 |\boldsymbol{v}|_{3,\Omega} \,.$$

Nous allons démontrer la condition inf-sup discrète (9.5) par la méthode des macro-éléments. Remarquons que les fonctions de l'espace X_h défini par (9.26) appartiennent à $\mathbb{P}_2^2$ dans chaque T. Donc, on peut prendre pour P_h l'opérateur Π_h du Théorème 9.4 construit à partir d'un opérateur de régularisation R_h plus précis. En effet, on suppose qu'on a un opérateur de régularisation $R_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); \Theta_h)$, où ici

$$\Theta_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, v_h|_T \in \mathbb{P}_2\} \cap H_0^1(\Omega)\,,$$

et on suppose que R_h vérifie une extension de (9.18):

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \ , \ \forall v \in H^k(\Omega) \ , \ |v - R_h(v)|_{\ell,T} \le C\, \sigma_{\Delta_T}\, h_T^{k-\ell} |v|_{k,\Delta_T} \ , \qquad (9.26)$$

pour $k = 1, 2$ ou 3 et $\ell = 0$ ou 1. D'après la remarque plus haut, l'opérateur Π_h correspondant vérifie (9.9) et (9.26).

Il ne reste plus qu'à montrer une condition locale comme (9.11). Ici, on peut prendre $\Omega_i = T$, c'est-à-dire, on décompose Ω avec les triangles de $\mathcal{T}_h$, ce qui est bien une partition de Ω. Puis, on définit les espaces locaux

$$\tilde{X}_h(T) = \{\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{c}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,;\, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2\}\,,$$

$$\tilde{M}_h(T) = \{q_h \in \mathbb{P}_1\,;\, \int_T q_h\, d\boldsymbol{x} = 0\}\,.$$

Remarquons que les fonctions de $\tilde{X}_h(T)$ vérifient automatiquement

$$\int_T \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h\, d\boldsymbol{x} = 0\,,$$

puisqu'elles s'annulent sur ∂T. On démontre la condition "inf-sup" locale en deux étapes.

Lemme 9.8. *Il existe une constante $\gamma_1 > 0$, indépendante de h et de T, telle que*

$$\forall q \in \mathbb{P}_1 \ , \quad \sup_{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h(T)} \frac{-\int_T q \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,T}} \geq \gamma_1 \frac{1}{\|B_T^{-1}\|} \|\nabla q\|_{0,T} \, .$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{P}_1$; on lui associe $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{c}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, où le vecteur constant $\boldsymbol{c}$ est à choisir. Or

$$-\int_T q \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} = \int_T \nabla q \cdot \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} \quad \text{car} \quad \boldsymbol{v}_h|_{\partial T} = \boldsymbol{0} \, .$$

Mais ∇q est un vecteur constant; donc on peut choisir $\boldsymbol{c} = \nabla q$:

$$-\int_T q \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} = \int_T \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \|\nabla q\|^2 d\boldsymbol{x} \, ,$$

et

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_{0,T} = \|\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \nabla q\|_{0,T} \leq \|\nabla q\|_{0,T} \, .$$

D'une part, l'inégalité inverse, qui s'applique à $\hat{\boldsymbol{v}}_h$, puisque $\hat{\boldsymbol{v}}_h$ appartient à un espace de dimension finie, donne

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}_h|_{1,T} &\leq \hat{C}_1 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\| |\hat{\boldsymbol{v}}_h|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}_2 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\| \|\hat{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,\hat{T}} \\ &= \hat{C}_2 \|B_T^{-1}\| \|\boldsymbol{v}_h\|_{0,T} \leq \hat{C}_2 \|B_T^{-1}\| \|\nabla q\|_{0,T} \, . \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_T \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \|\nabla q\|^2 d\boldsymbol{x} = |\det(B_T)| \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 \|\widehat{\nabla q}\|^2 d\hat{\boldsymbol{x}} \, ,$$

et l'application $\hat{\varphi} \mapsto (\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 \hat{\varphi}^2 \, d\hat{\boldsymbol{x}})^{1/2}$ est une norme sur tout espace de dimension finie (dont $\mathbb{P}_0$) équivalente à la norme $\| \cdot \|_{0,\hat{T}}$. Donc

