Les documents sont autorisés mais pas les appareils électroniques. Les notations sont celles du cours.

Problème 1. (20 points, Lemme de Mazur) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathcal{H}$ tels que $x_n \rightharpoonup x$.

1/ Montrer qu'il existe une suite $(\mathbb{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ tels que $\sum_{k\in\mathbb{K}_n} \alpha_{k,n} x_k \to x$, où $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\{\alpha_{k,n}\}_{k\in\mathbb{K}_n} \subset [0,1]$ et $\sum_{k\in\mathbb{K}_n} \alpha_{k,n} = 1$.

2/ Montrer que dans **1/** on peut prendre $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{K}_n = \{0,\ldots,n\}$.

Problème 2. (14 points) Soit $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction sous-différentiable : $(\forall x \in \mathcal{H})$ $\partial f(x) \neq \varnothing$. Montrer que f est convexe.

Problème 3. (66 points) Soient V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur multivoque monotone. On désigne par P le projecteur sur V et par $P^{\perp}$ le projecteur sur son orthogonal $V^{\perp}$. L'inverse partiel de A par rapport à V est l'opérateur $A_V\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ de graphe

$$\operatorname{gra} A_V = \big\{(Px + P^{\perp}u, Pu + P^{\perp}x) \;\big|\; (x,u) \in \operatorname{gra} A\big\}. \tag{1}$$

1/ Évaluer les inverses partiels $A_{\{0\}}$ et $A_{\mathcal{H}}$, et proposer une justification pour la terminologie.

2/ Soit $B\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur multivoque monotone. Montrer que $(A_V + B_V)_V$ est monotone.

3/ On définit $L\colon \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\colon (x,u) \mapsto (Px + P^{\perp}u, Pu + P^{\perp}x)$. Montrer que $L^{-1} = L$ et que $\operatorname{gra} A_V = L(\operatorname{gra} A)$.

4/ Déduire de **3/** que A_V est maximalement monotone si et seulement si A l'est.

5/ Montrer que $(\forall z \in \mathcal{H})$ $0 \in A_V z \Leftrightarrow P^{\perp}z \in A(Pz)$.

6/ On suppose que A est maximalement monotone et on s'intéresse au problème

$$\text{trouver } x \in V \text{ et } u \in V^{\perp} \text{ tels que } u \in Ax, \tag{2}$$

sous l'hypothèse qu'il possède au moins une solution.

a/ Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ telle que $0 \in \operatorname{irf}(V - \operatorname{dom} f)$. On considère le problème

$$\underset{x\in V}{\text{minimiser}} \;\; f(x), \tag{3}$$

sous l'hypothèse qu'il a au moins une solution. Établir un lien entre (3) et (2).

b/ Soit z un zéro de A_V. Comment obtient-on une solution de (2) ?

c/ Soit $J_{A_V} = (\operatorname{Id} + A_V)^{-1}$ la résolvante de A_V. Montrer que $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall p \in \mathcal{H})$ $p = J_{A_V}x \Leftrightarrow Pp + P^{\perp}x - P^{\perp}p = J_A x$.

d/ On considère l'algorithme $z_0 \in \mathcal{H}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $z_{n+1} = J_{A_V} z_n$. Donner, en le justifiant, un résultat de convergence pour la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e/ On considère l'algorithme

$$(x_0,u_0) \in V \times V^{\perp} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left\lfloor \begin{array}{l} y_n = J_A(x_n + u_n) \\ v_n = x_n + u_n - y_n \\ (x_{n+1}, u_{n+1}) = (Py_n, P^{\perp}v_n). \end{array} \right. \tag{4}$$

i/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} + u_{n+1} = J_{A_V}(x_n + u_n)$.

ii/ Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produites par (4) convergent faiblement vers des points x et u, respectivement, et que (x,u) est solution de (2).