

***Une justification microscopique
de la loi d'Ohm***

**Diogo Arsenio
Laure Saint-Raymond**

Le système de Navier-Stokes- Maxwell avec loi d'Ohm

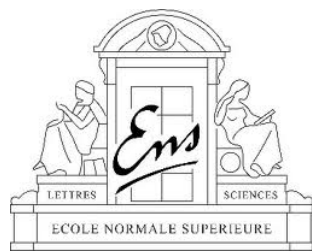


Les équations du mouvement

Pour un fluide incompressible et visqueux

$$\operatorname{div} u = 0,$$
$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u - \mu \Delta_x u = -\nabla_x p + \frac{1}{2} (nE + j \wedge B)$$

- La densité de charge n et le courant j sont dus à la séparation de charges (variables additionnelles).
- Si la force de Lorentz est régulière, les **solutions faibles** existent globalement (cf Leray).



Les équations électromagnétiques

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_t E - \operatorname{rot} B &= -j, & \operatorname{div} E &= n \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E &= 0, & \operatorname{div} B &= 0\end{aligned}$$

- Ces équations sont hyperboliques, elles propagent les singularités à la vitesse de la lumière.
- Si le terme source n'est pas régulier, (E, B) n'est pas mieux que L^2 (borne d'énergie)



La loi d'Ohm

Ohm's law is an [empirical law](#), a generalization from many experiments that have shown that current is approximately proportional to electric field for most materials.

A qualitative description leading to Ohm's law can be based upon classical mechanics using the [Drude model](#) (with electrons like pinballs bouncing among the ions that make up the structure of the material).

If an external magnetic field is present and the conductor is not at rest but moving at velocity u , then an extra term must be added to account for the current induced by the [Lorentz force](#) on the electrons.

$$j - nu = \sigma \left(-\frac{1}{2} \nabla_x n + E + u \wedge B \right)$$



Le bilan d'énergie

Un calcul montre que l'énergie est dissipée (avec des termes de friction liés à la viscosité et au courant)

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(2 \|u\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \|n\|_{L_x^2}^2 + \|E\|_{L_x^2}^2 + \|B\|_{L_x^2}^2 \right) + \mu \|\nabla_x u\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2\sigma} \|j - nu\|_{L_x^2}^2 = 0$$

- Ces bornes a priori permettent de donner un sens à tous les termes dans les équations.
- Mais on n'a ni stabilité, ni solutions faibles.



Le vecteur de Poynting

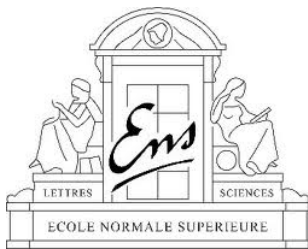
Une autre identité importante en physique est

$$\begin{aligned}\partial_t (E \wedge B) + \frac{1}{2} \nabla_x (E^2 + B^2) - \nabla_x \cdot (E \otimes E + B \otimes B) \\ = -nE - j \wedge B\end{aligned}$$

- Elle fournit une autre formulation de la force de Lorentz, qui n'implique pas le courant.
- Cela permet de contrôler tous les termes non linéaires par l'énergie.



Sur l'existence, la stabilité et l'unicité des solutions



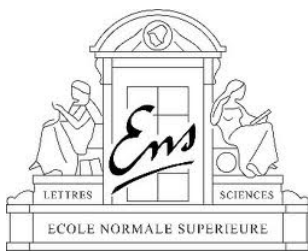
Solutions régulières à petites données

Existence globale pour des petites données initiales
(Keraani, Germain, Ibrahim, Masmoudi)

$$u \in \tilde{L}^\infty \left((0, T); \dot{H}^{\frac{1}{2}} \right) \cap L^2 \left((0, T); \dot{H}^{\frac{3}{2}} \cap L^\infty \right)$$

$$E, B \in \tilde{L}^\infty \left((0, T); \dot{H}^{\frac{1}{2}} \right)$$

- Espaces fonctionnels invariants d'échelle
- Estimations basées sur le calcul paradifférentiel
- Contrôle de la non linéarité par la dissipation
(stratégie de Fujita-Kato)

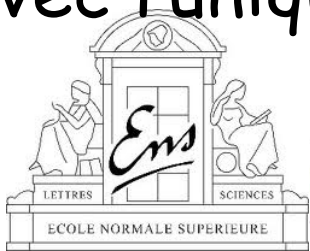


Solutions dissipatives

Les solutions dissipatives (u, n, E, B) sont des champs

- Appartenant à l'espace d'énergie,
- Satisfaisant (une partie) des contraintes,
(contraintes linéaires + équations de Maxwell)
- Satisfaisant une inégalité de stabilité
qui code la consistence avec les autres équations
(loi d'Ohm + équation du mouvement)

En particulier, les solutions dissipatives coïncident avec l'unique solution régulière tant qu'elle existe.