$$\int_T \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \|\nabla q\|^2 d\boldsymbol{x} \geq \hat{C}_3 |\det(B_T)| \|\widehat{\nabla q}\|^2_{0,\hat{T}} = \hat{C}_3 \|\nabla q\|^2_{0,T} \, ,$$

d'où le résultat avec $\gamma_1 = \frac{\hat{C}_3}{\hat{C}_2}$. ♢

Lemme 9.9. *Il existe une constante $\gamma_2 > 0$, indépendante de h et de T, telle que*

$$\forall q \in H^1(T) \cap L^2_0(T) \ , \ \|q\|_{0,T} \leq \gamma_2 \|B_T\| |q|_{1,T} \, .$$

Démonstration. Soit $q \in H^1(T) \cap L^2_0(T)$. Alors

$$\begin{aligned} \|q\|_{0,T} &= \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{0,T} = |\det(B_T)|^{1/2} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\hat{q} + c\|_{0,\hat{T}} \\ &\leq |\det(B_T)|^{1/2} \|\hat{q}\|_{H^1(\hat{T})/\mathbb{R}} \leq \hat{C}_1 |\det(B_T)|^{1/2} |\hat{q}|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}_2 \|B_T\| |q|_{1,T} \, , \end{aligned}$$

où $\hat{C}_1$ est la constante du Théorème de Deny-Lions appliqué sur $\hat{T}$ avec $k = 0$. ♢

Théorème 9.10. *Si la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière, la paire d'espaces locaux $\tilde{X}_h(T)$ et $\tilde{M}_h(T)$ vérifie la condition "inf-sup" locale: il existe une constante $\lambda^* > 0$, indépendante de h et de T, telle que*

$$\forall q_h \in \tilde{M}_h(T)\ ,\ \sup_{\boldsymbol{v}_h \in \tilde{X}_h(T)} \frac{-\int_T q_h \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,T}} \geq \lambda^* \|q_h\|_{0,T}\,. \tag{9.28}$$

Démonstration. Des deux lemmes précédents, on déduit (9.28) avec

$$\lambda^* \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{1}{\|B_T^{-1}\| \|B_T\|} \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \hat{C}_1 \frac{\rho_T}{h_T} \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\hat{C}_1}{\sigma} \geq \frac{\hat{C}_2}{\sigma}\,. \qquad \diamondsuit$$

Selon les remarques faites plus haut, on déduit la condition "inf-sup" globale de cette condition locale et du Théorème 9.2.

Corollaire 9.11. *On suppose que la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière. Alors, la paire d'espaces M_h et X_h définis par (9.24) et (9.26) vérifie la condition "inf-sup" globale uniforme: il existe une constante $\beta^* > 0$ indépendante de h, telle que*

$$\forall q_h \in M_h\ ,\ \sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \frac{-\int_\Omega q_h \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,\Omega}} \geq \beta^* \|q_h\|_{0,\Omega}\,.$$

De même que pour l'exemple précédent, il reste à estimer l'erreur d'approximation de l'espace M_h. On l'obtient en prenant dans chaque triangle T l'opérateur de projection orthogonale π_T sur $I\!P_1$ pour la norme de $L^2(T)$:

$$\forall p \in L^2(T)\ ,\ \forall q \in I\!P_1\ ,\ \int_T (p - \pi_T(p))\, q \, d\boldsymbol{x} = 0\,.$$

Le même raisonnement (avec $I\!P_1$ au lieu de $I\!P_0$) donne

$$\forall q \in H^2(\Omega)\ ,\ \inf_{q_h \in M_h} \|q - q_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 |q|_{2,\Omega}\,.$$

Ce résultat s'étend facilement à la projection orthogonale sur $I\!P_k$.

