Université Pierre et Marie Curie – Paris 6	Mastère OJME
17 décembre 2012	10h00 à 12h00
Examen semestriel (P. L. Combettes)	Optimisation Continue

Documents autorisés. Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

$\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, et $\mathcal{K}$ sont des espaces hilbertiens réels. Répondre rigoureusement aux questions suivantes. Pour les questions **1**/b/–**1**/d/ on utilisera exclusivement le calcul sous-différentiel et la règle de Fermat.

1/ Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, et $r \in \mathcal{G}$ tels que $r \in \operatorname{irf}\big(L(\operatorname{dom} f)\big)$. On considère le problème

$$\underset{x\in\mathcal{H},Lx=r}{\text{minimiser}}\; f(x) \tag{1}$$

et le problème dual

$$\underset{v\in\mathcal{G}}{\text{minimiser}}\; f^*(L^*v) - \langle v \mid r\rangle \,. \tag{2}$$

Le lagrangien associé est $\mathcal{L}\colon \mathcal{H}\oplus\mathcal{G}\colon (x,v)\mapsto f(x)+\langle Lx-r \mid v\rangle$.

a/ Montrer que (2) est bien le dual de (1) au sens de Fenchel-Rockafellar et qu'il a une solution.

b/ Soit $(\overline{x},\overline{v}) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{G}$ une solution de l'inclusion

$$\begin{bmatrix}0\\ r\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix}\partial f(x)+L^*v\\ Lx\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Montrer que $\overline{x}$ est une solution de (1) et que $-\overline{v}$ est une solution de (2).

c/ Montrer que les points-selle de $\mathcal{L}$ sont solutions de (3).

d/ On définit l'opérateur «résiduel» par $A\colon \mathcal{G}\to 2^{\mathcal{G}}\colon v\mapsto \big\{r-Lx \;\big|\; x\in \operatorname{Argmin}\mathcal{L}(\cdot,v)\big\}$.

i/ Montrer que A est monotone.

ii/ Quel problème résolvent les zéros de A ?

e/ On suppose que (3) a une solution. Montrer comment l'algorithme de Douglas-Rachford peut être utilisé dans $\mathcal{H}\oplus\mathcal{G}$ pour résoudre (1)–(2). On donnera explicitement l'algorithme et tous les calculs intermédiaires, et on utilisera la notation $\operatorname{prox}_f = (\operatorname{Id}+\partial f)^{-1}$. On rappelle que dans un Hilbert $\underline{\mathcal{H}}$, étant donné $\gamma \in \left]0,+\infty\right[$ et deux opérateurs maximalement monotones $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sur $\underline{\mathcal{H}}$ tels que $\operatorname{zer}(\underline{A}+\underline{B}) \neq 0$, cet algorithme s'écrit (on utilisera ces notations)

$$\underline{w}_0 \in \underline{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \text{pour } n=0,1,\ldots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} \underline{x}_n = J_{\gamma\underline{B}}(\underline{w}_n) \\ \underline{z}_n = J_{\gamma\underline{A}}(2\underline{x}_n-\underline{w}_n) \\ \underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n+\underline{z}_n-\underline{x}_n. \end{array}\right. \end{array} \tag{4}$$

De plus, $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une solution de l'inclusion $\underline{0} \in \underline{A}\,\underline{x}+\underline{B}\,\underline{x}$.

2/ Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $g \in \Gamma_0(\mathcal{K})$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, $M \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{G})$ et $r \in \operatorname{irf}(L(\operatorname{dom} f)+M(\operatorname{dom} g))$. On considère le problème

$$\underset{\substack{x\in\mathcal{H},y\in\mathcal{K}\\ Lx+My=r}}{\text{minimiser}}\; f(x)+g(y), \tag{5}$$

et supposant qu'il admet une solution.

a/ Montrer que (5) peut se mettre sous la forme du problème (1) dans un espace adéquat.

b/ À l'aide de (2), écrire le problème dual de (5).

c/ En utilisant **1**/e/, donner un algorithme explicite pour résoudre (5).

3/ Soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille de fonctions dans $\Gamma_0(\mathcal{H})$. On considère le problème

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}}\; \sum_{i=1}^m f_i(x), \tag{6}$$

en supposant qu'il admet une solution.

a/ Montrer que (6) peut se mettre sous la forme du problème (1) dans un espace adéquat.

b/ À l'aide de (2), écrire le problème dual de (6).