Université Pierre et Marie Curie *Lundi 8 Janvier 2018*
Master Mathématiques & Applications
Cours: Approximations Variationnelles d' EDP

Examen

Seuls les documents "papier" sont autorisés

Durée: 3 heures

Vous pouvez accepter le résultat d'une question non traitée et l'utiliser dans une question suivante

Première partie .

Soit Ω le rectangle $]-1,1[\times]0,1[$. On considère le problème de trouver $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \quad (1)$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (2)$$

où f est donnée dans $H^2(\Omega)$

1) Donner la formulation variationnelle du problème et justifier que le problème est bien posé.

2) Quelle est la régularité de la solution à laquelle on peut s'attendre ? En déduire que $\nabla u \in H^1(\Omega)$.

3) On pose $\Omega_1 =]-1,0[\times]0,1[$, $\Omega_2 =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma_{12} = \{0\}\times]0,1[$. Montrer que, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_{|\Omega_1} \nabla v_{|\Omega_1} - \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u}{\partial n_1} v = \int_{\Omega_1} f_{|\Omega_1} v_{|\Omega_1} \quad (3)$$

On définit les espaces

$$H^1_\star(\Omega_1) = \{v_1 \in H^1(\Omega_1); v_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{12}\} \quad (4)$$

et

$$H^1_\star(\Omega_2) = \{v_2 \in H^1(\Omega_2); v_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{12}\} \quad (5)$$

On remarquera que les éléments de ces espaces ne s'annulent, a priori pas, pas sur Γ_{12}. Déduire de ce qui précède que il existe $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_{12})$ tel que, pour tout $v_1 \in H^1_\star(\Omega_1)$ et tout $v_2 \in H^1_\star(\Omega_2)$

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_{|\Omega_1} \nabla v_1 + \int_{\Omega_2} \nabla u_{|\Omega_2} \nabla v_2 - \int \lambda(v_1 - v_2) = \int_{\Omega_1} f_{|\Omega_1} v_1 + \int_{\Omega_2} f_{|\Omega_2} v_2 \quad (6)$$

4) On pose pour tout couple (u_1, v_1) de $H^1_\star(\Omega_1)$

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1$$

et pour tout couple (u_2, v_2) de $H^1_\star(\Omega_2)$

$$a_2(u_2, v_2) = \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v_2$$

et enfin, pour $\lambda \in L^2(\Gamma_{12})$ et tout $\underline{v} = (v_1, v_2) \in H^1_\star(\Omega_1) \times H^1_\star(\Omega_2)$

$$b(\lambda, \underline{v}) = -\int \lambda(v_1 - v_2)$$

Montrer que a_1 (resp. a_2) est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H^1_\star(\Omega_1)$ (resp. $H^1_\star(\Omega_2)$).

5) Montrer que la définition de b peut être étendue sur $H^{-1/2}(\Gamma_{12})\times[H^1_\star(\Omega_1)\times H^1_\star(\Omega_2)]$ (où on rappelle que $H^{-1/2}(\Gamma_{12})$ est le dual de $H^{1/2}_{00}(\Gamma_{12})$ en une forme bilinéaire continue.

6) Écrire la condition inf-sup associée à b. La démontrer

7) Montrer que le problème (1) est équivalent à trouver $\underline{u}=(u_1,u_2)\in H^1_\star(\Omega_1)\times H^1_\star(\Omega_2)$ et $\lambda\in H^{-1/2}(\Gamma_{12})$ tels que

$$\begin{aligned} a_1(u_1,v_1)+a_2(u_2,v_2)+b(\lambda,\underline{v}) &= \int_{\Omega_1} f_{|\Omega_1}v_1+\int_{\Omega_2} f_{|\Omega_2}v_2 \quad \forall\underline{v}=(v_1,v_2)\in H^1_\star(\Omega_1)\times H^1_\star(\Omega_2) \quad (7)\\ b(\nu,\underline{u}) &= 0 \quad \forall\nu\in H^{-1/2}(\Gamma_{12}) \quad (8)\end{aligned}$$

où donc $u_1=u_{|\Omega_1}$ et $u_2=u_{|\Omega_2}$.

8) Montrer que ce dernier problème, sous cette formulation mixte, est bien posé dans $[H^1_\star(\Omega_1)\times H^1_\star(\Omega_2)]\times H^{-1/2}(\Gamma_{12})$.

Deuxième partie .

9) Proposer une approximation spectrale du problème de la question (7) dans $[I\!P_N(\Omega_1)\cap H^1_\star(\Omega_1)]\times[I\!P_N(\Omega_2)\cap H^1_\star(\Omega_2)]$ pour $\underline{u}$ et $I\!P^0_N(\Gamma_{12})=I\!P_N(\Gamma_{12})\cap H^1_0(\Gamma_{12})$ pour λ

10) Donner les conditions pour que ce problème soit bien posé

11) Démontrer que ce problème est bien posé et faire l'analyse numérique de l'erreur entre la solution $\underline{u}$ et la solution $\underline{u}_N$ du problème discret. On supposera que $(u_1,u_2)\in H^{r_1}(\Omega_1)\times H^{r_2}(\Omega_2)$.

12) Montrer que la solution coincide avec la solution de la discrétisation de ce problème par la méthode des éléments spectraux.

13) Montrer que cette approche permet de généraliser l'approximation à une discrétisation dans $[I\!P_M(\Omega_1)\cap H^1_\star(\Omega_1)]\times[I\!P_N(\Omega_2)\cap H^1_\star(\Omega_2)]$ pour $\underline{u}$ et $I\!P^0_N(\Gamma_{12})$ pour λ avec $M\neq N$. Dans quel cas $M>N$ où $M<N$ obtient on une approximation non conforme ?

Troisième partie .

14) On considère le problème de trouver $u\in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}[\mathcal{A}(x;\mu)\nabla]u &= f \text{ dans } \Omega \quad (9)\\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (10)\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}(x;\mu)$ est une matrice symétrique 2×2 donnée très régulière de fonction de Ω et $\mu\in\mathcal{D}$ est un parametre donné dans un compact $\mathcal{D}$. Donner la formulation variationnelle de ce problème et donner des conditions sur $\mathcal{A}(x;\mu)$ pour que ce problème soit bien posé. On appelle $u(\mu)$ la solution associée.

15) On souhaite mettre ce problème sous la forme de la question 7). Que faut il changer, tout d'abord dans le cas où, au voisinnage de Γ_{12} la matrice $\mathcal{A}(x;\mu)$ est la matrice identité, puis faire le cas général.

16) On définit les variétés $\mathcal{S}_1=\{u(.,\mu)_{|\Omega_1},\mu\in\mathcal{D}\}$ et de même pour $\mathcal{S}_2$, puis une approximation X_{1N} de type base réduite de $\mathcal{S}_1$ et de même X_{2N} pour $\mathcal{S}_2$. Donner une méthode pour définir X_{iN}, $i=1,2$.
17) Proposer une approximation base réduite adaptée à la formulation de l'équation 15. Proposer un bon espace pour les fonctions $\lambda(\mu)$.

18) Quel est le point technique difficile à établir pour faire l'analyse numérique de ce problème de base réduite.