Corollaire 9.12. *On suppose que la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière. Si la solution du problème de Stokes $(\boldsymbol{u}, p)$ appartient à $H^3(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$, le schéma (9.3), (9.4) avec la paire d'espaces M_h et X_h définis par (9.24) et (9.26) vérifie l'estimation d'erreur*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 (|\boldsymbol{u}|_{3,\Omega} + |p|_{2,\Omega})\,.$$

• **Exemple: approximation continue de la pression.**

La pression appartient à $L^2(\Omega)$, donc il est possible que sa régularité soit faible. Mais rien n'empêche de l'approcher par des éléments finis continus. Les schémas correspondants demandent moins de degrés de liberté, mais inversement, ils perdent la propriété importante suivante (dite de conservativité):

$$\forall T \in \mathcal{T}_h\,, \int_T \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} = 0\,.$$

En effet cette egalité n'a lieu que si M_h contient les constantes par morceaux et évidemment, ces fonctions ne sont pas globalement continues.

3. Elément "mini". Soit

$$M_h = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, q_h|_T \in I\!P_1\} \cap L_0^2(\Omega)\,. \tag{9.29}$$

Comme dans le cas des pressions discontinues, on peut montrer par contre-exemple qu'on ne peut pas associer à cet espace des fonctions continues $\boldsymbol{v}_h$ qui soient seulement des polynômes de degré 1 dans chaque T. Nous allons voir qu'ici, il suffit de leur ajouter une fonction "bulle". On définit

$$\mathcal{P}(T) = I\!P_1 \oplus \operatorname{Vect}\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}\,,$$

et on prend $\boldsymbol{v}_h$ dans l'espace

$$X_h = [\{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_h\,,\, v_h|_T \in \mathcal{P}(T)\} \cap H_0^1(\Omega)]^2\,, \tag{9.30}$$

muni des degrés de liberté dans chaque T

$$\Sigma_T = \{f \mapsto f(a_i)\,;\, 1 \le i \le 3\}^2 \cup \{f \mapsto \int_T f\, dx\}^2\,.$$

Remarque. Noter que $\operatorname{card}(\Sigma_T) = 8 = \dim(\mathcal{P}(T)^2)$ et que tout polynôme p de $\mathcal{P}(T)$ s'écrit

$$p = \sum_{i=1}^{3} p(a_i)\lambda_i + c\, b \quad \text{où} \quad b = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\int_T b\, d\boldsymbol{x}} \int_T (p - \sum_{i=1}^{3} p(a_i)\lambda_i) d\boldsymbol{x}\,.$$

Cette égalité montre l'unisolvence de Σ_T sur $\mathcal{P}(T)^2$.

Pour montrer la condition "inf-sup" discrète (9.5), il est commode d'utiliser le Lemme 9.1, donc il faut construire un opérateur d'approximation qui vérifie (9.6) et (9.7). On reprend l'opérateur R_h utilisé par le Théorème 9.4 et qui vérifie (9.18), puis on définit localement l'opérateur d'approximation Π_T dans chaque T par

$$\Pi_T(\boldsymbol{v}) = R_h(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{c}\, b$$

où le vecteur constant $\boldsymbol{c}$ est choisi pour que

$$\int_T (\Pi_T(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{\int_T b\, d\boldsymbol{x}} \int_T (\boldsymbol{v} - R_h(\boldsymbol{v})) d\boldsymbol{x}\,.$$

Ensuite, on définit l'opérateur global d'interpolation $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_h)$ par

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \ , \ \Pi_h(\boldsymbol{v})|_T = \Pi_T(\boldsymbol{v})\,.$$

Théorème 9.13. *Si la famille de triangulations $\mathcal{T}_h$ est régulière, alors l'opérateur $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_h)$ défini ci-dessus vérifie*

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h \ , \ |\Pi_h(\boldsymbol{v})|_{1,T} \leq C|\boldsymbol{v}|_{1,\Delta_T}\,, \tag{9.31}$$

avec une constante C indépendante de h et de T. De plus, on a toujours

$$\forall q_h \in M_h \ , \ \int_\Omega q_h \operatorname{div}(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = 0\,.$$

Démonstration. Remarquons que

$$-\int_\Omega q_h \operatorname{div}(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla q_h \cdot (\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\,,$$

car $q_h \in H^1(\Omega)$ et $\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$. Donc

$$-\int_\Omega q_h \operatorname{div}(\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla q_h \cdot (\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = 0\,,$$

puisque dans chaque T, $\nabla q_h \in I\!\!P_0^2$.

