Université Pierre et Marie Curie – Paris 6	Mastère OJME
12 décembre 2011	10h00 à 12h00
Examen semestriel (P. L. Combettes)	Optimisation Continue

Documents autorisés : polycopiés et notes de cours. Les appareils électroniques ne sont pas autorisés. $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien réel.

Problème 1. (30 points) Soient $f\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ et $\rho \in \,]0, +\infty[$. On dit que f est ρ-faiblement convexe si

$$(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y \in \operatorname{dom} f)(\forall \alpha \in \,]0,1[\,) \quad f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) + \frac{\rho}{2}\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2. \quad (1)$$

1/ On suppose $f_1\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ et $f_2\colon \mathcal{H} \to [-\infty, +\infty]$ ρ_1- et ρ_2-faiblement convexes, respectivement, et on fixe α_1 et α_2 dans $]0, +\infty[$. Montrer que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ et $\max\{f_1, f_2\}$ sont faiblement convexes.

2/ Montrer les équivalences suivantes.

a/ f est ρ-faiblement convexe.

b/ $f + \rho\|\cdot\|^2/2$ est convexe.

3/ On suppose que f est propre, que $\operatorname{dom} f$ est ouvert et convexe, et que f est Gâteaux-différentiable sur $\operatorname{dom} f$. Montrer les équivalences suivantes.

a/ f est ρ-faiblement convexe.

b/ $(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y \in \operatorname{dom} f)$ $\langle y - x \mid \nabla f(x)\rangle + f(x) \leq f(y) + \rho\|y-x\|^2/2$.

c/ $(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y \in \operatorname{dom} f)$ $\langle y - x \mid \nabla f(y) - \nabla f(x)\rangle \geq -\rho\|y-x\|^2$.

d/ $\nabla f + \rho\,\mathrm{Id}$ est monotone.

4/ On suppose f propre, semicontinue inférieurement, et ρ-faiblement convexe. On fixe $\gamma \in \,]0, +\infty[$ et on définit un opérateur multivoque

$$\operatorname{prox}_{\gamma f}\colon x \mapsto \operatorname{Argmin}\Big(f + \frac{1}{2\gamma}\|x - \cdot\|^2\Big). \quad (2)$$

a/ Déterminer un intervalle D de valeurs de γ pour lequel $\operatorname{dom}\operatorname{prox}_{\gamma f} = \mathcal{H}$ et $\operatorname{dom}\operatorname{prox}_{\gamma f} = \mathcal{H}$ est univoque.

b/ Soit $\gamma \in D$. Montrer que, pour une constante $\beta \in \,]0, +\infty[$ que l'on déterminera, $\beta\operatorname{prox}_{\gamma f}$ est une contraction ferme.

Problème 2. (20 points) On note $\mathfrak{T}$ la classe des opérateurs $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tels que $\operatorname{Fix} T \neq \varnothing$ et

$$(\forall y \in \operatorname{Fix} T)(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \langle y - Tx \mid x - Tx\rangle \leq 0. \quad (3)$$

1/ Soit $T \in \mathfrak{T}$. Utiliser (3) pour montrer que $\operatorname{Fix} T$ est fermé et convexe.

2/ Soit $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une contraction ferme telle que $\operatorname{Fix} T \neq \varnothing$. Montrer que $T \in \mathfrak{T}$.

3/ Soit $T \in \mathfrak{T}$. Montrer que $(\forall y \in \operatorname{Fix} T)(\forall x \in \mathcal{H})$ $\|Tx - y\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|Tx - x\|^2$.

4/ Soit $T \in \mathfrak{T}$ tel que, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}$ et tout $y \in \mathcal{H}$,

$$\text{si } \ y_n \rightharpoonup y \ \text{ et } \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ty_n - y_n\|^2 < +\infty, \ \text{alors } y \in \operatorname{Fix} T. \quad (4)$$

On fixe $x_0 \in \mathcal{H}$ et on itère $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = Tx_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point fixe de T.

5/ Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ maximalement monotone avec $0 \in \operatorname{Im} A$. Utiliser **4/** pour trouver un zéro de A.