Inégalité de stabilité – Formulation 1

On module l'énergie avec des fonctions test $(\bar{u}, \bar{j}, \bar{E}, \bar{B})$ satisfaisant les contraintes linéaires.

De l'équation du mouvement et la loi d'Ohm, on déduit

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \delta \mathcal{D}(s) e^{\int_s^t \lambda(\sigma) d\sigma} ds \\ \leq \delta \mathcal{E}(0) e^{\int_0^t \lambda(s) ds} + \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ j - \bar{j} - n(u - \bar{u}) \end{pmatrix} dx \right] (s) e^{\int_s^t \lambda(\sigma) d\sigma} ds, \end{aligned}$$

où l'opérateur d'accélération est donné par

$$\mathbf{A}(\bar{u}, \bar{n}, \bar{j}, \bar{E}, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -\partial_t \bar{u} - P(\bar{u} \cdot \nabla_x \bar{u}) + \mu \Delta_x \bar{u} + \frac{1}{2} P(\bar{n} \bar{E} + \bar{j} \wedge \bar{B}) \\ -\frac{1}{2\sigma} (\bar{j} - \bar{n} \bar{u}) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \nabla_x \bar{n} + \bar{E} + \bar{u} \wedge \bar{B} \right) \end{pmatrix}$$

et le taux de croissance dépend de $|(\bar{u}, \bar{j}, \bar{E}, \bar{B})|_\infty$



Inégalité de stabilité – Formulation 2

On définit

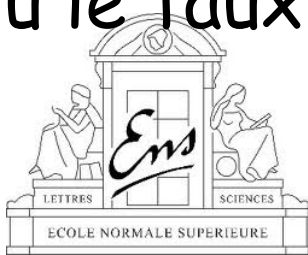
$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(t) = & \frac{1}{2} \|(u - \bar{u})(t)\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{8} \|(n - \bar{n})(t)\|_{L_x^2}^2 \\ & + \frac{1}{4} \|(E - \bar{E})(t)\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{4} \|(B - \bar{B})(t)\|_{L_x^2}^2 \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} ((E - \bar{E})(t) \wedge (B - \bar{B})(t)) \cdot \bar{u}(t) dx, \end{aligned}$$

De l'équation du mouvement avec le vecteur de Poynting et de la loi d'Ohm, on déduit

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(t) + \int_0^t \delta \mathcal{D}(s) e^{\int_s^t \lambda(\sigma) d\sigma} ds \\ \leq \delta \mathcal{E}(0) e^{\int_0^t \lambda(s) ds} + \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ j - nu - (\bar{j} - \bar{n}\bar{u}) \end{pmatrix} dx \right] (s) e^{\int_s^t \lambda(\sigma) d\sigma} ds \end{aligned}$$

où le taux de croissance est borné par

$$|(\bar{u}, \bar{j}, \bar{E}, \bar{B})|_{1, \infty} / (1 - \|\bar{u}(t)\|_{L_x^\infty})$$



Un description cinétique avec deux espèces



Les équations de Vlasov-Boltzmann

Pour des ions de masse et charge comparables

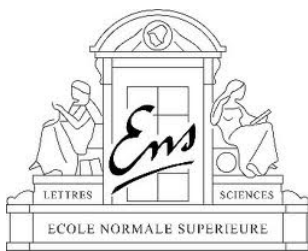
$$\partial_t f^\pm + v \cdot \nabla_x f^\pm \pm (E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f^\pm = Q(f^\pm, f^\pm) + Q(f^\pm, f^\mp)$$

On suppose pour simplifier que les interactions sont décrites par des opérateurs de collision de type Boltzmann.

Les densités de charge et de courant sont données par

$$\operatorname{div} E = \int_{\mathbb{R}^3} (f^+ - f^-) dv$$

$$\partial_t E - \operatorname{rot} B = - \int_{\mathbb{R}^3} (f^+ - f^-) v dv$$



L'inégalité d'entropie

On définit l'entropie relative $H(f) = \int \left(f \log \frac{f}{M} - f + M \right) dx dv$

De l'inégalité d'entropie et de la conservation de l'énergie, on déduit

$$\begin{aligned} H(f^+) + H(f^-) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|E|^2 + |B|^2) dx \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (D(f^+) + D(f^-) + D(f^+, f^-)) (s) dx ds \\ \leq H(f^{+\text{in}}) + H(f^{-\text{in}}) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|E^{\text{in}}|^2 + |B^{\text{in}}|^2) dx < \infty. \end{aligned}$$

• La dissipation $D(f^\pm)$ contrôle la relaxation de f^\pm vers l'équilibre thermodynamique local.