Pour montrer (9.31), on va estimer $|\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}|_{1,T}$; grâce au support de b, on a:

$$|\Pi_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}|_{1,T} \leq |R_h(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}|_{1,T} + \|\boldsymbol{c}\|\, |b|_{1,T}\,.$$

D'une part,

$$\begin{aligned} |b|_{1,T} &\leq \hat{C}_1 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\| |\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3|_{1,\hat{T}} \\ &\leq \hat{C}_2 |\det(B_T)|^{1/2} \|B_T^{-1}\|\,, \end{aligned}$$

car $|\hat\lambda_1\hat\lambda_2\hat\lambda_3|_{1,\hat T}$ est une constante qui ne dépend que de $\hat T$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{c}\| &= \frac{1}{\int_T b\,d\boldsymbol{x}}\|\int_T(\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v}))d\boldsymbol{x}\| = \frac{\mathrm{mes}(\hat T)}{\mathrm{mes}(T)\int_{\hat T}\hat\lambda_1\hat\lambda_2\hat\lambda_3\,d\hat{\boldsymbol{x}}}\|\int_T(\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v}))d\boldsymbol{x}\| \\
&\le \frac{\mathrm{mes}(\hat T)}{\mathrm{mes}(T)\int_{\hat T}\hat\lambda_1\hat\lambda_2\hat\lambda_3\,d\hat{\boldsymbol{x}}}\mathrm{mes}(T)^{1/2}(\int_T\|\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v})\|^2d\boldsymbol{x})^{1/2} \\
&\le \hat C_3\frac{1}{\mathrm{mes}(T)^{1/2}}\|\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\boldsymbol{c}\|\,|b|_{1,T} \le \hat C_4\|B_T^{-1}\|\|\boldsymbol{v}-R_h(\boldsymbol{v})\|_{0,T}\,,$$

et (9.18) entraine en particulier:

$$|\Pi_h(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}|_{1,T} \le |R_h(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}|_{1,T}+\frac{\hat C_5}{\varrho_T}\|\boldsymbol{v}-R(\boldsymbol{v})\|_{0,T} \le \hat C_6|\boldsymbol{v}|_{1,\Delta_T}\,.$$

$\diamondsuit$

Remarques.

1) Ici aussi, l'opérateur Π_h est local.

2) En fait on a mieux que (9.31) si $\boldsymbol{v}$ est plus régulier, car (9.18) entraine aussi que

$$\forall\boldsymbol{v}\in[H^k(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]^2\,,\ |\Pi_h(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}|_{\ell,T} \le C\sigma_{\Delta_T}h_T^{k-\ell}|\boldsymbol{v}|_{k,\Delta_T}\,, \tag{9.32}$$

pour $k=1$ ou 2 et $\ell=0$ ou 1.

Conclusion. Sous les hypothèses du Théorème 9.13, la paire d'espaces M_h et X_h définis par (9.29) et (9.30) vérifie une condition "inf-sup" uniforme.

Enfin, en ce qui concerne l'erreur d'approximation de l'espace M_h, on prend un opérateur de régularisation semblable à R_h, mais qui n'impose pas les valeurs nulles au bord. Ensuite, à partir de $R_h(p)$, il est facile d'obtenir une fonction de M_h en posant

$$\tilde R_h(p) = R_h(p) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_h(p)d\boldsymbol{x}\,.$$

Alors $\tilde R_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega); M_h)$ et a les mêmes propriétés d'approximation que R_h (mais il n'est pas local). Si la famille de triangulations est régulière, on a:

$$\forall q\in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)\,,\ \|q-\tilde R_h(q)\|_{0,\Omega} \le C\,h|q|_{1,\Omega}\,.$$

Le corollaire suivant résume ces résultats.

Corollaire 9.14. *Si la famille de triangulations est régulière et si la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ du problème de Stokes appartient à $H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$, il existe une constante C indépendante de h, $\boldsymbol{u}$ et p telle que le schéma (9.3), (9.4) avec les espaces M_h et X_h définis par (9.29) et (9.30) vérifie la majoration d'erreur*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C\, h(|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}) .$$

X. Un exemple d'approximation non-conforme: le schéma de Crouzeix-Raviart

Soit Ω un ouvert polygonal en dimension 2. On reprend le problème de Dirichlet pour le Laplacien, mais avec un second membre plus régulier:

Pour f donné dans $L^2(\Omega)$ chercher $u \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et } u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega . \tag{10.1}$$

• **Espaces discrets.** Soit $\hat{T}$ le triangle de référence et $(\hat{T}, I\!P_1, \hat{\Sigma})$ l'élément fini de Lagrange de référence de Crouzeix-Raviart, i.e.

$$\hat{\Sigma} = \{ f \mapsto \int_{f_i} f \, d\sigma \, ; \, 1 \leq i \leq 3 \} .$$

Soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangulations de $\overline{\Omega}$ et pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, soit $(T, I\!P_1, \Sigma_T)$ l'élément fini de Lagrange affine-équivalent à $(\hat{T}, I\!P_1, \hat{\Sigma})$. On désigne par Γ_h l'ensemble de tous les segments de $\mathcal{T}_h$ et par Γ_{0h} le sous-ensemble de Γ_h des segments de $\mathcal{T}_h$ qui se trouvent sur $\partial\Omega$. Soit

$$X_h = \{ v_h \in L^2(\Omega) \, ; \, v_h|_T \in I\!P_1 \, , \, \forall T \in \mathcal{T}_h$$
$$v_h \text{ est continue au milieu du segment } T' \, , \, \forall T' \in \Gamma_h \} ,$$

$$X_{0h} = \{ v_h \in X_h \, ; \, v_h = 0 \text{ au milieu du segment } T' \, , \, \forall T' \in \Gamma_{0h} \} .$$

X_h est obtenu en assemblant côte à côte les éléments $(T, I\!P_1, \Sigma_T)$ et en prenant le même degré de liberté sur chaque segment T' de Γ_h; X_{0h} est obtenu en prenant en plus le degré de liberté nul sur chaque segment T' de Γ_{0h}.

Remarques.

1) X_h n'est pas contenu dans $H^1(\Omega)$ et X_{0h} n'est pas contenu dans $H^1_0(\Omega)$.

2) Si $T' \notin \Gamma_{0h}$, on a

$$\forall v_h \in X_h \, , \, \int_{T'} [v_h] \, d\sigma = 0 \, ,$$

car $v_h \in I\!P_1$ et v_h est continu au milieu de T'. De même, si $T' \in \Gamma_{0h}$, on a

$$\forall v_h \in X_{0h} \, , \, \int_{T'} v_h \, d\sigma = 0 \, ,$$

car $v_h = 0$ au milieu de T'. Ces propriétés sont fondamentales. On les nomme "patch-test". L'extension du "patch-test" à des éléments de degré $k > 1$ est

$$\forall T' \in \Gamma_{0h}\,,\, \forall q \in I\!P_{k-1}(T')\ ,\ \int_{T'} v_h(\sigma) q(\sigma)\, d\sigma = 0$$
$$\forall T' \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{0h}\,,\, \forall q \in I\!P_{k-1}(T') \int_{T'} [v_h](\sigma) q(\sigma)\, d\sigma = 0\,.$$

Problème discret. Pour approcher (10.1), on prend la forme bilinéaire

$$\forall u_h \in X_h\,,\, \forall v_h \in X_h\ ,\ a_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Le problème discret est

Chercher $u_h \in X_{0h}$ *tel que*

$$\forall v_h \in X_{0h}\ ,\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h)\,. \tag{10.2}$$

Ce problème a une solution unique. En effet, c'est un système linéaire carré en dimension finie (la dimension de X_{0h}). Si u_h est solution du système homogène associé, alors en particulier $a_h(u_h, u_h) = 0$, donc u_h est constant dans chaque T. Mais comme $u_h = 0$ au milieu des segments frontaliers de $\mathcal{T}_h$, alors $u_h = 0$ dans chaque T ayant un côté sur la frontière. De proche en proche, la continuité de u_h au mulieu des côtés entraine que $u_h = 0$ dans chaque T de $\mathcal{T}_h$.

Conséquence. L'application $v_h \mapsto a_h(v_h, v_h)^{1/2}$ est une norme sur X_{0h}. On la note $|v_h|_{1,h}$

$$|v_h|_{1,h} = a_h(v_h, v_h)^{1/2}\,.$$

Par la suite, on aura besoin d'une inégalité de Poincaré pour les fonctions de X_{0h}. Comme elles ne sont pas dans $H_0^1(\Omega)$, il faut faire une démonstration particulière. Il existe plusieurs démonstrations. La Proposition 10.2 en donne une qui utilise le résultat suivant.