• La dissipation mixte $D(f^+, f^-)$ contrôle le courant (et la différence de températures).

Solutions renormalisées

La stabilité de la force de Lorentz nécessite de la compacité!

Théorème (Arsenio, Saint-Raymond)

Soit b une section efficace associée à un potentiel en puissance inverse.
Soit f_0^\pm une donnée initiale d'énergie libre bornée.

Alors il existe une solution renormalisée avec mesure de défaut de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \beta(f^\pm) + v \cdot \nabla_x \beta(f^\pm) \pm (E + v \wedge B) \cdot \nabla_v \beta(f^\pm) \\ \qquad \qquad \qquad = \beta'(f^\pm) Q(f^\pm, f^\pm + f_\varepsilon^\mp) + \nu_\beta^\pm, \\ \operatorname{div} E = \int (f^+ - f_-) dv, \quad \partial_t E - \operatorname{rot} B = - \int (f^+ - f_-) v dv, \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0. \end{array} \right.$$

De plus la mesure de défaut est contrôlée par la dissipation d'entropie.

Scalings

- Régime visqueux incompressible
 - taux de relaxation $Kn = \varepsilon$
(on suppose ici que tous les nombres de Knudsen sont égaux)
 - compressibilité $Ma = \varepsilon$
 - viscosité $Re = Ma/Kn = 1$
- Scalings pour le champ électromagnétique
 - répulsion électrique $\alpha = \varepsilon^2$
 - induction magnétique $\beta = \varepsilon$
 - vitesse de la lumière $c = \beta Ma / \alpha = 1$



Le résultat de convergence

Théorème (Arsenio, Saint-Raymond)

Soit $f_{\varepsilon,0}^{\pm} = M(1 + \varepsilon g_{\varepsilon,0}^{\pm})$ une donnée initiale convergeant au sens entropique vers $g_0^{\pm} = \rho_0^{\pm} + u_0 \cdot v + \frac{1}{2}\theta_0(|v|^2 - 3)$ avec

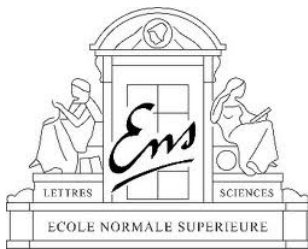
$$\nabla \cdot u_0 = 0, \quad \rho_0^+ + \rho_0^- + 2\theta_0 = 0.$$

On suppose que b est bornée et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution renormalisée $(f_{\varepsilon}^{\pm}, E_{\varepsilon}, B_{\varepsilon})$ pour le système :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t f_{\varepsilon}^{\pm} + v \cdot \nabla_x f_{\varepsilon}^{\pm} \pm \varepsilon (\varepsilon E_{\varepsilon} + v \wedge B_{\varepsilon}) \cdot \nabla_v f_{\varepsilon}^{\pm} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_{\varepsilon}^{\pm}, f_{\varepsilon}^{\pm} + f_{\varepsilon}^{\mp}) \\ \operatorname{div} E_{\varepsilon} = n_{\varepsilon} \equiv (\rho_{\varepsilon}^+ - \rho_{\varepsilon}^-), \quad \partial_t E - \operatorname{rot} B = -j_{\varepsilon} \equiv -\frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon}^+ - u_{\varepsilon}^-), \\ \partial_t B_{\varepsilon} + \operatorname{rot} E_{\varepsilon} = 0, \quad \operatorname{div} B_{\varepsilon} = 0, . \end{cases}$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, toute limite de $(u_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}, n_{\varepsilon}, j_{\varepsilon}, E_{\varepsilon}, B_{\varepsilon})$ est une solution dissipative du système de Navier-Stokes-Fourier-Maxwell avec loi d'Ohm.