Lemme 10.1. *Si Ω est lipschitz, il existe un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); H^1(\Omega)^d)$ tel que*

$$\forall f \in L^2(\Omega)\,,\, \operatorname{div} \tilde{T}(f) = f \text{ dans } \Omega\,,$$

et il existe une constante C telle que

$$\forall f \in L^2(\Omega)\,,\, \|\tilde{T}(f)\|_{1,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}\,.$$

Démonstration. La démonstration est beaucoup plus facile que celle du Théorème 7.2, car on ne demande pas que $\tilde{T}(f)$ s'annule sur $\partial\Omega$. Mais puisqu'on l'a, autant l'utiliser. On fixe une grande boule B telle que $\overline{\Omega} \subset B$ et $|B \setminus \overline{\Omega}| > 0$. Puis, on étend f par une constante c dans $B \setminus \overline{\Omega}$, où c est calculée pour que la fonction étendue $\tilde{f}$ appartienne à $L^2_0(B)$:

$$0 = \int_B \tilde{f}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} + c\,|B \setminus \overline{\Omega}|\,.$$

Donc

$$c = -\frac{1}{|B \setminus \overline{\Omega}|} \int_\Omega f\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Alors, on prend $\tilde{T}(f) = T(\tilde{f})$, où T est l'opérateur du Théorème 7.2 dans B et on a

$$\|\tilde{T}(f)\|_{1,\Omega} = \|T(\tilde{f})\|_{1,\Omega} \le \|T(\tilde{f})\|_{1,B} \le C_1 \|\tilde{f}\|_{0,B} \le C_2 \|f\|_{0,\Omega}\,. \qquad \diamondsuit$$

Proposition 10.2 (Inégalité de Poincaré discrète). *Si la famille $\mathcal{T}_h$ est régulière, il existe une constante C, indépendante de h, telle que*

$$\forall v_h \in X_{0h}\ ,\ \|v_h\|_{0,\Omega} \le C|v_h|_{1,h}\,. \tag{10.3}$$

Démonstration. On raisonne par dualité, en écrivant:

$$\|v_h\|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega v_h g\, d\boldsymbol{x}}{\|g\|_{0,\Omega}}\,.$$

Puis, on définit $\boldsymbol{w} = \tilde{T}(g)$; alors $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = g$, $\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega} \le C\|g\|_{0,\Omega}$ et

$$\int_\Omega v_h g\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega v_h \operatorname{div} \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (-\int_T \nabla v_h \cdot \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial T} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})\, v_h\, d\sigma)\,.$$

Considérons cette dernière intégrale. Comme $\boldsymbol{w} \in H^1(\Omega)^2$, la restriction de $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}$ sur chaque segment de Γ_h a un sens et si T_1 et T_2 sont deux triangles adjacents intérieurs, de côté commun T', $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_2$ pp sur T' car la normale change d'orientation entre T_1 et T_2. Fixons une orientation de la normale sur T', par exemple, prenons l'orientation de $\boldsymbol{n}_1$ et notons $[v_h]$ le saut de v_h à travers T' dans cette direction:

$$[v_h] = \big((v_h)|_{T_1} - (v_h)|_{T_2}\big)|_{T'}\,.$$

Alors la contribution de T' à la somme $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})\, v_h\, d\sigma$ est

$$\int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})[v_h]\, d\sigma\,.$$

Donc

$$\int_\Omega v_h g\, d\boldsymbol{x} = -\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v_h \cdot \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{T' \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{0h}} \int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})[v_h]\, d\sigma + \sum_{T' \in \Gamma_{0h}} \int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}) v_h\, d\sigma\,.$$

Soit T' un segment intérieur et soit $\boldsymbol{a}$ son point milieu (le calcul est semblable et plus facile lorsque $T' \in \Gamma_{0h}$). Alors, d'après la remarque ci-dessus, on a pour toute constante c:

$$|\int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})[v_h]\, d\sigma| = |\int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} - c)[v_h - v_h(\boldsymbol{a})]\, d\sigma| \leq \|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} - c\|_{0,T'} \|[v_h - v_h(\boldsymbol{a})]\|_{0,T'} . \tag{10.4}$$

D'une part,

$$\|[v_h - v_h(\boldsymbol{a})]\|_{0,T'} \leq \|v_h|_{T_1} - v_h(\boldsymbol{a})\|_{0,T'} + \|v_h|_{T_2} - v_h(\boldsymbol{a})\|_{0,T'} .$$

Pour simplifier, posons $z_h = v_h|_{T_1} - v_h(\boldsymbol{a})$; donc $z_h(\boldsymbol{a}) = 0$. Comme on peut supposer que $|\hat{T}'| = 1$, on a

$$\|z_h\|_{0,T'} = |T'|^{1/2} \|\hat{z}\|_{0,\hat{T}'} .$$

Mais $\hat{z}$ appartient à un espace de dimension finie qui ne dépend pas de h, sur lequel toutes les normes sont équivalentes. De plus l'application $\hat{z} \mapsto |\hat{z}|_{1,\hat{T}}$ est une norme sur cet espace, car si $|\hat{z}|_{1,\hat{T}} = 0$, alors $\hat{z}$ est une constante et comme $\hat{z}(\hat{\boldsymbol{a}}) = 0$, cette constante est nulle. Donc

$$\|z_h\|_{0,T'} \leq C_1 |T'|^{1/2} |\hat{z}|_{1,\hat{T}} \leq C_1 |T'|^{1/2} \|B_{T_1}\| |\mathrm{det} B_{T_1}|^{-1/2} |z_h|_{1,T_1} \leq C_2 \sigma_{T_1} |T'|^{1/2} |z_h|_{1,T_1} .$$

D'où

$$\|[v_h - v_h(\boldsymbol{a})]\|_{0,T'} \leq C_2 |T'|^{1/2} (\sigma_{T_1} |v_h|_{1,T_1} + \sigma_{T_2} |v_h|_{1,T_2}) . \tag{10.5}$$

D'autre part, posons $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ et prenons $c = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}$ avec $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ où c_i est la moyenne de w_i sur T_1 (le choix de T_1 est arbitraire, on peut prendre T_2 si on préfère):

$$c_i = \frac{1}{|T_1|} \int_{T_1} w_i \, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \hat{w}_i d\hat{\boldsymbol{x}} .$$

Alors, en appliquant le théorème de trace sur $\hat{T}'$, on a

$$\|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} - c\|_{0,T'} \leq \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{c}\|_{0,T'} \leq |T'|^{1/2} \|\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{\mathbf{c}}\|_{0,\hat{T}'} \leq C_3 |T'|^{1/2} (\|\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{\mathbf{c}}\|_{0,\hat{T}} + |\hat{\boldsymbol{w}}|_{1,\hat{T}}) .$$

Mais

$$\|\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{\mathbf{c}}\|_{0,\hat{T}} \leq C_4 |\hat{\boldsymbol{w}}|_{1,\hat{T}} ,$$

car l'application $\hat{w}_i \mapsto \hat{w}_i - \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \hat{w}_i d\hat{\boldsymbol{x}}$ s'annule sur les constantes. Donc

$$\|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} - c\|_{0,T'} \leq C_4 |T'|^{1/2} |\mathrm{det} B_{T_1}|^{-1/2} \|B_{T_1}\| |\boldsymbol{w}|_{1,T_1} \leq C_5 |T'|^{1/2} \sigma_{T_1} |\boldsymbol{w}|_{1,T_1} . \tag{10.6}$$

De (10.4)–(10.6) on tire:

$$|\int_{T'} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})[v_h]\, d\sigma| \leq C_6 \sigma_{T_1} |T'| (\sigma_{T_1} |v_h|_{1,T_1} + \sigma_{T_2} |v_h|_{1,T_2}) |\boldsymbol{w}|_{1,T_1} .$$

Si $T' \in \Gamma_{0h}$, on a la même expression avec un seul triangle T au lieu de deux. Donc, en sommant sur tous les segments T', en utilisant la norme discrète et la régularité de la triangulation, on trouve

$$| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})\, v_h \, d\sigma)| \leq C_7 h \, |v_h|_{1,h} |w|_{1,\Omega} \, . \tag{10.7}$$