Stratégie et difficultés de la preuve



Bornes a priori

- L'inégalité d'entropie scalée donne des bornes L^2 sur le champ électromagnétique $(E_\varepsilon, B_\varepsilon)$, sur les fluctuations et intégrales de collision renormalisées

$$\hat{g}_\varepsilon^\pm = \frac{2}{\varepsilon} \left(\sqrt{G_\varepsilon^\pm} - 1 \right) \quad q_\varepsilon^\pm = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sqrt{(f_\varepsilon^\pm)'(f_\varepsilon^\pm)'_*} - \sqrt{f_\varepsilon^\pm f_{\varepsilon*}^\pm} \right)$$
$$q_\varepsilon^{+,-} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sqrt{(f_\varepsilon^+)'(f_\varepsilon^-)'_*} - \sqrt{f_\varepsilon^+ f_{\varepsilon*}^-} \right)$$

- Ces bornes suffisent à obtenir les **contraintes linéaires**

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \nabla_x \left(\frac{\rho^+ + \rho^-}{2} + \theta \right) = 0.$$

$$\partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0$$



Relaxation

- **L'estimation de relaxation** vient de la coercivité de l'opérateur de collision linéarisé. Il n'est plus scalaire mais toujours Fredholm avec noyau

$$\text{Ker}(\mathbf{L}) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |v|^2 \\ |v|^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- En particulier, on a **une borne sur le courant** car

$$h_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon^+ - g_\varepsilon^- - n_\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^1$$

- Une variante linéaire de la **décomposition de Chapman-Enskog** donne de plus la compacité en v .



Dérivation de la loi d'Ohm

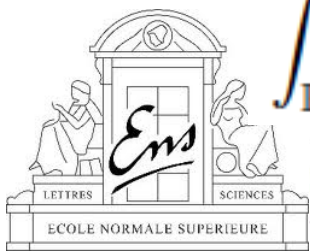
La loi d'Ohm apparaît comme une contrainte d'ordre 2 après **projection** sur les modes hydrodynamiques.

- En utilisant une famille de renormalisations avec l'équiintégrabilité obtenue par **hypoellipticité**, on a

$$(v \cdot \nabla_x \pm (v \wedge B) \cdot \nabla_v) g^\pm \mp E \cdot v = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (q^\pm + q^{\pm, \mp}) M_* dv_* d\sigma$$

- Puis, en utilisant la bilinéarité de l'opérateur de collision et une renormalisation macroscopique

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (q^{+, -} - q^{-, +}) M_* dv_* d\sigma = nu \cdot \mathfrak{L}(v) + n\theta \mathfrak{L}\left(\frac{|v|^2}{2}\right) - \mathfrak{L}(h)$$



Défauts de conservation

Les lois de conservation sont obtenues à l'ordre suivant, avec des défauts dûs à la renormalisation

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + \nabla_x \cdot \left(u_\epsilon \otimes u_\epsilon - \frac{|u_\epsilon|^2}{3} \text{Id} - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \frac{\hat{q}_\epsilon^+ + \hat{q}_\epsilon^-}{2} \tilde{\phi} M M_* dv dv_* d\sigma \right) \\ = -\frac{1}{\epsilon} \nabla_x (\rho_\epsilon + \theta_\epsilon) + \frac{1}{2} (n_\epsilon E_\epsilon + j_\epsilon \wedge B_\epsilon) + R_\epsilon \end{aligned}$$

- Les défauts de conservation sont contrôlés par l'entropie modulée et la dissipation d'entropie.
- En l'absence de contrôle sur j , on exprime la force de Lorentz en fonction du vecteur de Poynting.

Entropie modulée renormalisée

La dernière étape est d'obtenir l'inégalité de stabilité.

- Il faut d'abord trouver une bonne fonctionnelle

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_\epsilon(t) = & \frac{1}{\epsilon^2} H(f_\epsilon^+) + \frac{1}{\epsilon^2} H(f_\epsilon^-) \\ & - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (g_\epsilon^+ \gamma_\epsilon^+ + g_\epsilon^- \gamma_\epsilon^-) \chi\left(\frac{|v|^2}{K_\epsilon}\right) \bar{g} M dx dv + \|\bar{g}\|_{L^2(M dx dv)}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|E_\epsilon - \bar{E}\|_{L^2(dx)}^2 + \frac{1}{2} \|B_\epsilon - \bar{B}\|_{L^2(dx)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \text{Tr } m_\epsilon + \text{Tr } a_\epsilon \right) dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} \left((E_\epsilon - \bar{E}) \wedge (B_\epsilon - \bar{B}) + \begin{pmatrix} a_{\epsilon 26} - a_{\epsilon 35} \\ a_{\epsilon 34} - a_{\epsilon 16} \\ a_{\epsilon 15} - a_{\epsilon 24} \end{pmatrix} \right) \cdot \bar{u} dx, \end{aligned}$$

- Pour obtenir la stabilité, on a ensuite besoin de la **consistance de la loi d'Ohm** sans renormalisation (à des défauts de conservation près).