Par conséquent,

$$| \int_{\Omega} v_h g \, d\boldsymbol{x}| \leq |v_h|_{1,h} \|w\|_{0,\Omega} + C_7 h \, |v_h|_{1,h} |w|_{1,\Omega} \, ,$$

d'où le résultat. ♢

Corollaire 10.3. *Si la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière, la solution u_h de (10.2) vérifie l'inégalité de stabilité*

$$|u_h|_{1,h} \leq C \|f\|_{0,\Omega} \, ,$$

où C est la constante de l'inégalité de Poincaré (10.3).

Théorème 7.4 (estimation d'erreur). *On suppose que $\mathcal{T}_h$ est régulière et que la solution u de (10.1) appartient à $H^2(\Omega)$. Alors, il existe une constante C, indépendante de h telle que*

$$|u - u_h|_{1,h} \leq C h |u|_{2,\Omega} \, .$$

Démonstration. On a

$$\forall v_h \in X_{0h} \ , \ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) = (-\Delta u, v_h) \, .$$

Donc

$$\forall v_h \in X_{0h} \ , \ a_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big(\int_T \nabla u \cdot \nabla v_h \, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v_h \, d\sigma \Big) \, .$$

En comparant avec (10.7), et en prenant $\boldsymbol{w} = \nabla\, u \in H^1(\Omega)^2$, on trouve immédiatement:

$$| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v_h \, d\sigma| \leq C_1 \, h \, |v_h|_{1,h} |u|_{2,\Omega} \, ,$$

où C_1 est la constante de (10.7). Par conséquent, on peut écrire:

$$\forall v_h \in X_{0h} \, , \, |a_h(u_h - u, v_h)| \leq C_1 \, h \, |v_h|_{1,h} |u|_{2,\Omega} \, .$$

Il ne reste plus qu'à intercaler dans cette formule un interpolé convenable de u, $\Pi_h(u) \in X_{0h}$, et prendre $v_h = u_h - \Pi_h(u)$:

$$|u_h - \Pi_h(u)|_{1,h} \leq |u - \Pi_h(u)|_{1,h} + C_1 \, h \, |u|_{2,\Omega} \, ,$$

d'où

$$|u - u_h|_{1,h} \leq 2\,|u - \Pi_h(u)|_{1,h} + C_1\,h\,|u|_{2,\Omega}\,.$$

Pour conclure, il faut estimer l'erreur d'approximation dans X_{0h}. Comme $u \in H^2(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, et on peut prendre l'opérateur d'interpolation de l'exemple (vi). Il est invariant par transformation affine et préserve les polynômes de $I\!P_1$. Donc dans chaque T

$$|u - \Pi_T(u)|_{1,T} \leq C_2 \sigma_T h_T |u|_{2,T} \quad \text{et} \quad |u - \Pi_h(u)|_{1,h} \leq C_2 \sigma h |u|_{2,\Omega}\,,$$

où $\Pi_h \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); X_h)$ est l'opérateur global correspondant à Π_T (noter que $\Pi_h(u) \in X_{0h}$). $\diamondsuit$

Références

"Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles" par P.A. Raviart & J.M. Thomas dans la collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise, Masson (1985).

"Discrétisations variationnelles des problèmes aux limites elliptiques" par C. Bernardi, Y. Maday et F. Rapetti dans la collection Mathémtiques et Applications, vol. 15 de Springer-SMAI (2004).

"The finite element method for elliptic problems" par P.G. Ciarlet dans la collection Studies in Mathematics and its Applications, vol. 4, North-Holland (1978).

"Finite element methods for Navier-Stokes equations" par V. Girault et P.A. Raviart dans la collection Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag (1986).

"Méthodes mathématiques pour les sciences physiques" par L. Schwartz, Hermann (1961).

"Elliptic problems in non-smooth domains" par P. Grisvard dans la collection Monographs & Studies in Mathematics, vol. 24 de Pitman (1985).

"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques" par J. Nečas, Masson (1967).

"Sobolev spaces" par R.A. Adams, Academic Press (1975).